



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دوره ۴۸، شماره ۱، بهار ۱۳۹۵، صفحه ۱ تا ۱۲
Vol. 48, No. 1, Spring 2016, pp. 1-12



نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر - مهندسی عمران و محیط زیست

AmirKabir Journal of Science & Research
Civil and Environmental Engineering
(ASJR-CEE)

مدل سازی و حل تحلیلی مسئله مکش در لایه مرزی اطراف استوانه با مقطع بیضی

عبدالرضا کبیری سامانی^{۱*}، محمد حسین گل محمدی^۲

۱- دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

۲- دانشجوی دکترا، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

(دریافت: ۱۳۹۱/۰۷/۲۳، پذیرش: ۱۳۹۳/۱۰/۰۳)

چکیده

کنترل لایه مرزی در مسائل مختلف و در کنترل و جلوگیری از جدایش جریان اطراف پایه‌ها حائز اهمیت است. از روش‌های مختلف کنترل لایه مرزی در اطراف سازه‌ها می‌توان به حرکت جدار جامد، اعمال شتاب به لایه مرزی از طریق دمش یا مکش، جلوگیری از جدایش جریان با اتخاذ شکل‌های مناسب و مکش لایه مرزی اشاره نمود. تاریخچه مطالعاتی نشان می‌دهد که حل تحلیلی مکش در لایه مرزی روی اجسامی با مقطع بیضی، تاکنون ارائه نشده است. در این تحقیق، ضمن بررسی معادلات حاکم بر جریان دوبعدی تراکم‌ناپذیر در لایه مرزی اطراف سیلندهای بیضی و دایره‌ای شکل، به بررسی کنترل لایه مرزی با اعمال مکش از درون پایه پرداخته می‌شود. در این تحقیق روش حل تحلیلی مسئله مکش لایه مرزی با اعمال شرایط مناسب روی مقطع بیضی مورد بررسی قرار گرفته است. سپس حل حاصل به مقاطع دایره و صفحه تخت تعمیم داده شده و پاسخ مربوط به صفحه تخت با نتایج محققین پیشین مقایسه شده است. همچنین بر اساس معیارهای تخمین و تطابق، مقایسه کمی بین نتایج حاصل از تحقیق حاضر و نتایج تحقیقات پیشین در چند حالت خاص مکش انجام شده است. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که حل تحلیلی ارائه شده از دقت بسیار خوبی برخوردار است. در این تحقیق همچنین توزیع سرعت‌ها در جهات متعامد و توزیع تنش برشی روی سطح تعیین شده و روابطی برای محاسبه ضریب و نیروی درگ ارائه شده است. همچنین معادلاتی برای تابع جریان نیز استخراج شده است.

کلمات کلیدی:

کنترل لایه مرزی، مکش، حل تحلیلی، جریان آرام، مقطع بیضی

۱- مقدمه

پایه‌ی استوانه‌ای ساکن و ایجاد شکاف در رژیم یکنواخت جریان با عدد رینولدز ۲۰۰۰۰ موفق به کاهش نیروی دراگ تا ۳۰٪ مقدار موجود آن شدند. یکی از روش‌های کاربردی کنترل لایه مرزی، مکش در لایه مرزی است که امروزه مورد توجه محققان قرار گرفته است. با ایجاد دیواره‌های مشبک و مکش جریان به سمت دیواره می‌توان ضخامت لایه مرزی را کاهش داده و از جدایی جریان از سطح جامد پیشگیری کرد. تنظیم شدت مکش و محل اعمال آن بر سطح جداره‌ی جامد از مسائل اساسی طراحی سیستم مناسب بوده و تاکنون مطالعات آزمایشگاهی و مدل‌های مختلف عددی و بهینه‌سازی برای آن ارائه شده است. جین در سال ۱۹۶۰، به بررسی مسئله کنترل لایه مرزی با استفاده از مکش پیوسته پرداخت [۶]. او با بررسی روابط ارائه شده توسط پل‌هاوسن در سال ۱۹۲۱ [۷]، روابطی جدید برای مکش در لایه مرزی ارائه نمود. ناهوئی و هم‌کاران در سال ۲۰۰۸ به مدل‌سازی تحلیلی جریان اطراف بال هواپیما در حضور مکش به منظور کنترل لایه مرزی پرداختند [۸]. آنها در این بررسی برای بهینه‌سازی روش مکش در لایه مرزی تداخل در سطح جسم جامد و سرعت و زاویه مکش را مورد بررسی قرار دادند. نتایج این بررسی با اطلاعات واقعی سازگاری بسیار خوبی داشت.

همان‌گونه که از تاریخچه‌ی موضوع بر می‌آید بررسی رفتار جریان در اطراف پایه‌های استوانه‌ای با مقاطع مختلف زمینه‌ساز شکل‌گیری بسیاری از مطالعات آزمایشگاهی و مدل‌های ریاضی بوده است. همچنین حل تحلیلی مکش لایه مرزی روی اجسامی با مقطع بیضی، تاکنون ارائه نشده است. هدف از این تحقیق حل تحلیلی معادلات حاکم بر جریان عبوری از اطراف پایه‌ی استوانه‌ای با مقاطع دایره‌ای و بیضی تحت اثر مکش جریان به داخل پایه به عنوان یکی از روش‌های کنترل لایه مرزی است. بنابراین ضمن حل تحلیلی مکش لایه مرزی اطراف سیلندر با مقطع دایره و بیضی با استفاده از معادلات حرکت، نتایج و تقریب‌ها برای صفحه تخت ساده‌سازی و با نتایج موجود مقایسه می‌گردد.

۲- معادلات لایه مرزی در مختصات استوانه‌ای و مختصات طبیعی

۲-۱- معادلات جریان در مختصات استوانه‌ای

اگر در مختصات استوانه‌ای به جای $rd\theta$ از η و به جای dr از ds استفاده شود، معادلات پیوستگی و ناویر استوکس به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{r} = 0 \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = \quad (2)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial s} \right\}$$

$$u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial \eta} = \quad (3)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \eta} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial s} \right\}$$

مطالعه‌ی رفتار سیال عبوری از روی یک استوانه‌ی ساکن یکی از جالب‌ترین زمینه‌های تحقیقاتی در علم مکانیک سیالات لزج و پدیده‌ی لایه‌ی مرزی است و نتایج آن در بسیاری از موارد نظیر ساخت و تولید ابزارهای اندازه‌گیری مشخصات جریان، طراحی پایه‌های پل‌ها، پایه‌های نگه‌دارنده در سازه‌های دریایی و تحلیل رفتار ساختمان‌های بلند که در مسیر جریان سیال در حال حرکت هستند، کاربرد دارد. با دخیل شدن اثر لزجت سیال در مسئله و شکل‌گیری لایه‌ی مرزی در روی جسم استوانه‌ای، توزیع فشار واقعی، با توزیع متقارن در سیال ایده‌آل بسیار متفاوت بوده و تابعی از عدد رینولدز جریان است. مقدار فشار روی کلیه‌ی نقاط جسم از اندازه‌ی فشار در جریان آزاد اطراف کوچک‌تر است و این مسئله سبب وارد آمدن نیروی دراگ بر جسم خواهد شد. پدیده‌ی جالب‌توجه دیگر وقوع جدایش جریان عبوری از روی جسم استوانه است. پدیده‌ی جدایی جریان، رابطه‌ی نزدیکی با توزیع فشار در لایه‌ی مرزی و توزیع فشار در جریان آزاد خارجی دارد. فشار جریان آزاد باعث می‌شود که ذرات در جهت مخالف مسیر سیال حرکت کرده و پس از جدایش از سطح استوانه، باعث تشکیل گردابه در پشت جسم شود که در مدت کوتاهی به داخل سیال در پشت جسم حرکت می‌کند. در ناحیه‌ی گردابی پشت استوانه مقدار قابل ملاحظه‌ای مکش وجود دارد که باعث وارد آمدن نیروی کششی بزرگی به جسم می‌شود. با افزایش شدت آشفتگی جریان و بزرگ شدن عدد رینولدز، می‌توان در فواصل دورتر از جسم، گردابه‌هایی را مشاهده کرد که به طور متناوب در جهت عقربه‌های ساعت و در خلاف جهت آن حرکت می‌کنند که به گردابه‌های وون-کارمن معروف هستند. گردابه‌های وون-کارمن و جدایش جریان از روی پایه‌های پل‌ها از عوامل اصلی افزایش میزان آب‌شستگی اطراف پایه پل‌ها محسوب می‌شوند. بنابراین پیشگیری از وقوع این پدیده به یکی از زمینه‌های تحقیقاتی پراهمیت در علوم مهندسی رودخانه تبدیل شده است. در مطالعات کاربردی رفتار سیالات، بزرگترین دستاورد در سال ۱۹۰۴ توسط پراندتل ارائه شد که در آن اثر لزجت سیال تنها به ناحیه‌ی کوچکی در اطراف جسم با عنوان لایه‌ی مرزی محدود می‌شود [۱]. برادسکی در سال ۱۹۲۳ یک روش حل را تحلیلی برای بررسی رفتار سیال عبوری از روی استوانه‌ی ساکن برای جریان با عدد رینولدز بسیار بزرگ ارائه داد [۲]. فورنبرگ در سال ۱۹۸۰ با استفاده از نگاشت‌ها و تبدیل معادلات انتقال ورتکس به دستگاه مختصات جدید توسط نگاشت‌ها، موفق به ارائه‌ی راه‌حلی برای تحلیل جریان ماندگار عبوری از روی یک استوانه‌ی ساکن تا مرز عدد رینولدز ۳۰۰ شد [۳]. پر و همکاران در سال ۱۹۹۴ به بررسی تأثیر فاصله‌ی دیواره‌های جانبی بر رفتار جریان ناماندگار سیال تراکم‌ناپذیر در هنگام عبور از اطراف پایه‌ی استوانه‌ای شکل پرداختند [۴]. در سال ۲۰۰۴، لی و هم‌کاران ضمن طراحی سلسه آزمایش‌هایی، روشی جدید برای کاهش نیروی دراگ و ضریب فشار استوانه‌ی ساکن در جریان ارائه کردند [۵]. آن‌ها با نصب تیرک‌های استوانه‌ای باریک در بالادست یک

