

A Comparison between the Performance of RBF-MQ Method and Cell-Centered Finite Volume Method in Solving 2d Wave Equation

Nasrin Tavakoli¹ , Majid Akbari² , Reza Babaee¹ , Ehsan Jabbari¹ * 

¹ Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

² Shahid Nikbakht Faculty, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran.

ABSTRACT: In this study, the performance of the multi-quadratic radial basis function (RBF-MQ) method is compared with the cell-centered finite volume method (FVM-CC) for solving the two-dimensional second-order wave equation. The wave equation describes wave propagation, such as sound waves, and relates the second derivatives in time and space to the wave speed. The finite volume method and radial basis function method are among the techniques used for modeling partial differential equations, such as the wave equation, in complex geometries. To compare the efficiency of these two methods, the finite volume method is first formulated based on triangular cell-centered volumes. The radial basis function superposition method is also developed using a multiquadric function for scattered points. Finally, time discretization is carried out using the explicit Euler method. The comparison of the performance and capabilities of both methods is made by performing several numerical tests on different geometries, initial and boundary conditions, scattered points, shape variables, and processing time for each method. For a more quantitative comparison, an analytical solution of the wave equation is obtained using the method of separation of variables for a simple rectangular geometry with specified initial and boundary conditions. The results of this study indicate lower computational cost and better efficiency of the multiquadric radial basis function method compared to the cell-centered finite volume method. However, the RBF-MQ method strongly depends on the shape parameter and the selected scattered point distribution. Additionally, the FVM-CC method provides higher relative accuracy compared to RBF-MQ, regardless of the shape parameter and selected scattered point distribution.

Review History:

Received: Mar. 11, 2025

Revised: Feb. 16, 2026

Accepted: Jul. 09, 2026

Available Online: Aug. 04, 2026

Keywords:

Two-Dimensional Wave Equation

Finite Volume Method

Multiquadric Radial Basis Function Method

Cell-Centered Method

Meshless Method

1- Introduction

Partial Differential Equations (PDEs) are widely used in physics, engineering, finance, biology, and other fields to model various phenomena. PDEs can be classified into elliptic, parabolic, and hyperbolic, depending on their properties such as diffusion, or wave-like behavior. Hyperbolic equations are suitable for simulating dynamic phenomena with wave-like behavior like flow propagation. Examples include Euler equations, shallow water equations, and classical wave equations. Due to the complexity of the 2d hyperbolic equations, numerical methods like finite difference and finite volume are often used for their solution. Among these, the finite volume method such as the cell-centered approach, is common for solving hyperbolic equations, offering flexibility in dealing with complex geometries [1-2]. Meshless methods like the radial basis function (RBF) method have recently gained attention for their simplicity and low computational cost, representing the domain using points and solutions using RBFs. However, meshless methods face solvability issues and heavily rely on the shape parameter and distribution of

collocation points [3-4]. This article aims to quantitatively compare the costs, accuracy, and efficiency of RBF-MQ and FVM-CC methods for solving 2d wave equations. The study includes analyzing the behavior and performance of meshless and mesh-based methods, estimating accuracy using L_2 and L_∞ error norms, sensitivity to the shape parameter and the distribution of data in complex geometries, and calculating CPU runtime for each method.

2- Methodology

The finite volume method can be derived through the integral form of the conservation law. In this study, for numerical discretization of the domain, the cell-centered technique with structured and unstructured triangular grids is used (Figure 1). The cell-centered approach is known for its better performance when compared to the node-centered one. To determine the numerical fluxes at the cell boundaries, the second-order 2d wave equation is rewritten as a system of two first-order partial differential equations in 2d form. Then a first-order FVM-CC scheme based on a

*Corresponding author's email: e.jabbari@qom.ac.ir

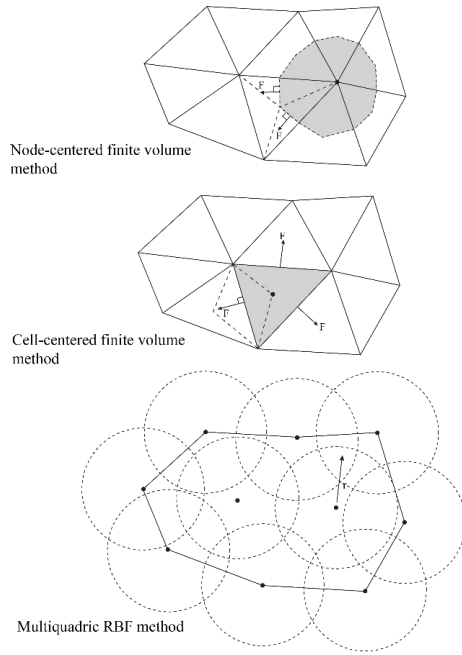


Fig. 1. Discretization of node-centered finite volume method, cell-centered finite volume method, and multi-quadric radial basis function method.

triangular cell-centered grid is used for solving the PDEs. The radial basis function collocation method established here utilizes multiquadric RBFs for scattered nodes (Figure 1). To develop the RBF method for the spatial term, a semi-discrete approach is utilized. The semi-discrete equation is interpolated using a basis function, and then the estimated values are updated in subsequent time steps by applying an explicit time marching scheme. Interpolation using RBFs provides higher accuracy and flexibility compared to other basis functions such as least squares methods. Radial basis functions commonly used include Gaussian, thin plate spline, multiquadric, and inverse multiquadric functions. Among these functions, the multiquadric function is employed in this study due to the higher accuracy. For both the cell-centered finite volume method and the multiquadric radial basis function developed here, the temporal discretization is then performed using the explicit Euler scheme. Moreover, for quantitative comparison, an analytical solution of the wave equation for a simple rectangular geometry with specified initial and boundary conditions is obtained using the method of separation of variables.

3- Results and Discussion

To compare the efficiency and the accuracy of the FVM-CC and RBF-MQ, several numerical tests for various geometries and different initial and boundary conditions, considering the distribution of scattered data, shape parameters, and processing runtimes are conducted. The first experiment concerns the quantitative comparison of both

Table 1. Numerical errors and performances of CC finite volume and radial basis function methods.