که در آن‌ها h_1 و h_2 ضرایب تبدیل هستند و برای بیضی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$h_1 = h_2 \quad (15)$$

$$= c \sqrt{\sinh^2 \eta \cos^2 \theta + \cosh^2 \eta \sin^2 \theta}$$

$$, c = a \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}$$

که در آن a و b به ترتیب شعاع بزرگ و کوچک بیضی هستند. خان در سال ۲۰۰۴ معادلهٔ مربوط به $U(s)$ را برای بیضی به صورت زیر به دست آورد [۹]:

$$U(s) = \frac{U_0 (1 + \varepsilon) \sin \theta}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}, \quad e = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \quad (16)$$

با قرار دادن $a=b$ معادلهٔ $U(s)$ برای دایره به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$U(s) = 2U_0 \sin \theta \quad (17)$$

رابطه برای دایره به صورت زیر به دست می‌آید:

برای دایره:

$$\frac{dU(s)}{ds} = \frac{dU(s)}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} \quad (18-الف)$$

همچنین برای بیضی می‌توان نوشت:

$$x = a \cos \theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta$$

$$y = b \sin \theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = b \cos \theta$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

$$= \sqrt{(a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2} d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2}}$$

در نتیجه:

$$\Rightarrow \frac{dU(s)}{d\theta} = \frac{U_0 (1 + \varepsilon) (e^2 - 1) \cos \theta}{(e^2 \cos^2 \theta - 1)^{3/2}} \quad (18-ب)$$

و در نهایت ترم $\frac{dU(s)}{ds}$ برای بیضی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dU(s)}{ds} = \frac{U_0 (1 + \varepsilon) (e^2 - 1) \cos \theta}{(e^2 \cos^2 \theta - 1)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{(a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2}} \quad (18-ج)$$

$$\frac{U_0 (1 + \varepsilon) (e^2 - 1) \cos \theta}{(e^2 \cos^2 \theta - 1)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{(a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2}}$$

۳- روش انجام کار و حل تحلیلی مسئله مکش در لایه مرزی در شکل ۱ استوانه‌ای با مقطع بیضی و شعاع بزرگ a و شعاع کوچک b

در معادلات فوق:

s مقدار فاصله در طول منحنی، η مقدار فاصله از سطح منحنی، r مقدار شعاع منحنی، u پارامتر سرعت در راستای S, V : پارامتر سرعت در راستای U_0, η سرعت جریان پتانسیل خارج از لایهٔ مرزی و P فشار در لایهٔ مرزی. همچنین با استفاده از معادلهٔ برنولی می‌توان رابطه فشار را به صورت زیر نوشت:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} = U \frac{dU(s)}{ds} \quad (4)$$

با در نظر گرفتن مقادیر بی‌بعد $P/\rho U_0^2$ و $v/U_0, u/U_0, r/D, \eta/D, s/D$ و بازنویسی معادلات فوق با مقادیر بی‌بعد s, η, r, u, v و عدد رینولدز معادلات ذیل به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{r} = 0 \quad (5)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} + v \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{u}{r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial s} \right\} \quad (6)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \eta} + v \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial s} \right\} \quad (7)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} = U \frac{dU(s)}{ds} \quad (8)$$

این معادلات را می‌توان با استفاده از روش تحلیل مرتبه، ساده‌سازی نمود [۹]:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{r} = 0 \quad (9)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial P}{\partial s} + \frac{1}{\text{Re}_D} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \quad (10)$$

$$\frac{dP}{d\eta} = 0 \quad (11)$$

$$-\frac{dP}{ds} = U(s) \frac{dU(s)}{ds} \quad (12)$$

۲-۲- معادلات جریان در مختصات طبیعی

در مختصات طبیعی (η, θ) ، معادلات ساده‌سازی شده به صورت زیر خواهند بود [۹]:

$$\frac{\partial(h_2 u_\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial(h_1 u_\theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{u_\eta}{h_1} \frac{\partial u_\theta}{\partial \eta} + \frac{u_\theta}{h_2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -\frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \frac{1}{\text{Re}_D} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 &= 0 \\ 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$\frac{v_0}{\delta} U(s) a_1 = U(s) U'(s) + 2 \frac{v}{\delta^2} U(s) a_2$
با حل دستگاه معادلات فوق، ضرایب مجهول به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{12v + \delta^2 U'}{v_0 \delta + 6v} \\ a_2 &= \frac{3\delta(2v_0 - \delta U')}{v_0 \delta + 6v} \\ a_3 &= -\frac{8v_0 \delta + 12v - 3\delta^2 U'}{v_0 \delta + 6v} \\ a_4 &= \frac{3v_0 \delta + 6v - \delta^2 U'}{v_0 \delta + 6v} \end{aligned} \quad (23)$$

در معادلات حاصل در بالا، از v در صورت و مخرج فاکتور گرفته و با

تعریف $M = \frac{\delta v_0}{v}$ به عنوان ترم مکش و $\lambda = \frac{\delta^2}{v} \frac{dU(s)}{ds}$ به عنوان ترم فشار می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\lambda + 12}{M + 6} \\ a_2 &= \frac{3(2M - \lambda)}{M + 6} \\ a_3 &= \frac{-8M + 3\lambda + 12}{M + 6} \\ a_4 &= \frac{3M - \lambda + 6}{M + 6} \end{aligned} \quad (24)$$

در این صورت توزیع سرعت به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{1}{M + 6} [\lambda F(\eta_H) + MG(\eta_H) + K(\eta_H)] \quad (25)$$

که در آن:

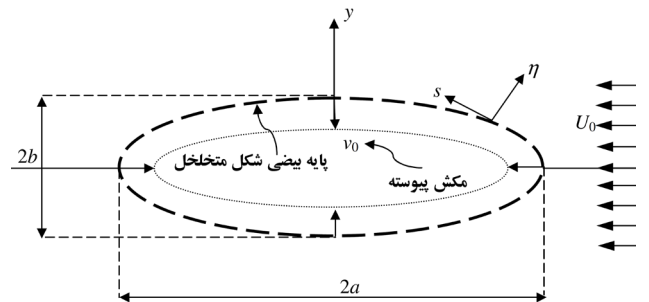
$$\begin{aligned} F(\eta_H) &= \eta_H - 3\eta_H^2 + 3\eta_H^3 - \eta_H^4 \\ K(\eta_H) &= 12\eta_H - 12\eta_H^3 + 6\eta_H^4 \\ G(\eta_H) &= 6\eta_H^2 - 8\eta_H^3 + 3\eta_H^4 \end{aligned}$$

با بدست آوردن پروفیل سرعت، می‌توان پارامترهای ضخامت جابجایی و ضخامت مومنتوم، همچنین تنش برشی و ضریب دراگ را به صورت زیر به دست آورد:

$$\delta_1 = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U(s)}\right) d\eta_H = \frac{\delta}{20} \frac{8M + 36 - \lambda}{M + 6} \quad (26)$$

$$\delta_2 = \delta \int_0^1 \frac{u}{U(s)} \left(1 - \frac{u}{U(s)}\right) d\eta_H = \quad (27)$$

نشان داده شده است که بر روی دیواره آن روزهایی ایجاد شده و مکش ثابت v_0 دور تا دور آن از داخل اعمال می‌گردد. این استوانه درون جریان سیال با سرعت پتانسیل ثابت U_0 قرار گرفته است. چنانچه شعاع‌های بیضی با هم مساوی باشند یک دایره را تشکیل داده و چنانچه قطر کوچک آن برابر صفر شود یک صفحه تخت در مسیر جریان تشکیل می‌شود. در این بخش، روش‌های ارائه شده توسط محققین پیشین به منظور حل مسئله مکش ارائه می‌شود تا بتوان این روش‌ها را با روش تحلیلی تحقیق حاضر مقایسه نمود.



شکل ۱: استوانه بیضی شکل با مکش ثابت از داخل در جریان آب با سرعت ثابت

۳-۱- حل تحلیلی مسئله مکش لایه مرزی با استفاده از پروفیل سرعت پل هاوسن

پل هاوسن (۱۹۴۱)، پروفیل سرعت در لایه مرزی را فقط در حالت بدون مکش به صورت زیر ارائه نمود [۱۰]:

$$\frac{u}{U_\infty} = a_1 \eta_H + a_2 \eta_H^2 + a_3 \eta_H^3 + a_4 \eta_H^4 \quad (19)$$

که در آن $\eta_H = \frac{\eta}{\delta}$ و a_1, a_2, a_3 و a_4 ضرایبی هستند که با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند.

در صورتی که از معادله پل هاوسن برای توزیع سرعت استفاده و مکش بر مسئله اعمال گردد، شرایط مرزی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\text{if } \eta_H = 0 \Rightarrow u = 0, v = v_0$$

$$\text{and } v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_H} \right) = U U' + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_H^2} \right)$$

$$\text{if } \eta_H = 1 \Rightarrow u = U$$

$$\text{and } \frac{\partial u}{\partial \eta_H} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_H^2} = 0$$

با استفاده از چهار شرط مرزی فوق، چهار معادله و چهار مجهول حاصل می‌شود که با استفاده از آنها ضرایب a_1, a_2, a_3 و a_4 به دست خواهند آمد:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_H} = U(s) (a_1 + 2a_2 \eta_H + 3a_3 \eta_H^2 + 4a_4 \eta_H^3) \quad (20)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_H^2} = U(s) (2a_2 + 6a_3 \eta_H + 12a_4 \eta_H^2) \quad (21)$$

معادلات زیر از شرایط مرزی به دست می‌آیند:

که در آن $M = \frac{\delta v_0}{v}$ به عنوان ترم مکش و $\lambda = \frac{\delta^2}{v} \frac{dU(s)}{ds}$ به عنوان ترم فشار می‌باشد. با تعیین پروفیل سرعت، می‌توان تنش برشی و ضریب دراک اصطکاکی را به صورت زیر به دست آورد:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{\mu}{\delta} \frac{\partial u}{\partial \eta_H} \Big|_{\eta_H=0} \quad (32)$$

$$= \frac{\mu U(s)}{\delta} a_1 = \frac{\mu U(s)}{\delta} \frac{M\lambda + 12\lambda + 120}{M^2 + 12M + 60}$$

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_0^2} = \frac{2\nu U(s)}{\delta U_0^2} \frac{M\lambda + 12\lambda + 120}{M^2 + 12M + 60} \quad (33)$$

۳-۳- حل تحلیلی مسئله مکش لایه مرزی با تحلیل معادلات لایه مرزی در تحقیق حاضر

در تحقیقات پیشین مهم‌ترین گام در حل مسئله مکش، در دست داشتن فرضی درست از پروفیل سرعت برای لایه مرزی است. پل هاوسن پروفیل سرعت را یک معادله مرتبه چهار و جین در مطالعات خود آن را یک معادله مرتبه شش در نظر گرفت. با استفاده از این فرض و با استفاده از معادلات لایه مرزی، پارامترهای مجهول این روابط به دست می‌آیند. این پارامترها در بخش‌های قبل معرفی شدند. این فرضیات بر اساس تجارب و آزمایش‌های این محققین و محققین پیشین حاصل شده و در نتیجه با واقعیت‌های مورد بررسی تقریباً انطباق دارند. بنابراین این روابط می‌توانند به عنوان معیاری در تحقیقات بعدی به کارگرفته شوند. چنان که جین در سال ۱۹۵۹ رابطه خود را با رابطه پل‌هاوسن در سال ۱۹۲۱ مقایسه نموده است [۶]. در حل تحلیلی مسئله مکش لایه مرزی در اطراف پایه بیضوی در تحقیق حاضر، پروفیل سرعت نه با فرض بلکه با استفاده از حل معادلات دیفرانسیل لایه مرزی به دست می‌آید. بر اساس معادلات (۹) تا (۱۲) و با ترکیب آن‌ها معادله دیفرانسیل زیر حاصل می‌شود:

$$v \frac{d^2 u}{d\eta^2} - v_0 \frac{du}{d\eta} = UU' = f \quad (34)$$

این معادله یک معادله مرتبه دوی ناهمگن است که دارای یک جواب عمومی u_h و یک جواب خصوصی u_p می‌باشد. با استفاده از روش تغییر متغیر اگر u_1 و u_2 جواب‌های معادله همگن نظیر باشند، آنگاه جواب اختصاصی به صورت $u_p = k_1 u_1 + k_2 u_2$ است که k_1 و k_2 از معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial k_1}{\partial \eta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u_2 \\ f & u_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial k_2}{\partial \eta} = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & 0 \\ u_1 & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}} \quad (35)$$

جواب معادله همگن نظیر با تعیین رابطه مشخصه و تعیین ریشه‌های آن (که در اینجا، $r_1 = 0$ و $r_2 = \frac{v_0}{v} \eta$) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\delta}{1260} \frac{144M^2 + 12M\lambda - 48\lambda + 1872M - 5\lambda^2 + 5328}{(M+6)^2}$$

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = \frac{\mu}{\delta} \frac{\partial u}{\partial \eta_H} \Big|_{\eta_H=0} = \quad (28)$$

$$\frac{\mu U(s)}{\delta} a_1 = \frac{\mu U(s)}{\delta} \frac{\lambda + 12}{M + 6}$$

ضریب دراک اصطکاکی نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_0^2} = \frac{2\nu U(s)}{\delta U_0^2} \frac{\lambda + 12}{M + 6} \quad (29)$$

۳-۲- حل تحلیلی مسئله مکش لایه مرزی با استفاده از پروفیل سرعت جین

جین در سال ۱۹۵۹ پروفیل سرعت را برای جریان در لایه مرزی اطراف سیلندر بدون اثر مکش به صورت زیر ارائه نمود [۶]:

$$\frac{u}{U_0} = a_1 \eta_H + a_2 \eta_H^2 + a_3 \eta_H^3 + a_4 \eta_H^4 + a_5 \eta_H^5 + a_6 \eta_H^6 \quad (30)$$

که در آن $\eta_H = \frac{\eta}{\delta}$ ، $i=1, \dots, 6$ ، a_i ضرایبی هستند که با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند. با در نظر گرفتن شرایط مرزی زیر:

$$\text{if } \eta_H = 0 \Rightarrow u = 0, v = v_0$$

$$\text{and } v_0 \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_H} \right) = UU' + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_H^2} \right)$$

$$\text{and } v_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta_H^2} \right) = v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \eta_H^3} \right)$$

$$\text{if } \eta_H = 1 \Rightarrow u = U$$

$$\text{and } \frac{\partial u}{\partial \eta_H} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta_H^2} = 0$$