Test cases	method	Numerical errors and performances	
		MAPE %	CPU runtime (s)
1-a	FDM-LF	6.94	0.025
	FVM-CC	8.96	1.144
	RBF-MQ	9.70	0.109
1-b	FDM-LF	5.07	0.038
	FVM-CC	6.98	1.541
	RBF-MQ	7.74	0.156
2	FVM-CC	5.41	1.549
	RBF-MQ	6.42	0.172
3	FVM-CC	6.07	1.527
	RBF-MQ	7.68	0.167
4	FVM-CC	5.52	1.119
	RBF-MQ	7.02	0.122

methods with the analytical solution of the wave equation obtained using the method of separation of variables. For this experiment, a square-shaped domain is used. Two Gaussian and sinusoidal-like initial conditions are applied and Dirichlet boundary type with zero values is imposed. Table 1 presents numerical errors and computational times for FVM-CC and RBF-MQ. The FVM-CC exhibits higher error compared to the finite difference method (on Cartesian grid) and RBF-MQ (with optimal shape parameter). The RBF-MQ's sensitivity to the shape parameter is shown; for certain shape parameter values, its error exceeds FVM-CC. The stability and accuracy of RBF-MQ depend on the shape parameter. The FVM-CC's accuracy is affected by cell-centered value approximation, making it less accurate than FDM. Its stability, however, relies solely on the Courant number. The FVM-CC displays higher computational costs than FDM and RBF-MQ.

For further experimentation of these methods in complex domains, the flow field in a two squared-shape with cut-outs and annulus membranes, is modeled. Additionally, for better comparison, a reference solution using a finer mesh is generated. The accuracy and computational costs for each method are reported in Table 1. The runtime for the FVM-CC is higher compared to RBF-MQ, indicating lower computational costs for the latter. The accuracy of RBF-MQ depends on the chosen shape parameter.

4- Conclusion

The results of this study indicate that the RBF-MQ leads to lower computational costs and consequently exhibits

better efficiency compared to the FVM-CC. However, the RBF-MQ is highly dependent on the shape parameter and the distribution of collocation points. Overall, the FVM-CC shows relatively better accuracy compared to RBF-MQ regardless of the shape parameter and the selected collocation points.

References

- [1] M. Akbari, B. Pirzadeh, Preserving stationary discontinuities in two-layer shallow water equations with a novel well-balanced approach, *Journal of Hydroinformatics*, 25(5) (2023) 1979-2003. <https://doi.org/10.2166/hydro.2023.312>
- [2] H. Kahid Basiri, R. Babaei, A. Fallah, E. Jabbari, Development of multiquadric method for solving dam break problem, *Journal of Hydraulics*, 14(4) (2020) 83-98. <https://doi.org/10.30482/jhyd.2020.105500>
- [3] M. Akbari, B. Pirzadeh, Implementation of exactly well-balanced numerical schemes in the event of shockwaves: A 1D approach for the shallow water equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 94(7) (2022) 849-895 <https://doi.org/10.1002/flid.5076>
- [4] M. Koushki, R. Babaei, E. Jabbari, Application of MQ-RBF method for solving seepage problems with a new algorithm for optimization of the shape parameter, *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, 52(4) (2020) 1009-1024. <https://doi.org/10.22060/ceej.2019.15155.5840>



مقایسه عملکرد روش‌های بدون شبکه چندربعی و حجم محدود در حل معادله موج دوبعدی

نسرین توکلی^۱، مجید اکبری^۲، رضا بابایی^۱، احسان جباری^{۱*}

۱- گروه مهندسی عمران، دانشگاه قم، قم، ایران.

۲- دانشکده شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۳/۱۲/۲۱

بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۲۷

پذیرش: ۱۴۰۵/۰۴/۱۸

ارائه آنلاین: ۱۴۰۵/۰۵/۱۳

کلمات کلیدی:

معادله موج دوبعدی

روش حجم محدود

روش پایه شعاعی چند ربعی

روش سلول مرکزی

روش بدون شبکه

خلاصه: به منظور شبیه‌سازی و درک پدیده‌ها در حوزه‌های مهندسی آب، سیالات و هیدرولیک از جمله تحلیل اندرکنش سد و مخزن تحت اثر بارهای دینامیکی، مدل‌سازی انتشار امواج سونامی و بررسی انتقال آلودگی در محیط‌های آبی، حل معادله موج یک و دوبعدی اجتناب‌ناپذیر است. به همین دلیل توسعه روش‌های عددی و تحلیلی برای حل این معادله همچنان به‌منظور غلبه بر چالش‌ها ادامه دارد. در این تحقیق عملکرد روش بدون شبکه پایه شعاعی چندربعی در مقایسه با روش حجم محدود سلول مرکزی برای حل معادله موج درجه دوم دوبعدی بررسی شده است. معادله موج توصیف‌کننده انتشار موج در یک محیط معین است که رابطه بین مشتق دوم زمانی و مکانی را با سرعت موج مشخص می‌کند. روش حجم محدود و روش پایه شعاعی از جمله روش‌هایی هستند که برای مدل‌سازی معادلات دیفرانسیل جزئی مانند معادله موج در هندسه‌های پیچیده استفاده می‌شوند. برای مقایسه کارایی این دو روش ابتدا روش حجم محدود بر اساس یک شبکه مثلثی سلول مرکزی تدوین شده است. روش برهم‌نهی پایه شعاعی نیز با استفاده از تابع چندربعی برای نقاط پراکنده توسعه داده شده و در نهایت گسسته‌سازی زمانی از طریق روش صریح اویلر انجام شده است. مقایسه عملکرد و قابلیت‌های دو روش با انجام چند آزمون عددی برای هندسه‌ها و شرایط اولیه و مرزی مختلف، پراکندگی نقاط، متغیر شکل و زمان پردازش هریک از روش‌ها صورت گرفته است. برای مقایسه کمی بهتر دو روش، همچنین حل تحلیلی موج با به‌کارگیری روش جداسازی متغیرها برای یک هندسه ساده مستطیلی با شرایط اولیه و مرزی مشخص بدست آمده است. نتایج این تحقیق نشان‌دهنده هزینه محاسباتی کمتر روش پایه شعاعی چندربعی در مقایسه با روش حجم محدود سلول مرکزی به ازای دقت تقریباً یکسان است.

۱- مقدمه

معادلات دیفرانسیل جزئی یا به اختصار PDE ها معادلاتی شامل مشتقات جزئی یک تابع نامعلوم از چند متغیر مستقل هستند. این معادلات برای مدل‌سازی گسترده‌ای از پدیده‌های موجود در فیزیک، مهندسی، مالی، زیست‌شناسی و بسیاری از شاخه‌های دیگر علوم استفاده می‌شوند. معادلات دیفرانسیل جزئی بر اساس ویژگی‌ها و مشخصات خود به انواع مختلفی از جمله معادلات بیضوی، سهموی، هذلولوی و همچنین خطی و غیرخطی، با یا بدون ضرایب ثابت در آنها و معادلات همگن یا ناهمگن دسته‌بندی می‌شوند. معادلات بیضوی تشریح‌کننده پدیده‌های دائمی و تعادل (استاتیکی) هستند. معادلات سهموی، پدیده‌های دینامیکی با رفتار پخش‌گون مانند حرارت را توصیف می‌کنند. معادلات هذلولوی نیز برای شبیه‌سازی پدیده‌های دینامیکی فیزیکی با رفتار موج‌گون مانند انتقال جریان و اطلاعات