و اعمال پروفیل سرعت جین به مسئله مکش در لایه مرزی، یک دستگاه شش معادله و شش مجهول حاصل می‌شود که با استفاده از آن‌ها ضرایب $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ صورت زیر به دست می‌آیند:

$$a_1 = \frac{M\lambda + 12\lambda + 120}{M^2 + 12M + 60}$$

$$a_2 = \frac{30(2M - \lambda)}{M^2 + 12M + 60}$$

$$a_3 = \frac{10(2M - \lambda)}{M^2 + 12M + 60} \quad (31)$$

$$a_4 = \frac{5(-9M^2 + 4M\lambda - 36M + 12\lambda - 60)}{M^2 + 12M + 60}$$

$$a_5 = \frac{3(12M^2 - 5M\lambda + 64M - 20\lambda + 120)}{M^2 + 12M + 60}$$

$$a_6 = \frac{2(-5M^2 + 2M\lambda - 30M + 9\lambda - 60)}{M^2 + 12M + 60}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = U(s) \frac{v_0}{v} \left(\frac{v_0 + CvU'\delta}{v \left(e^{\frac{v_0 \delta}{v}} - 1 \right)} e^{\frac{v_0 \eta}{v}} \right) \quad (43)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0} = U(s) \frac{v_0^2 + CvU'\delta}{v^2 \left(e^{\frac{v_0 \delta}{v}} - 1 \right)}$$

با قرار دادن عبارات فوق در معادله (۴۱) مقدار C برابر $1/v$ به دست می‌آید. در نهایت معادله سرعت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{u(\eta)}{U(s)} = \frac{-v_0^2 + U'\delta v_0 - vU' e^{\frac{v_0 \eta}{v}} + vU'}{v_0^2 \left(e^{\frac{v_0 \delta}{v}} - 1 \right)} \quad (44)$$

$$+ \frac{v_0 - U'\delta}{v_0 \left(e^{\frac{v_0 \delta}{v}} - 1 \right)} e^{\frac{v_0 \eta}{v}} + \frac{U'}{v_0} \eta + \frac{vU'}{v_0^2}$$

برای محاسبه تنش برشی روی سطح می‌توان نوشت:

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = U(s) \rho \left(\frac{v_0 - U'\delta}{e^{\frac{v_0 \delta}{v}} - 1} + v \frac{U'}{v_0} \right) \quad (45)$$

همچنین ضریب دراگ و نیروی دراگ از روابط زیر به دست می‌آید:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} \quad (46)$$

$$D_f = \int \tau_w \cos \theta dA \quad (47)$$

مقادیر $U(s)$ و U' برای بیضی با رابطه (۱۸) به دست آمد. با قراردادن این مقادیر در رابطه (۴۴)، پروفیل سرعت برای بیضی حاصل می‌شود. به همین ترتیب با استفاده از روابط (۴۵) و (۴۷)، تنش برشی و نیروی دراگ برای مقطع دایره عبارت است از:

$$\tau_w = U_0 \rho \left(\frac{vU_0 \cos \theta (e^2 - 1)(1 + \varepsilon)}{v_0 (e^2 \cos^2 \theta - 1)^{3/2}} \right) \quad (48)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2}}$$

$$D_f = 2 \int \tau_w \cos \theta dA = \frac{2 \rho v U_0^2 (e^2 - 1)(1 + \varepsilon)}{v_0} \quad (49)$$

$$\times \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta}{(e^2 \cos^2 \theta - 1)^{3/2} \sqrt{(a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2}} r d\theta$$

در این رابطه، r شعاع انحنای بیضی در نقاط مختلف آن است که از رابطه

$$u_h = C_1 + C_2 e^{\frac{v_0 \eta}{v}} \quad (36)$$

با توجه به توضیحات داده شده در بالا، k_1 و k_2 عبارتند از:

$$k_1 = -\frac{Cv f}{v_0}, \quad k_2 = -\frac{Cv^2 f}{v_0^2} e^{-\frac{v_0 \eta}{v}} \quad (37)$$

که در آن C یک ضریب ثابت است. بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۳۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$u(\eta) = C_1 + C_2 e^{\frac{v_0 \eta}{v}} - \frac{Cv f}{v_0} - \frac{Cv^2 f}{v_0^2} e^{-\frac{v_0 \eta}{v}} \quad (38)$$

با اعمال شرایط مرزی ($u=0$; $\eta=0$ و $u=U(s)$; $\eta=\delta$) و حل دومعادله، دو مجهول حاصل، C_1 و C_2 به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$C_1 = \frac{U(s) \left[-v_0^2 - CvU'\delta v_0 + Cv^2 U' e^{\frac{v_0 \delta}{v}} - Cv^2 U' \right]}{v_0^2 \left(e^{\frac{v_0 \delta}{v}} - 1 \right)} \quad (39)$$

$$C_2 = \frac{U(s) [v_0 + CvU'\delta]}{v_0 \left(e^{\frac{v_0 \delta}{v}} - 1 \right)}$$

در معادلات فوق U برای دایره و بیضی از معادله (۱۸) تعیین می‌شود. در نهایت پروفیل سرعت به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{u(\eta)}{U(s)} = \frac{-v_0^2 - CvU'\delta v_0 + Cv^2 U' e^{\frac{v_0 \eta}{v}} - Cv^2 U'}{v_0^2 \left(e^{\frac{v_0 \delta}{v}} - 1 \right)} \quad (40)$$

$$+ \frac{v_0 + CvU'\delta}{v_0 \left(e^{\frac{v_0 \delta}{v}} - 1 \right)} e^{\frac{v_0 \eta}{v}} - C \frac{vU'}{v_0} \eta - C \frac{v^2 U'}{v_0^2} e^{-\frac{v_0 \eta}{v}}$$

علاوه بر معادله مومتوم در کل میدان جریان، معادله حرکت در دیوار نیز باید ارضا شود، بنابراین:

$$v_0 \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = U \frac{dU}{ds} + v \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0} \quad (41)$$

با استفاده از معادله (۴۰) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = U(s) \left(\frac{v_0 + CvU'\delta}{v \left(e^{\frac{v_0 \delta}{v}} - 1 \right)} e^{\frac{v_0 \eta}{v}} - \frac{CvU'}{v_0} \right) \quad (42)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = U(s) \left(\frac{v_0 + CvU'\delta}{v \left(e^{\frac{v_0 \delta}{v}} - 1 \right)} - \frac{CvU'}{v_0} \right)$$

زیر حاصل می‌شود:

$$\times \left[\frac{-v_0^2 + U'\delta v_0 - vU'e^{\frac{v_0}{v}\eta} + vU'}{v_0^2 \left(e^{\frac{v_0}{v}\delta} - 1 \right)} \eta + \dots + \left(\frac{v}{v_0} \right) \frac{v_0 - U'\delta}{v_0 \left(e^{\frac{v_0}{v}\delta} - 1 \right)} e^{\frac{v_0}{v}\eta} + \frac{1}{2} \frac{U'}{v_0} \eta^2 + \frac{vU'}{v_0^2} e^{-\frac{v_0}{v}\eta} \right] + \dots$$

$$\frac{v_0 \sqrt{a^2 - b^2} \text{EllipticE} \left(\cos \theta, \sqrt{-\frac{a^2 - b^2}{b^2}} \right)}{\sin \theta} \dots$$

$$\times \frac{\sqrt{\frac{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta + b^2}{b^2} (1 - b^2 \cos^2 \theta)}}{\sqrt{a^4 \cos^2 \theta - 2a^2 b^2 \cos^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta + a^2 b^2 - b^4}}$$

$$r = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - y'x''|} \quad (50)$$

که در آن $x = a \cos \theta$ و $y = b \sin \theta$ است و شعاع‌های بیضی هستند. برای محاسبه ضخامت جابه‌جایی می‌توان نوشت:

$$\delta_1 = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U(s)} \right) d\eta = \frac{2\delta v_0^2 e^{\frac{v_0}{v}\delta} - U'\delta^2 v_0 - 2v_0 v e^{\frac{v_0}{v}\delta} + 2vU'\delta e^{\frac{v_0}{v}\delta} - U'\delta^2 v_0 e^{\frac{v_0}{v}\delta} + 2v_0 v - 2vU'\delta}{2v_0^2 \left(e^{\frac{v_0}{v}\delta} - 1 \right)} \quad (51)$$