مناسب هستند. از جمله کاربردی‌ترین‌های موارد دسته اخیر می‌توان به معادلات اویلر، معادلات آبهای کم‌عمق و معادله کلاسیک موج اشاره کرد. در دهه‌های گذشته روش‌های متنوعی برای حل عددی و تحلیلی معادلات هذلولوی توسعه داده شده است [۱-۷]. بیشتر این تحقیقات معطوف به توسعه روش‌های تسخیر موج‌های شوک (ناپیوستگی‌ها) و نحوه تخمین ضرایب ناپایستار (جملات ناهمگن) با توجه به راه حل‌های آنتروپی بوده است [۸-۱۱]. به دلیل غیرخطی و پیچیده بودن، معادلات موج دوبعدی مانند معادلات اویلر یا دستگاه معادلات دوبعدی آب کم‌عمق، حل دقیق ندارند. بنابراین بعضاً برای شبیه‌سازی انتقال جریان از نوع ساده‌تر این معادلات مانند معادله اسکالر موج درجه دوم استفاده می‌شود. معادله موج درجه دوم دو بعدی از جمله معادلات هذلولوی مبتنی بر قوانین پایستگی است که حل تحلیلی بسته^۱ ندارد، اگرچه در حالت‌های ساده خاص قابل حل است. به

1. Closed form solution

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: e.jabbari@qom.ac.ir



دلیل نبود یک حل بسته، اغلب برای حل معادله موج از روش‌های عددی مانند اختلاف محدود، حجم محدود و اجزاء محدود استفاده می‌شود. از آنجا که روش اختلاف محدود از شبکه‌های مستطیلی استفاده می‌کند، تشکیل هندسه‌های پیچیده از طریق شبکه‌های مستطیلی منظم دشوار است. در مقابل، روش‌های حجم محدود و اجزاء محدود در برخورد با هندسه‌های پیچیده انعطاف پذیری بیشتری دارند. از بین دو روش اخیر، روش حجم محدود که از طریق فرم انتگرالی قوانین پایستگی تدوین می‌شود، در توسعه روش‌های تسخیر موج شوک برای حل معادلات هذلولوی کاربرد اساسی دارد. دو رویکرد اصلی مورد استفاده برای اعمال روش حجم محدود از طریق فرم انتگرالی، رویکردهای سلول مرکزی و گره مرکزی است. این دو رویکرد امروزه به طور گسترده در حل معادلات دوبعدی جریان به کار گرفته می‌شوند. با این حال برای تولید شبکه‌های سه‌بعدی بی‌سازمان، روش‌های اخیر نیز با توجه به حجم داده‌های ذخیره شده و محاسبات لازم، با پیچیدگی‌های زیادی روبرو هستند. علاوه بر روش‌های کلاسیک ذکر شده، رویکردهای جدیدی در برخورد با هندسه‌های پیچیده معرفی شده‌اند از جمله استفاده از روش‌های بدون شبکه که مشهورترین آنها روش توابع پایه شعاعی^۱ است. هاردی در سال [۱۲]، تابع جدیدی را برای تقریب سطوح در زمین‌شناسی با هندسه‌های پیچیده معرفی کرد که به نام تابع چندربعی^۲ یا مالتی‌کوادریک شناخته می‌شود. روش برهم‌نهی^۳ تابع پایه شعاعی که یک رویکرد جدید در زمینه مدل‌سازی عددی است، توسط کانزا [۱۳] و ابتدا با استفاده از تابع چندربعی معرفی شده توسط هاردی، پیشنهاد شده است. او توانست با استفاده از اعمال معادلات دیفرانسیل در نقاط بر هم نهی جزئی و شرایط مرزی در مرزها، توابع تخمین را تعیین کند. به دلیل سادگی در اجرا و هزینه محاسباتی پایین، این روش عددی موضوع تحقیقات گسترده‌ای بوده است. یکی از ویژگی‌های کلیدی روش برهم‌نهی توابع پایه شعاعی بی‌نیازی از یک شبکه نقاط ساختاریافته ثابت است و در نتیجه می‌تواند به سادگی برای حل مسائل با هندسه پیچیده بر اساس یک مجموعه از نقاط^۴ (گره‌های^۵) پراکنده استفاده شود. از آنجا که در این روش ساختار شبکه وجود ندارد، کدنویسی کامپیوتری نسبت به روش‌های وابسته به شبکه ساده‌تر بوده و در عین حال تفاوت کمی بین هزینه اجرای یک برنامه دوبعدی و سه‌بعدی وجود دارد. در خصوص نحوه چینش نقاط پراکنده تحقیقات مفصلی انجام شده است که

نشان داده است در مسائل مختلف چینش‌های خاصی دارای برتری‌هایی بر چینش یکنواخت است. همچنین توابع پایه شعاعی می‌توانند در هندسه‌های دو و سه بعدی تقزیا به سادگی هندسه‌های یک بعدی و تعریف شوند. علاوه بر این، ترکیب توابع مختلف پایه شعاعی با توابع دیگر از جمله توابع خطی امکان پذیر است که کانزا در معرفی این روش از همین نکته بهره برده است. باید اشاره نمود که با هدف احتراز از بدوضعی ماتریس ضرایب، می‌توان نقاط مورد استفاده در تعریف تابع برای اعمال معادله حاکم در یک نقطه معین را به تعدادی نقاط اطراف آن نقطه محدود نمود که در مورد آن تحقیقاتی صورت گرفته است و البته اغلب کارساز نیست. در رویکرد بدون شبکه، برخلاف روش‌های با شبکه مانند روش‌های اجزاء محدود و حجم محدود، گره‌ها دامنه را نمایندگی می‌کنند و پاسخ‌ها با استفاده از توابع پایه شعاعی تخمین زده و در معادلات حاکم جایگذاری می‌شوند. همچنین توابع پایه شعاعی برای تقریب داده‌های پراکنده در ابعاد فضایی دو و سه بعدی، موفقیت چشمگیری را به دست آورده‌اند [۱۴، ۱۵]. به دلیل مزایای ذکر شده، در مطالعات جدید، روش‌های توابع پایه شعاعی به مسائل کاربردی متنوعی توسعه داده شده‌اند [۱۶، ۱۷]. با این حال روش‌های بدون شبکه، اغلب با مشکل قابلیت حل‌پذیری مواجه هستند و برای جلوگیری از ایجاد ماتریس تکین، به شدت به متغیر شکل و تعداد گره‌های برهم‌نهی^۶ انتخابی وابسته می‌باشند. اهمیت انتخاب متغیر شکل در تارواتر [۱۸] ذکر شده است. برای رفع مشکل حل‌پذیری مسئله، رویکردهای متعددی شامل استفاده از روش بدون شبکه محلی توصیه شده است [۱۹]. همچنین تاکنون تحقیقات گسترده‌ای در زمینه انتخاب متغیر شکل انجام گرفته است [۲۰، ۲۱]. با این حال همچنان روش جامعی برای انتخاب متغیر شکل وجود ندارد. به همین سبب مقایسه بیشتر روش‌های بدون شبکه با روش‌هایی مانند حجم محدود برای آزمون همگرایی و کارایی آنها مفید و حتی ضروری است.

۲- معادلات حاکم

معادله موج دو بعدی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

که در آن، u متغیر پاستار مجهول (از جنس سرعت یا جابجایی)، x

1. Radial Basis Functions (RBF)
2. Multiquadric (MQ)
3. Collocation Method
4. Point
5. Node

و y مختصات مکانی، t زمان و c نیز ثابت سرعت (انتقال موج) هستند.

۳- حل معادله موج دو بعدی

۳-۱- روش جداسازی متغیرها

برای تحلیل از طریق روش جداسازی متغیرها، معادله موج را در یک دامنه مستطیلی $\Omega \in [0, L_x] \times [0, L_y]$ با شرایط مرزی دیریکله و شرایط اولیه به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u(L_x, y, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0, t) = u(x, L_y, t) &= 0, & t \geq 0 \\ u(x, y, 0) &= f(x, y) \\ u_t(x, y, 0) &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

در روش جداسازی متغیرها فرض می‌شود که راه حل به صورت حاصلضرب توابع متغیرهای جداگانه است. در این حالت تابع $u(x, y, t)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u(x, y, t) = T(t)X(x)Y(y) \quad (3)$$

که در آن سه تابع T ، X و Y توابع مستقل و تابع به ترتیب متغیرهای t ، x و y هستند. با جایگذاری آن در معادله موج (۱) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} T''(t)X(x)Y(y) &= \\ c^2 [T(t)X''(x)Y(y) + T(t)X(x)Y''(y)] \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن، اندیس‌های بالانویس نشان‌دهنده مشتقات جزئی دوم نسبت به متغیرهای مربوطه‌اند. از رابطه (۴)، معادله دیفرانسیل معمولی زیر دست می‌آید:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2 \quad (5)$$

1. Separation of Variables

از آنجایی که هر دو سمت این رابطه برابر یکدیگرند، این دو عبارت همچنین می‌توانند مساوی یک مقدار ثابت مثل $-\lambda^2$ باشند. با توجه به این مقدار ثابت، عبارت $T(t)$ یک معادله دیفرانسیل همگن به شکل زیر را تشکیل می‌دهد:

$$T''(t) + c^2 \lambda^2 T(t) = 0 \quad (6)$$

رابطه (۶) را می‌توان با چند جمله مشخصه حاصل از آن به شکل کلی زیر حل کرد:

$$T(t) = k_1 \cos(c\lambda t) + k_2 \sin(c\lambda t) \quad (7)$$

همچنین با حل دو عبارت $X(x)$ و $Y(y)$ مانند حالت قبل روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} X(x) &= k_3 \cos(\nu x) + k_4 \sin(\nu x) \\ Y(y) &= k_5 \cos(\mu y) + k_6 \sin(\mu y) \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن μ و ν مقادیر ثابت هستند. با جایگذاری این سه عبارت در راه حل کلی، معادله موج (۳) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= [k_1 \cos(c\lambda t) + k_2 \sin(c\lambda t)] \\ &\times [k_3 \cos(\mu x) + k_4 \sin(\mu x)] \\ &\times [k_5 \cos(\nu y) + k_6 \sin(\nu y)] \end{aligned} \quad (9)$$

که شامل ۶ ضریب ثابت k_j است که باید محاسبه شود. با اعمال شرایط مرزی دیریکله و شروع از مرز، پاسخ به صورت مجموعه‌ای از حاصل جمع حل‌های $u_{mn}(x, y, t)$ به دست می‌آید. در عین حال با اعمال شرایط اولیه، مقادیر ثابت نیز تعیین و فرم کلی زیر برای پاسخ معادله موج دوبعدی به دست می‌آید:

با استفاده از قضیه دیورژانس (قضیه گرین) و تبدیل انتگرال حجم به سطح می‌توان رابطه (۱۳) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V u dV - \int_S (c^2 \vec{\nabla} u) \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (14)$$

که در آن، S سطح، V حجم و $\vec{n}$ بردار نرمال واحد هستند. در حالت کلی رویکرد حجم محدود نیازمند جداسازی دامنه درون حجم کنترل‌های مجاور هم و حل عددی معادله درون این حجم کنترل‌ها است. در این تحقیق برای گسسته‌سازی عددی دامنه از تکنیک سلول مرکزی با شبکه‌های سه‌وجهی (مثلثی) منظم و بی‌سازمان استفاده می‌شود (شکل ۱). حال اگر به طور مشابه برای معادله پایداری جرم (موج درجه یک) فرم انتگرالی زیر وجود داشته باشد:

$$\frac{1}{\rho} \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot f dV = 0 \quad (15)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس (قضیه گرین) می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V p dV + \int_S f \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (16)$$

با جایگذاری $p = \rho \frac{\partial u}{\partial t}$ و $f = -c^2 \vec{\nabla} u$ در رابطه (۱۶) به عنوان شار عبوری از مرز کنترل می‌توان معادله (۱۴) را بازسازی کرد. حال شار عددی را می‌توان با استفاده از یک حل گر مناسب برای معادلات هذلولوی خطی حل کرد. در اینجا برای گسسته‌سازی مشتق مکانی از روش مرکزی معمول «میانگین شار عددی» و برای گسسته‌سازی مشتق زمانی با استفاده از روش صریح، معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$\bar{u}^{n+1} = 2\bar{u}^n - \bar{u}^{n-1} - \frac{\Delta t}{V_i} \left(\sum_{j=1}^m \bar{f}_i \bar{n}_{ij} |s| \right) \quad (17)$$

که در آن، $\bar{f}^n = \delta \bar{u}_{i,j}^n$ و $\bar{u} = \frac{1}{V_i} \int_V u dV$ در مرز سلولی به صورت

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \cos(c \lambda_{mn} t) + B_{mn} \sin(c \lambda_{mn} t)] \times \sin(\mu_m x) \sin(\nu_n y) \quad (10)$$

که در آن، λ_{mn} ، μ_m و ν_n به ترتیب برابر هستند با:

$$\lambda_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2}, \quad \mu_m = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right), \quad \nu_n = \left(\frac{n\pi}{L_y}\right) \quad (11)$$

و ضرایب سری فوریه A_{mn} و B_{mn} نیز برابر عبارات زیر هستند:

$$A_{mn} = \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} f(x, y) \times \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy$$

$$B_{mn} = \frac{4}{L_x L_y c \lambda} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} g(x, y) \times \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy \quad (12)$$

۳-۲- روش‌های عددی

۳-۲-۱- روش حجم محدود سلول مرکزی^۱

اعمال روش حجم محدود از طریق شکل انتگرالی معادله قوانین پایداری^۲ قابل انجام است:

$$\int_V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dV - \int_V \nabla \cdot (c^2 \vec{\nabla} u) dV = 0 \quad (13)$$

1. Cell-Centered Finite Volume Method
2. Integral form of Conservation Laws

زیر محاسبه می‌گردد:

$$\delta \bar{u}_{i,j}^n = \frac{1}{l_{i,j}} (u_i - u_j) \quad (18)$$

که در آن $l_{i,j}$ فاصله بین دو نقطه i و j است.