با قراردادن روابط مربوط به $U'(s)$ (رابطه ۱۸) در رابطه (۵۱)، ضخامت جابه‌جایی برای دایره و بیضی به دست می‌آید. برای محاسبه تابع جریان در یک بیضی با شعاع‌های بزرگ و کوچک a و b می‌توان نوشت:

$$v = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} \Rightarrow \quad (52)$$

$$\partial \psi = v_0 h_1 \frac{1}{\sqrt{(a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2}} \partial \theta$$

$$\partial \psi = v_0 \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \quad (53)$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{(a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2}} \partial \theta$$

$$\psi = -\frac{v_0 \sqrt{a^2 - b^2} \text{EllipticE} \left(\cos \theta, \sqrt{-\frac{a^2 - b^2}{b^2}} \right)}{\sin \theta} \quad (54)$$

$$\times \frac{\sqrt{\frac{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta + b^2}{b^2} (1 - b^2 \cos^2 \theta)}}{\sqrt{a^4 \cos^2 \theta - 2a^2 b^2 \cos^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta + a^2 b^2 - b^4}} + f(\eta)$$

که در آن تابع EllipticE به صورت زیر تعریف می‌شود و در نرم‌افزارهای ریاضی از جمله Maple قابل محاسبه است:

$$\text{EllipticE}(z, k) = \int_0^z \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt \quad (55)$$

تابع $f(\eta)$ نیز با توجه به رابطه مربوط به U و ψ بدست می‌آید. بنابراین با توجه به پروفیل سرعت حاصل برای بیضی و با در نظر گرفتن روابط (۱۸) و (۴۴) و روابط فوق، تابع جریان به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$u = -\frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \Rightarrow \quad (56)$$

$$\psi = -U(s) \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \dots$$

که در آن $U(s) = \frac{U_0 (1 + \varepsilon) \sin \theta}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}$ و

$$U' = \frac{U_0 (1 + \varepsilon) (e^2 - 1) \cos \theta}{(e^2 \cos^2 \theta - 1)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sqrt{(a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2}}$$

است.

۴- نتایج

اولین گام در جهت راستی آزمایشی نتایج حاصل از این تحقیق و به خصوص پروفیل سرعت به دست آمده از حل تحلیلی ارائه شده در مسئله مکش لایه مرزی در اطراف بیضی، تعمیم این روابط به حالت‌هایی است که قبل از این تحقیق حل تحلیلی آن ارائه شده است (دایره و صفحه تخت). در ادامه به بررسی این موضوع پرداخته می‌شود.

۴-۱- تعمیم روابط حاصل برای صفحه تخت و مقطع دایره

۴-۱-۱- محاسبه پروفیل سرعت و تنش برشی و نیروی دراگ

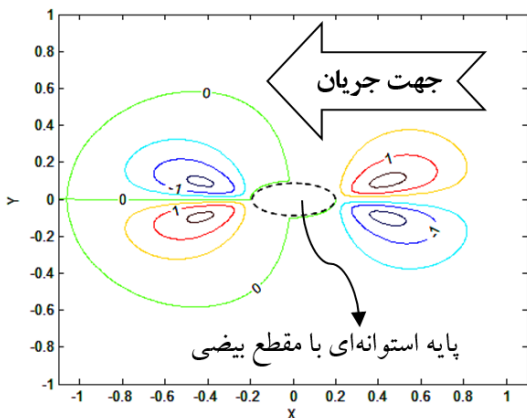
در لایه مرزی روی صفحه تخت

در صفحه تخت مقدار $U'(s)$ برابر صفر خواهد بود و $U(s) = U_0$ ؛ بنابراین با توجه به پروفیل سرعت حاصل در این تحقیق یعنی معادله (۴۴)، رابطه زیر برای صفحه تخت حاصل می‌شود:

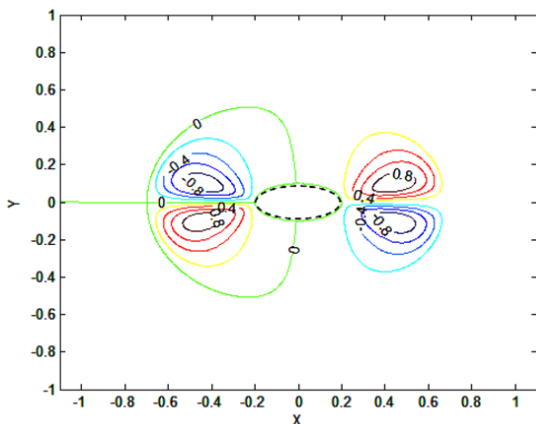
$$\frac{u(\eta)}{U(s)} = \frac{-1}{\left(e^{\frac{v_0}{v}\delta} - 1 \right)} + \frac{1}{\left(e^{\frac{v_0}{v}\delta} - 1 \right)} e^{\frac{v_0}{v}\eta} \quad (57)$$

با حد گرفتن از رابطه فوق هنگامی که ضخامت لایه مرزی به بینهایت میل می‌کند و در نظر گرفتن $(v_0 < 0)$ رابطه سرعت در لایه مرزی به صورت زیر بدست می‌آید:

بیضی، نتایج حاصل از این حل با معیار قراردادن تحقیقات ارائه شده در گذشته مورد بررسی قرار گرفته‌است. در این بخش جهت بررسی نتایج حاصل از حل تحلیلی، خروجی‌های کدنویسی شده در محیط نرم‌افزار متلب ارائه می‌شود. پارامترهای اولیه سیال و جریان شامل $\mu = 0.01$ و $\nu_0 = 0.001/0$ pa.s و U_0 برابر 0.8 متر بر ثانیه در نظر گرفته شده است. در ضمن در تمامی نتایج ارائه شده در ذیل جهت جریان از راست به چپ در نظر گرفته شده است. شکل‌های (۲) تا (۵)، پروفیل‌های سرعت حاصل از حل تحلیلی ارائه شده در این تحقیق و روش‌های پل‌هاوسن و جین که در بخش‌های ۳-۱ و ۳-۲ ارائه شد، را برای شرایط اولیه متفاوت نشان می‌دهند. شکل (۲) نتایج پروفیل‌های سرعت اطراف استوانه در حالت بدون مکش را ارائه می‌دهد و در شکل‌های (۳) تا (۵) به ترتیب نتایج حاصل از تحقیق حاضر در مقایسه با نتایج استفاده از تابع توزیع سرعت پل‌هاوسن و جین ارائه شده است. شکل‌های (۶) تا (۹)، نیز پروفیل‌های سرعت بدست آمده در تحقیق حاضر را برای مکش‌های متفاوت مقایسه می‌کنند. شکل (۶) نتایج تابع جریان اطراف استوانه با مقطع بیضی در حالت بدون مکش را نشان می‌دهد و در شکل‌های (۷) تا (۹) نتایج حاصل از تحقیق حاضر برای سرعت‌های مکش به ترتیب 0.1 ، 0.5 ، 0.8 و 1.0 متر بر ثانیه نسبت به سرعت جریان پتانسیل و سرعت جریان ایده‌آل 0.8 متر بر ثانیه



شکل ۲: پروفیل سرعت بدون مکش حول بیضی $a=0.2$ و $b=0.1$ متر، سرعت پتانسیل 0.8 متر بر ثانیه با استفاده از رابطه بدست آمده در تحقیق حاضر



شکل ۳: پروفیل سرعت با مکش حول بیضی $a=0.2$ و $b=0.1$ متر، سرعت پتانسیل 0.8 متر بر ثانیه با استفاده از رابطه بدست آمده در تحقیق حاضر با مکش 0.1 سرعت پتانسیل

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} u(\eta) = U(s) \left(1 - e^{-\frac{\nu_0 \eta}{\nu}} \right) \quad (58)$$

$$\Rightarrow u(\eta) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{\nu_0 \eta}{\nu}} \right)$$

در واقع رابطه‌ی حاصل همان رابطه‌ای است که در نتیجه‌ی حل تحلیلی مسئله مکش اطراف صفحه تخت که به طور افقی در مسیر جریان قرار دارد، توسط مرجع [۱] ارائه شده است. با استفاده از روابط (۴۵) تا (۴۷) تنش برشی و نیروی دراگ برای صفحه تخت عبارت است از:

$$\tau_w = U_0 \rho \left(\frac{\nu_0}{e^{\frac{\nu_0 \eta}{\nu}} - 1} \right) \xrightarrow{\delta \rightarrow \infty, \nu_0 \rightarrow 0} \tau_w = U_0 \rho (-\nu_0) \quad (59)$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = \frac{U_0 \rho (-\nu_0)}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = 2 \left(-\frac{\nu_0}{U_0} \right)$$

$$D_f = \int \tau_w \cos \theta dA = b \int_0^l U_0 \rho (-\nu_0) dx = -\rho U_0 \nu_0 b l$$

تخت به دست آورده‌اند و در مرجع [۱] ارائه شده است.

۴-۱-۲- محاسبه پروفیل سرعت و تنش برشی و نیروی دراگ در لایه مرزی روی دایره

در دایره مقدار با توجه به رابطه (۱۸) برابر $2U_0 \cos \theta / R$ و همچنین با توجه به اینکه $U(s) = 2U_0 \sin \theta$ ، با قرار دادن این مقادیر در رابطه (۴۴) پروفیل سرعت برای دایره به دست می‌آید. به همین ترتیب با استفاده از روابط (۴۵) تا (۴۷)، تنش برشی و نیروی دراگ برای مقطع دایره عبارت

$$\tau_w = U_0 \rho \left(\frac{\nu U'}{\nu_0} \right) = U_0 \rho \left(\frac{2\nu U_0 \cos \theta}{R\nu_0} \right) \quad (60)$$

$$C_f = 2 \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_0^2} = \frac{8\nu}{R\nu_0} \cos \theta$$

$$D_f = 2 \int \tau_w \cos \theta dA = \frac{4\rho \nu U_0^2}{R\nu_0} R b \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \frac{2\rho \pi b \nu U_0^2}{\nu_0}$$

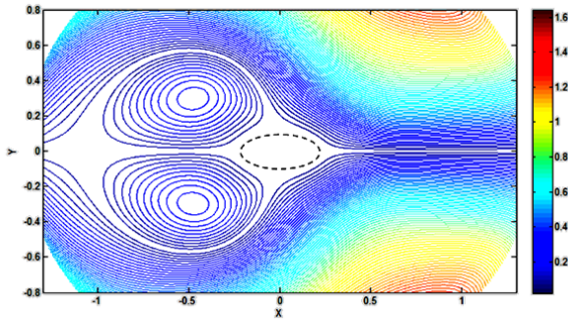
است از:

این روابط نیز مشابه روابط ارائه شده در مرجع [۱] می‌باشند.

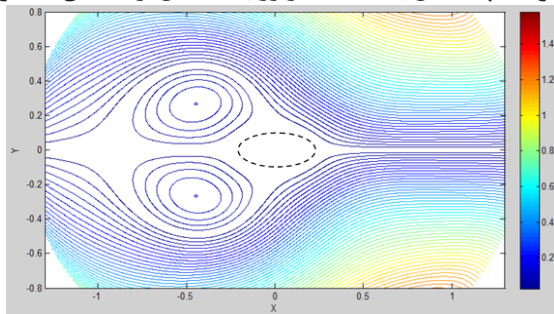
انطباق نتایج حاصل از تعمیم حل تحلیلی ارائه شده برای مقطع بیضی در این تحقیق به دایره و صفحه تخت در اولین گام بیانگر آن است که روابط حاصل از حل تحلیلی از دقت مناسبی برخوردار هستند.

۴-۲- مقایسه نتایج حل تحلیلی در تحقیق حاضر و تحقیقات گذشته

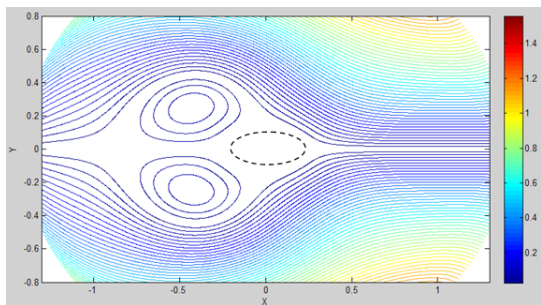
جهت راستی‌آزمایی حل تحلیلی مسئله مکش لایه مرزی اطراف پایه با مقطع



شکل ۷: خطوط جریان حول بیضی $a=0.2$ و $b=0.1$ متر، سرعت پتانسیل 0.8 متر بر ثانیه با مکش 0.1 سرعت پتانسیل با استفاده از روابط حاصل از تحقیق حاضر



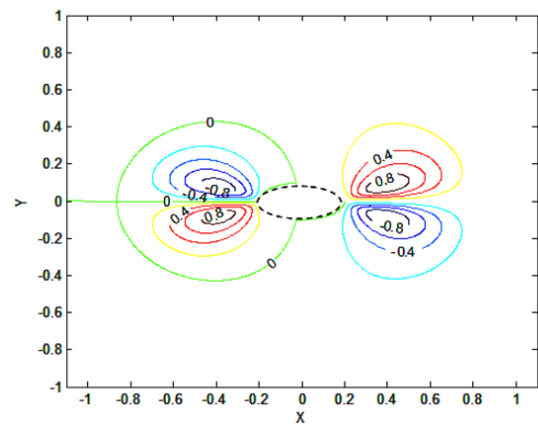
شکل ۸: خطوط جریان حول بیضی $a=0.2$ و $b=0.1$ متر، سرعت پتانسیل 0.8 متر بر ثانیه با مکش 0.05 سرعت پتانسیل با استفاده از روابط حاصل از تحقیق حاضر



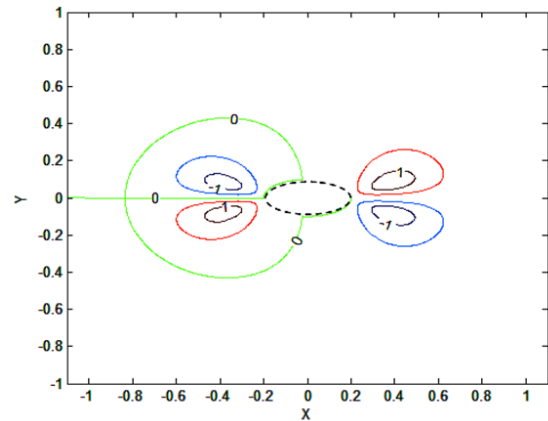
شکل ۹: خطوط جریان حول بیضی $a=0.2$ و $b=0.1$ متر، سرعت پتانسیل 0.8 متر بر ثانیه با مکش 0.08 سرعت پتانسیل با استفاده از روابط حاصل از تحقیق حاضر

ندارد محدوده تأثیر گردابه‌ها بیشتر از هنگامی است که مکش وجود دارد. این مهم در هر یک از شکل‌های (۳ تا ۵) در مقایسه با شکل (۲) قابل مشاهده است. شکل‌های (۶ تا ۹) برای بررسی تأثیر مکش بر روی سرعت و محدوده تأثیر گردابه‌ها ارائه شده‌اند. با توجه به این شکل‌ها می‌توان به این نکته پی برد که هر چه مکش بیشتر می‌شود، محدوده تأثیر گردابه‌ها کمتر شده و سریعتر به سرعت پتانسیل می‌رسد و این همان مفهوم کنترل لایه مرزی است. جهت بررسی کمی نتایج، از دو معیار نکویی برازش یا ضریب تخمین r^2 که توسط لیگیتس و مک کیب در سال ۱۹۹۹ و معیار تطابق که توسط ویلمات و همکاران در سال ۱۹۸۵ ارائه شد، استفاده

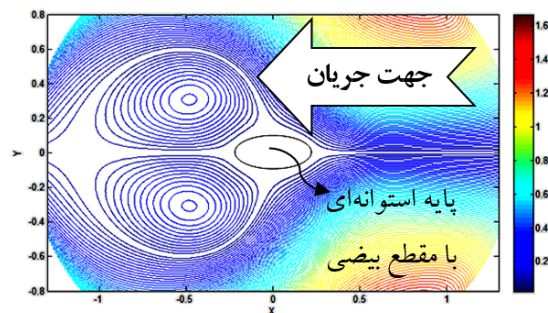
$$r^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O})(P_i - \bar{P})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (O_i - \bar{O})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (P_i - \bar{P})^2}} \quad (61)$$



شکل ۴: پروفیل سرعت با مکش حول بیضی $a=0.2$ و $b=0.1$ متر، سرعت پتانسیل 0.8 متر بر ثانیه با استفاده از رابطه پل‌هاوسن با مکش 0.1 سرعت پتانسیل



شکل ۵: پروفیل سرعت با مکش حول بیضی $a=0.2$ و $b=0.1$ متر، سرعت پتانسیل 0.8 متر بر ثانیه با استفاده از رابطه جین با مکش 0.1 سرعت پتانسیل



شکل ۶: خطوط جریان حول بیضی $a=0.2$ و $b=0.1$ متر، سرعت پتانسیل 0.8 متر بر ثانیه بدون مکش با استفاده از روابط حاصل از تحقیق حاضر

ارائه شده‌است.