۳-۲-۲ روش بدون شبکه RBF-MQ

برای حل معادله موج از طریق روش بدون شبکه پایه شعاعی چندربعی (به اختصار RBF-MQ)، ابتدا معادله موج دوبعدی در شکل نیمه‌گسسته زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= L \\ L &= c^2 \nabla^2 u \end{aligned} \quad (19)$$

در شکل نیمه‌گسسته، معادله دیفرانسیل جزئی به دو معادله دیفرانسیلی معمولی ODE تبدیل شده که در این حالت ابتدا رابطه از طریق درونیابی حل و سپس با اعمال یک گسسته‌سازی زمانی صریح یا ضمنی نتایج عددی در گام‌های زمانی بعدی محاسبه می‌شود. درونیابی از طریق توابع پایه شعاعی به نسبت سایر توابع مانند چند جمله‌ای از دقت و انعطاف پذیری بالاتری برخوردار است. علاوه بر این، انواع مختلفی از توابع پایه شعاعی توسعه داده شده است. در حالت کلی هر تابع به شکل معادله (۲۰) می‌تواند یک تقریب با استفاده از تابع پایه شعاعی در نظر گرفته شود که در آن $r = \|X_i - X\|$ فاصله اقلیدسی است:

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(\|X_i - X\|) \quad (20)$$

که در آن X و X_i به ترتیب موقعیت نقطه مورد محاسبه و نقطه گوسی است.

توابع پایه شعاعی متداول شامل توابع گوسی، صفحه نازک، اسپلاین، چندربعی و چندربعی معکوس هستند. از میان این توابع، تابع چندربعی که اولین بار توسط هاردی ارائه شد در روش‌های بدون شبکه مبتنی بر RBF، به‌ویژه روش کانزا، به‌طور گسترده برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی

از جمله معادلات موج مورد استفاده قرار گرفته است. مطالعات نشان دادند که این تابع، در صورت انتخاب مناسب پارامتر شکل، از خواص همگرایی و دقت عددی مطلوبی در تقریب توابع برخوردار است [۲۲]. تابع چند ربعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2} \quad (21)$$

که در آن ε متغیر شکل است. مقدار این متغیر می‌تواند دقت و پایداری نتایج RBF-MQ را به شدت تحت تاثیر قرار دهد. متأسفانه هیچ روش جامعی برای تعیین متغیر شکل وجود ندارد. اغلب این متغیر به صورت تجربی تعیین می‌شود. با جایگذاری تابع درونیابی در معادله (۱۹)، شکل نیمه‌گسسته زیر به دست می‌آید:

$$L(\Phi) = c^2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \nabla^2 \phi(\|X_i - X\|). \quad (22)$$

برای گسسته‌سازی زمانی شکل نیمه‌گسسته (۱۹) نیز می‌توان از روش صریح مرکزی استفاده کرد:

$$u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1} + \Delta t^2 L^n(\Phi) \quad (23)$$

با استفاده از اعمال معادله دیفرانسیل حاکم (۲۲) در N نقطه برهم‌نهی، مقادیر ضرایب ثابت تابع u^n یعنی α_i ، از طریق حل دستگاه معادلات خطی زیر بدست می‌آید:

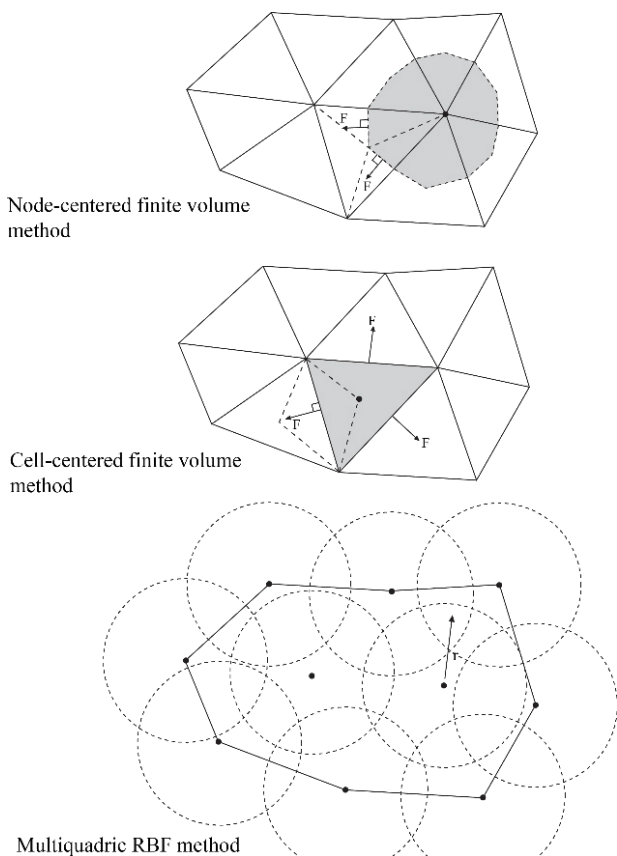
$$[A][\alpha_i] = [f_i] \quad (24)$$

که در آن خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} \phi(\|X_1 - X_1\|) & \cdots & \phi(\|X_1 - X_N\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\|X_N - X_1\|) & \cdots & \phi(\|X_N - X_N\|) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\Delta t \leq \frac{C_{CFL} \cdot d_{\min}}{\max(|c|)} \quad (28)$$

که در آن، Δt گام زمانی، $d_{\min}$ کمینه گام مکانی (کوچکترین اندازه سلول در حجم محدود و یا تابعی از فاصله نقاط در روش بدون شبکه پایه شعاعی)، C_{CFL} عدد کورانت و $\max(|c|)$ بیشینه سرعت موج است. برای حفظ پایداری در طول شبیه‌سازی، مقدار گام زمانی از رابطه (۱) تعیین می‌شود که در آن مقدار عدد کورانت معمولاً در محدوده $0 < C_{CFL} \leq 1$ است، اگرچه در انواع مختلف گسسته‌سازی ممکن است متفاوت باشد. با



شکل ۱. نحوه گسسته‌سازی روش بر مبنای شبکه حجم محدود NC (بالا) و حجم محدود CC (وسط) و روش بدون شبکه پایه شعاعی MQ (پایین).

Fig. 1. Discretization scheme of the mesh-based node-centered (NC) finite volume (top), cell-centered (CC) finite volume (middle), and multiquadric (MQ) radial basis function meshless (bottom) methods.

و $[f_i]$ بردار مقادیر معلوم سمت راست معادله است. در نهایت با استفاده از ضرایب به دست آمده، تابع u^{n+1} به دست می‌آید.

۳-۲-۳- شرایط مرزی

شرایط مرزی اصلی در هر دو روش عددی باشبکه و بدون شبکه، شامل شرایط مرزی دیریکله، نیومن و ترکیبی (رایین) است. برای اعمال شرایط مرزی دیریکله مقدار متغیر حل مسئله در مرز به طور مستقیم اعمال می‌شود:

$$u_i = u_{boundary} \quad (26)$$

که در آن، u_i مقدار متغیر اسکالر برای نقطه یا گره در روش پایه شعاعی MQ یا سلول مورد نظر در روش حجم محدود است و $u_{boundary}$ مقدار شرایط مرزی منظور شده است. برای شرایط مرزی نیومن گرادین، شار یا نرخ جریان متغیر مسئله در مرز اعمال می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_{boundary} \quad (27)$$

که در آن، $\frac{\partial u}{\partial n}$ گرادین (مشتق) u در جهت بردار نرمال و $f_{boundary}$ مقدار منظور شده است. در رویکرد باشبکه حجم محدود دوعدی، این امر اغلب مستلزم تعریف سلول اضافی و اعمال شرایط مرزی بر وجه سلول با توجه به بردار نرمال آن است. اما در رویکرد بدون شبکه شرایط مرزی مستقیماً بر هر گره روی مرز اعمال می‌شود. شرایط مرزی ترکیبی نیز که به آن شرایط رایین گفته می‌شود شامل ترکیب خطی از شرایط مرزی دیریکله و نیومن است.

۳-۲-۴- شرایط پایداری

در یک روش عددی شرط پایداری یا شرط کورانت برای تضمین ناپایدار نشدن پاسخها اهمیت اساسی دارد. شرط پایداری کورانت تضمین می‌کند که گام زمانی شبیه‌سازی به اندازه کافی کوچک باشد که در گام‌های زمانی متوالی پاسخها واگرا نشود. شرط کورانت معمولاً به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = 0, \quad u(L, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, L, t) = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

حالت ب)

شرایط اولیه مسئله موج سینوسی شکل متقارن در دامنه به صورت رابطه (۳۲) است:

$$u(x, y, 0) = \sin(px) \sin(qy) \quad (32)$$

که در آن مقادیر $p = 3$ و $q = 2$ می‌باشد. در این حالت شرایط مرزی دیریکله با مقدار صفر در چهار سوی دامنه به صورت روابط (۳۳) انتخاب شده است:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = 0, \quad u(L_x, y, t) = 0 \\ u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, L_y, t) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

حل تحلیلی معادله موج دوبعدی در حالات الف و ب با استفاده از جمع سری فوریه (۱۰) به صورت رابطه (۳۴) قابل محاسبه است:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left[\frac{4}{L_x L_y} \right. \\ \times \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} f(x, y) \sin(v_n x) \sin(\mu_m y) dx dy \\ \left. \times \cos(c \lambda_{nm} t) \times \sin(v_n x) \sin(\mu_m y) \right] \end{aligned} \quad (34)$$

که در آن $f(x, y)$ تابع شرایط اولیه است. برای حل عددی از روش بدون شبکه پایه شعاعی MQ و روش حجم محدود سلول مرکزی CC با سلولهای سه‌وجهی (مثلثی) منظم استفاده شده است. نتایج عددی این آزمون با روش اختلاف محدود نیز مقایسه شده است.

با توجه به شکل (۲) نتایج روش‌های عددی و حل دقیق تا زمان $t = 3.8s$ برای یک نقطه مشخص شبیه‌سازی شده است. خطاهای عددی و زمان محاسبات برای روش حجم محدود CC و پایه شعاعی MQ نیز در جدول ۱ گزارش شده است. طبق نتایج ارائه شده در جدول ۱ ملاحظه می‌شود که در این مثال روش عددی پایه شعاعی MQ با متغیر شکل بهینه

ارضاء این شرط، اطلاعات پخش شده همیشه نسبتی از فاصله (گام) مکانی بر گام زمانی است.

۴- نتایج عددی

در این بخش برای مقایسه نتایج روش‌های عددی باشبکه حجم محدود سلول مرکزی و بدون شبکه پایه شعاعی چندربعی تعدادی آزمون عددی ارائه می‌شود. نتایج عددی بدست آمده برای هر دو روش عددی در صورت امکان با نتایج تحلیلی نیز مقایسه شده است. برای روش‌های عددی مدل‌سازی شده در این قسمت، شرط پایداری کورانت برابر با 0.5 در نظر گرفته می‌شود. خطاهای عددی این دو روش نیز از طریق معیار خطاهای L_2 و L_∞ و میانگین درصد قدرمطلق خطای نسبی محاسبه شده که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} L_2 &= \sqrt{\sum \frac{1}{N} (\hat{u}_i - u_i)^2} \\ L_\infty &= \max |\hat{u}_i - u_i| \\ MAPE &= \frac{\sum \frac{|\hat{u}_i - u_i|}{\hat{u}_i} \times 100}{N} \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن u_i و $\hat{u}_i$ به ترتیب مقدار متغیر محاسبه شده و مقدار متغیر مبنای مقایسه است.