شکل‌های فوق در مقیاس و محدوده یکسان برای مقایسه کیفی روابط ارائه شده در تحقیق حاضر و روابط حاصل از تحقیقات پیشین ارائه شده‌اند. همچنین تأثیر مکش و کم‌شدن محدوده تأثیر گردابه‌ها در اثر مکش نیز در این شکل‌ها قابل مشاهده است. شکل‌های (۲ تا ۵) برای مقایسه کیفی رابطه خط جریان در تحقیق حاضر و تحقیقات قبلی برای مکش برابر یک درصد سرعت پتانسیل ارائه شده‌است. هنگامی که مکش وجود

شده‌است [۱۱ و ۱۲]. این روابط به صورت زیر تعریف می‌شوند:

که در آن O داده‌های مشاهده‌ای یا پایه جهت مقایسه و P داده‌های پیش‌بینی شده یا تخمین زده شده هستند. \bar{O} و \bar{P} نیز میانگین داده‌های

$$d = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (O_i - P_i)^2}{\sum_{i=1}^n (|P_i - \bar{O}| + |O_i - \bar{O}|)^2} \quad (62)$$

مذکور می‌باشند. همچنین معیار تطابق d به صورت زیر تعریف می‌شود: حدود تغییرات ضریب تخمین از -۱ تا ۱ است و هر چه مقادیر این ضریب به ۱ نزدیکتر باشد، بدان معناست که داده‌های مورد مقایسه همسویی و تناسب بهتری نسبت به هم دارند. همچنین حدود تغییرات ضریب تطابق از صفر تا یک تغییر می‌کند که هرچه این ضریب به یک نزدیکتر باشد حاکی از تطابق بهتر داده‌های مورد مقایسه است. جدول (۱) نتایج حاصل از بررسی این معیارها را جهت مقایسه کمی نتایج حاصل از روابط به‌دست آمده در تحقیق حاضر و تحقیقات پل‌هاوسن و جین نشان می‌دهد. نتایج ارائه شده در جدول (۱) نشان می‌دهد که رابطه سرعت حاصل از روش تحلیلی در تحقیق حاضر تطابق خوبی با روش‌های ارائه‌شده توسط جین

و پل‌هاوسن دارد. همچنین نتایج حاصل از پروفیل سرعت به‌دست آمده در تحقیق حاضر با نتایج روش پل‌هاوسن نسبت به روش جین تطابق و همبستگی بیشتری دارد.

به طور کلی با توجه به نتایج حاصل از تعمیم روابط مربوط به حل تحلیلی مسئله مکش در اطراف بیضی به صفحه تخت و دایره، همچنین با دقت در نتایج این بخش و شکل‌های فوق نتایج زیر حاصل می‌شوند:

- رابطه ارائه‌شده در این تحقیق تطابق خوبی نسبت به پروفیل سرعت پل‌هاوسن و جین داشته و این تطابق و همبستگی به رابطه حاصل از روش پل‌هاوسن نزدیک‌تر است. این نشان می‌دهد که این رابطه به عنوان یک حل تحلیلی از مسئله مکش می‌تواند در مسائل به کار برده شود. لازم به ذکر است که پروفیل سرعت در تحقیقات قبلی با فرض یک معادله مرتبه چهارم یا مرتبه شش حاصل می‌شود ولی در تحقیق حاضر پروفیل سرعت مستقیماً با حل معادله دیفرانسیل حاصل از معادله پیوستگی و معادلات ناویراستوکس به‌دست آمده‌است.
- هرچند نتایج حاصل از تحقیق حاضر و تحقیقات گذشته که در یک مورد خاص در شکل‌های (۳) تا (۵) به نمایش درآمده، بسیار به هم

جدول ۱: مقایسه کمی پروفیل سرعت حاصل از روش تحلیلی در تحقیق حاضر با تحقیقات جین و پل‌هاوسن برای پایه بیضی شکل به عرض ۰/۱ و طول ۰/۲ متر و در جریان با سرعت پتانسیل ۰/۸ متر بر ثانیه

توضیحات	ماتریس معیار تطابق			ماتریس معیار تخمین			رابطه سرعت	سرعت مکش نسبت به سرعت جریان	نوع سیال و لزجت دینامیکی
	پل‌هاوسن	جین	تحقیق حاضر	پل‌هاوسن	جین	تحقیق حاضر			
شکل (۳)	۰/۹۶۸	۰/۸۹۸	۱	۰/۸۹۴	۰/۸۵۱	۱	تحقیق حاضر		آب
شکل (۵)	۰/۹۶۳	۱	۰/۸۹۸	۰/۹۹۵	۱	۰/۸۵۱	جین	۰/۰۱	1×10^{-6}
شکل (۴)	۱	۰/۹۶۳	۰/۹۶۸	۱	۰/۹۹۵	۰/۸۹۴	پل‌هاوسن		
-	۰/۹۶۰	۰/۸۹۳	۱	۰/۸۶۹	۰/۸۴۱	۱	تحقیق حاضر		آب
-	۰/۹۶۴	۱	۰/۸۹۳	۰/۹۹۱	۱	۰/۸۴۱	جین	۰/۰۵	1×10^{-6}
-	۱	۰/۹۶۴	۰/۹۶۰	۱	۰/۹۹۱	۰/۸۶۹	پل‌هاوسن		
-	۰/۹۴۶	۰/۸۸۵	۱	۰/۸۳۱	۰/۸۲۶	۱	تحقیق حاضر		آب
-	۰/۹۶۵	۱	۰/۸۸۵	۰/۹۸۶	۱	۰/۸۲۶	جین	۰/۰۸	1×10^{-6}
-	۱	۰/۹۶۵	۰/۹۴۶	۱	۰/۹۸۶	۰/۸۳۱	پل‌هاوسن		
-	۰/۹۶۹	۰/۹۰۰	۱	۰/۸۹۴	۰/۸۵۲	۱	تحقیق حاضر		هوا
-	۰/۹۶۲	۱	۰/۹۰۰	۰/۹۹۵	۱	۰/۸۵۲	جین	۰/۰۱	$1/51 \times 10^{-5}$
-	۱	۰/۹۶۲	۰/۹۶۹	۱	۰/۹۹۵	۰/۸۹۴	پل‌هاوسن		
-	۰/۹۶۰	۰/۸۹۳	۱	۰/۸۶۸	۰/۸۴۱	۱	تحقیق حاضر		هوا
-	۰/۹۶۳	۱	۰/۸۹۳	۰/۹۹۱	۱	۰/۸۴۱	جین	۰/۰۵	$1/51 \times 10^{-5}$
-	۱	۰/۹۶۳	۰/۹۶۰	۱	۰/۹۹۱	۰/۸۶۸	پل‌هاوسن		
-	۰/۹۴۶	۰/۸۸۵	۱	۰/۸۳۰	۰/۸۲۶	۱	تحقیق حاضر		هوا
-	۰/۹۶۵	۱	۰/۸۸۵	۰/۹۸۵	۱	۰/۸۲۶	جین	۰/۰۸	$1/51 \times 10^{-5}$
-	۱	۰/۹۶۵	۰/۹۴۶	۱	۰/۹۸۵	۰/۸۳۰	پل‌هاوسن		

ارائه نشده است و دوم اینکه محققین قبلی با فرض اینکه پروفیل سرعت، یک معادله درجه چهار (روش پل هاوسن) یا شش (روش جین) باشد روابط تقریبی را برای حل این مسائل به دست آورده و با انجام مطالعات آزمایشگاهی، روابط خود را کالیبره نموده اند.