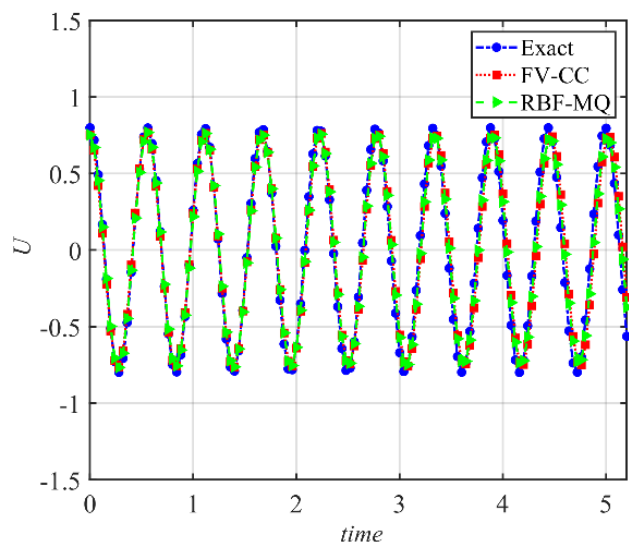
۴-۱ مثال ۱: یک غشاء مستطیلی با شرایط مرزی دیریکله (حل تحلیلی) شرایط اولیه و مرزی این آزمون در دو حالت زیر در دامنه مربعی شکل به طول و عرض یکسان $[0.1] \times [0.1]$ اعمال می‌شود:

حالت الف)

شرایط اولیه مسئله یک موج گوسی شکل به صورت رابطه (۳۰) است:

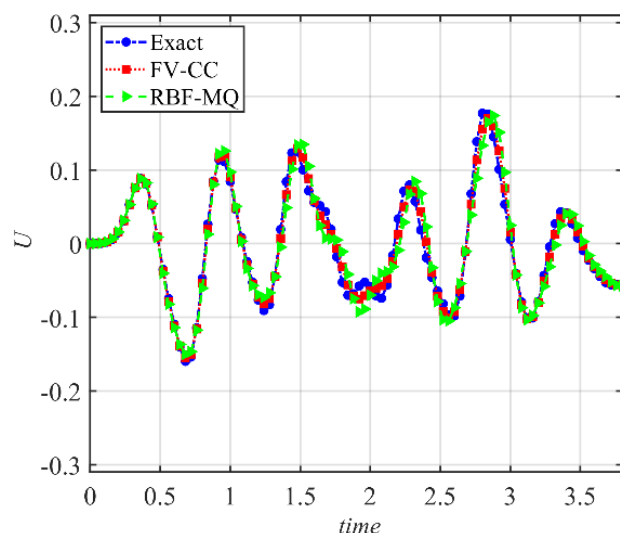
$$u(x, y, 0) = \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}{2\sigma^2}} \quad (30)$$

و مقدار $\sigma = 0.1$ می‌باشد. همچنین شرایط مرزی دیریکله با مقدار صفر در چهار سوی دامنه انتخاب شده است:



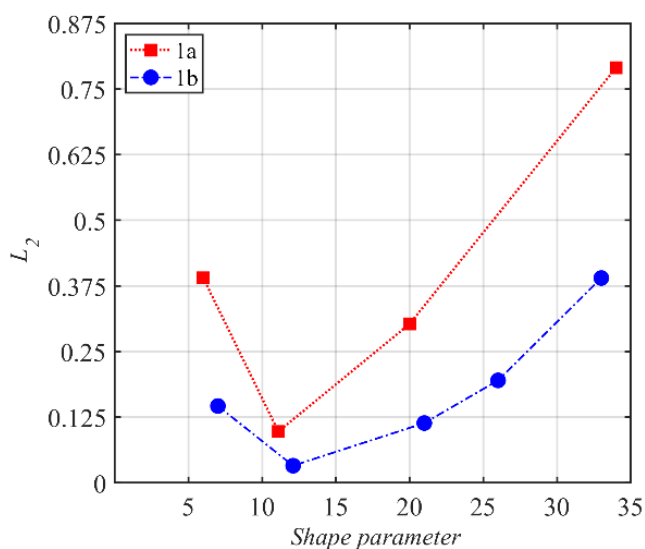
شکل ۳. نتایج حالت ۱-ب برای یک نقطه مشخص محاسبه شده با روش‌های عددی و حل دقیق.

Fig. 3. Case 1-b Results for a specific point calculated using numerical methods and the exact solution.



شکل ۲. نتایج حالت ۱-الف برای یک نقطه مشخص محاسبه شده با روش‌های عددی و حل دقیق.

Fig. 2. Case 1-a Results for a specific point calculated using numerical methods and the exact solution.



شکل ۴. حساسیت روش پایه شعاعی MQ به مقادیر مختلف متغیر شکل برای آزمون عددی ۱.

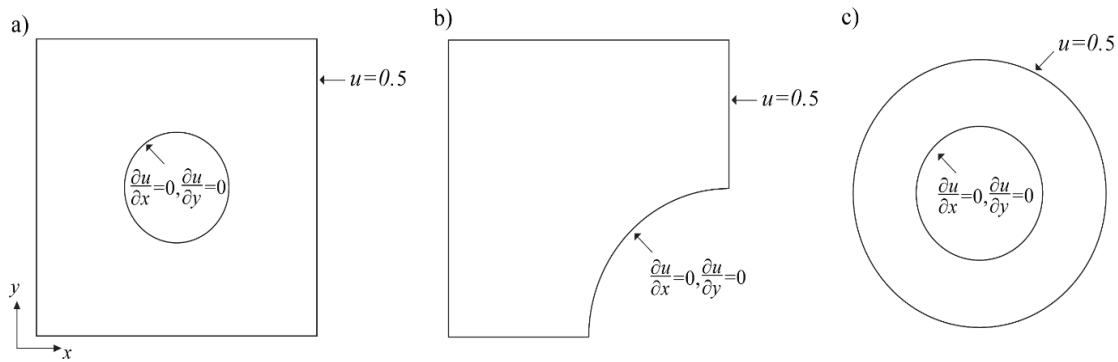
Fig. 4. Sensitivity of the multiquadric (MQ) radial basis function method to various shape parameter values for numerical test 1.

$\varepsilon = 11.1$ هزینه محاسباتی بسیار کمتری نسبت به روش حجم محدود دارد.

در مثال ۱-ب نتایج عددی و حل دقیق برای نقطه $x = 0.25$ و $y = 0.25$ در زمان‌های مختلف در شکل ۳ گزارش شده است. این شبیه‌سازی تا زمان $t = 5.2s$ می‌باشد. همان طور که از نتایج مندرج در جدول ۱ ملاحظه می‌شود روش عددی حجم محدود سلول مرکزی با سلول مثلثی هزینه محاسباتی بیشتری نسبت به روش اختلاف محدود با شبکه کارتزین چهاروجهی مربعی و روش پایه شعاعی MQ با متغیر شکل بهینه $\varepsilon = 12.5$ داشته است. در این مثال هزینه محاسباتی روش پایه شعاعی MQ در مقایسه با روش حجم محدود به میزان قابل توجهی کمتر (یک دهم) است.