در تحقیق حاضر حل تحلیلی مسئله مکش لایه مرزی اطراف یک سیلندر بیضوی مورد بررسی قرار گرفته و برای صحت سنجی نتایج مربوط به پروفیل سرعت، ابتدا روابط در حالات حدی برای صفحه تخت و مقطع دایره ای محاسبه و با نتایج موجود از تحقیقات پیشین مقایسه شد. همچنین نتایج روابط حاصل از تحقیقات محققین قبلی با نتایج حاصل از حل تحلیلی حاضر در قالب رسم پروفیل های سرعت به صورت کیفی و در قالب جدول جهت مقایسه نتایج حاصل در چند مورد خاص با استفاده از معیارهای تخمین و تطابق به صورت کمی مقایسه شد. نتایج حاکی از کارآمد بودن روش ارائه شده در تحقیق حاضر است. همچنین براساس نتایج کمی مشخص شد که نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج حاصل از روش پل هاوسن تطابق بیشتری دارد.

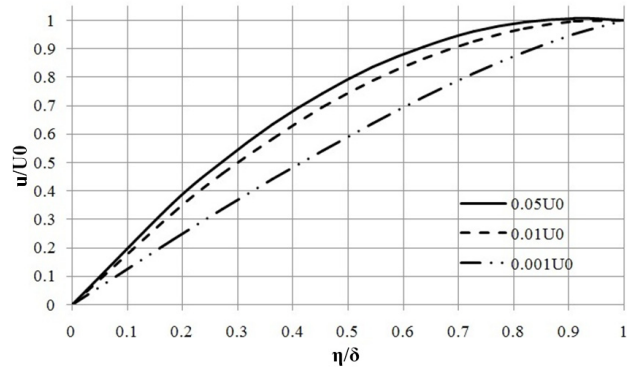
حل تحلیلی در تحقیق حاضر، می تواند با دقت بالایی نسبت به روش های قبلی، پروفیل سرعت در اطراف مقطع بیضی را ارائه دهد. چرا که پروفیل سرعت در تحقیقات قبلی با فرض یک معادله مرتبه چهار یا مرتبه شش حاصل شده است، ولی در این تحقیق پروفیل سرعت مستقیماً با حل معادله دیفرانسیل حاصل از معادله پیوستگی و معادلات ناویراستوکس به دست آمده است.

در پایان نشان داده شد که با اعمال مکش در لایه مرزی، ضخامت لایه مرزی کاهش یافته و خطوط جریان به بدنه جسم نزدیک می شوند. بدین ترتیب جدایش یا به طور کامل حذف شده و یا در محل دورتری نسبت به حالت بدون مکش اتفاق می افتد. در صورت استفاده از این روش برای کنترل لایه مرزی، با حذف یا کوچک نمودن محدوده جدایش و از بین بردن گردابه های وون-کارمن می توان، میزان آب شستگی اطراف پایه پل ها را کاهش داد.

نتیجه گیری قطعی در خصوص میزان کارایی مکش در شرایط واقعی مستلزم بررسی های آزمایشگاهی و میدانی است که موضوع تحقیقات آتی محققین این مقاله خواهد بود.

۶- مراجع

- [1] Schlichting, H., "Boundary Layer Theory", 8th ed., McGraw-Hill, New York, 1979.
- [2] Brodetsky, S. "Discontinuous fluid motion past circular and elliptic cylinders", Proc. Roy. Soc., A. 102, 542, 1923.
- [3] Forenberg, B., "a Numerical Study of Steady Viscous Flow Past a Circular Cylinder", J. Fluid Mechanic, vol. 98, par 14, pp. 819-855, 1980.
- [4] Behr, M., Hastreiter, D., Mittal, M. and Tezduyar,



شکل ۱۰: پروفیل سرعت در نقطه $\theta=90^\circ$ روی بیضی با استفاده از روابط حاصل از تحقیق حاضر به ازای مکش های مختلف

نزدیک است، لیکن به علت اینکه پروفیل سرعت حاصل از این تحقیق بدون اعمال فرضی به دست آمده است، می تواند به عنوان یک رابطه دقیق برای سرعت مورد استفاده قرار گیرد در حالی که استفاده از پروفیل سرعت ارائه شده توسط محققین پیشین در واقع یک حل تقریبی از مسئله مکش را ارائه می دهد.

با استفاده از رابطه کلی بدست آمده در تحقیق حاضر، می توان سرعت را در مسئله مکش برای سایر شکل ها مثل صفحه تخت و دایره نیز به عنوان حالات خاصی از این حل به دست آورد. بررسی نتایج برای حالات حدی صفحه تخت و مقطع دایره و مقایسه با روابط موجود برای این دو حالت می تواند بیانگر دقت حل ارائه شده در این تحقیق باشد.

یکی دیگر از نکات حائز اهمیت این تحقیق وجود مکش و فواید آن در پایه قرار گرفته در مسیر جریان است. شکل (۱۰) پروفیل سرعت بدست آمده در این تحقیق را در نقطه $\theta=90^\circ$ روی بیضی به ازای فاصله از سطح آن نشان می دهد. با توجه به شکل فوق، هرچه مکش لایه مرزی در سطح بیضی بیشتر می شود، پروفیل سرعت زودتر به سرعت پتانسیل می رسد و این به این مفهوم است که ضخامت لایه مرزی کمتر شده است. بنابراین با مقایسه پروفیل های سرعت و توابع جریان در شکل های (۳) تا (۱۰) می توان دریافت که در اثر مکش، ضخامت لایه مرزی کاهش یافته و در واقع مکش در لایه مرزی باعث می شود تا خطوط جریان به بدنه جسم نزدیک شده و جدایش یا به طور کامل حذف شود و یا در محل دورتری نسبت به حالت بدون مکش اتفاق بیفتد. همچنین همانطور که در شکل های (۶) تا (۹) مشاهده می شود، در اثر مکش محدوده تأثیر گردابه ها کمتر می شود.

۵- نتیجه گیری

در این تحقیق روابط مربوط به جریان و مکش لایه مرزی روی مقطع بیضی به صورت تحلیلی ارائه شد. در همه موارد فرض بر آن شد که جسم در یک جریان پتانسیل به اندازه کافی گسترده قرار دارد. در اینجا ذکر دو نکته حائز اهمیت است: اول اینکه تاکنون حل کاملاً تحلیلی این مسئله

- Suction”, *Adv. Theor. Appl. Mech.*, Vol. 1, No. 3, 187-198, 2008.
- [9] Khan, W. A., “Modeling of Fluid Flow and Heat Transfer for Opti-mization of Pin-Fin Heat Skins”, Ph.D. thesis, Department of Me-chanical Engineering, University of Waterloo, Canada, 2004.
- [10] Torda, T. P., “Boundary Layer Control by Distributed Surface Suction or Injection Bi-Parametric General Solution”. *Journal of mathematics and physics*, 31, 206-213, 1952.
- [11] Legates, D.R., and McCabe, G.J. (1999). “Evaluating the use of “goodness-of-fit” measures in hy-drologic and hydroclimatic model validation.” *Water Resources Re-search j.*, Vol. 35, No. 1, 233-241.
- [12] Willmott, C.J., Ackleson, S.G., Davis, R.E., Feddema, J.J., Klink, K.M., Legates, D.R., O’Donnell, J., and Rowe, C.M. (1985). “Sta-tistics for the evaluation and com-parison of models.” *Geophysics Research Journal*, 90, 8995-9005.
- T.E., “Incom-pressible Flow Past a Circular Cylinder Dependence of the Com-puted Flow Field on the Location of the Lateral Boundaries”, *Com-puter Methods in Applied Me-chanics and Engineering*, No. 316, pp.123 309, 1995.
- [5] Leea, S.J., Leea, S.I. and Parkb, C.W., “Reducing the Drag on a Circular Cylinder by Upstream Installation of a Small Control Rod”, *Fluid Dynamics Research*, No.34, pp.233–250, 2004.
- [6] Jain, A. C., “On Boundary Layer Control by Continuous Suction”, *Proc. nat. Inst. Sci. India*26, A, No. 3, 1960.
- [7] Pohlhausen, K., “Zur N`aherungsweise Integration der Differential Gleichung der Laminaren Reibungschicht” *Zeitschrift für angewandte Math-ematic und Mechanic*, Vol. 1, pp. 252-268, 1921.
- [8] Nahoui, A., Kabouche, N., Bahi, L., “Control of the Laminar Boundary Layer around a Profile by