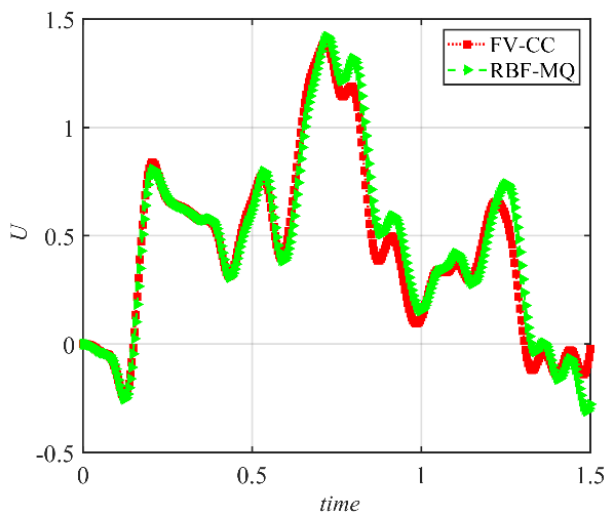
همچنین حساسیت روش عددی پایه شعاعی نسبت به متغیر شکل در شکل ۴ گزارش شده است.

مقدار متغیر شکل بهینه با روش‌های پیشین توصیه شده [۲۲] با فرمول پیشنهادی $\varepsilon = \frac{0.8\sqrt{N}}{D}$ برابر ۱۱/۹ بوده است که با مقدار بهینه حاصل از روش تکرار در دو حالت مثال اول اختلاف چندانی نداشته است.



شکل ۵. نمای کلی از غشاء شبیه‌سازی شده برای آزمون‌های عددی ۲ و ۳ و ۴ همراه با شرایط مرزی مسئله.

Fig. 5. General view of the simulated membrane for numerical tests 2, 3, and 4, along with the boundary conditions of the problem.



شکل ۶. نتایج آزمون ۲ برای یک نقطه مشخص محاسبه شده با روش‌های عددی.

Fig. 6. Test 2 results for a specific point calculated using numerical methods.

است. چنانکه در جدول ۱ ملاحظه می‌شود روش چندربعی به ازای دقت تقریباً یکسان، نسبت به روش حجم محدود دارای سرعت بسیار بیشتری (نه برابر) است.

۴-۳- آزمون عددی ۳: یک غشاء با برش ربع‌دایره در گوشه

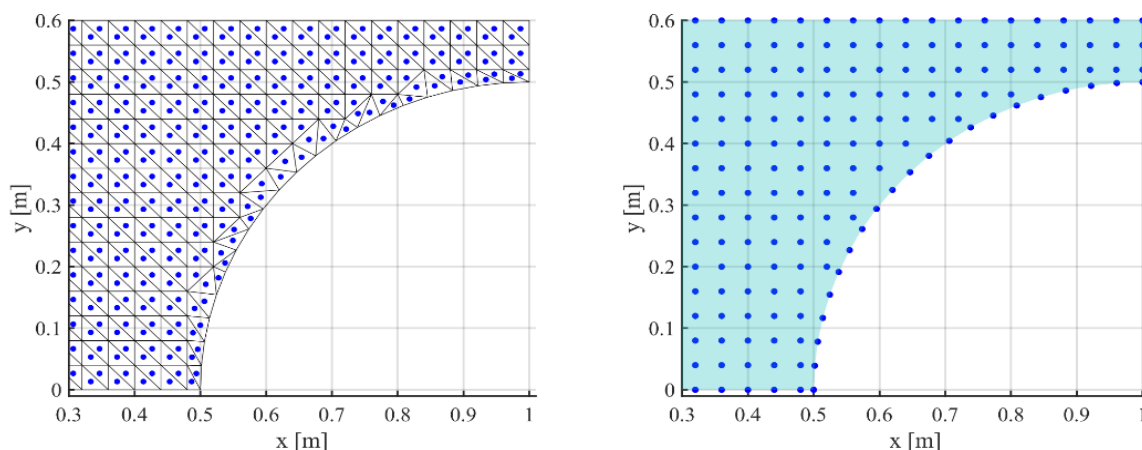
در این آزمون یک غشاء مستطیلی با طول و عرض ۰/۶ متر اما با یک برش ربع‌دایره به شعاع ۰/۵ متر در گوشه سمت راست پایین تولید می‌شود. شرایط مرزی مسئله در شکل ۵ نشان داده شده است و شرایط اولیه آن صفر

۴-۲- آزمون عددی ۲: یک غشاء مستطیلی با برش دایره‌ای در مرکز در این آزمون یک غشاء مستطیلی به عرض و طول یکسان یک متر با یک برش دایره‌ای در مرکز غشاء به شعاع ۰/۲ متر در نظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی مسئله در شکل ۵ نشان داده شده است و شرایط اولیه آن صفر می‌باشد.

در این آزمون برای مقایسه تاثیر شرایط مرزی مختلف از شرایط مرزی دیریکله در مرز خارجی و نیومن در اطراف حفره دایره شکل استفاده شده است.

حل تحلیلی این مسئله موجود نیست. بنابراین نتایج عددی FVM-CC و RBF-MQ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. دامنه برای روش حجم محدود و بدون شبکه به ترتیب درون سلول‌های مثلثی و گره‌ها گسسته شده است. برای مقایسه بهتر گسسته‌سازی‌های عددی روش حجم محدود با شبکه سه‌وجهی مثلثی نامنظم و روش بدون شبکه و نقاط پراکنده به نحوی استفاده شده تا مرکز سلول‌ها و نقاط پراکنده در موقعیت‌های مشابه قرار گیرند. همچنین از آن‌جا که حل تحلیلی مسئله وجود ندارد، یک حل با شبکه ریزتر با دو برابر تعداد سلول حالت اولیه از طریق روش حجم محدود سلول مرکزی به عنوان پاسخ مرجع، محاسبه شده است.

در شکل ۶ نتایج عددی دو روش حجم محدود و روش پایه شعاعی برای یک نقطه مشخص در زمان‌های مختلف شبیه‌سازی شده است. خطای عددی روش حجم محدود و روش پایه شعاعی با متغیر شکل بهینه $\varepsilon = 20$ نسبت به پاسخ مرجع و هزینه محاسباتی آن‌ها در جدول ۱ گزارش شده



شکل ۷. نمای نزدیک از دامنه گسسته سازی شده آزمون عددی ۳ برای روش حجم محدود CC (چپ) و روش پایه شعاعی MQ (راست).

Fig. 7. Close-up view of the discretized domain of numerical test 3 for the CC finite volume method (left) and the MQ radial basis function method (right).

همانطور که در شکل ۸ نشان داده شده است، نتایج عددی این مسئله برای یک نقطه مشخص تا زمان $t = 1.5s$ شبیه سازی شده است. نتایج خطاها و هزینه محاسباتی هر روش در جدول ۱ آمده است. همان طور که در جدول ۱ دیده می شود، در این مثال هم روش حجم محدود CC با زمان پردازش ۱/۵۲۷ ثانیه در مقایسه با روش پایه شعاعی با زمان پردازش ۰/۱۶۷ ثانیه، با وجود خطای تقریباً یکسان، دارای هزینه محاسباتی بیشتر (نه برابر) بوده است.

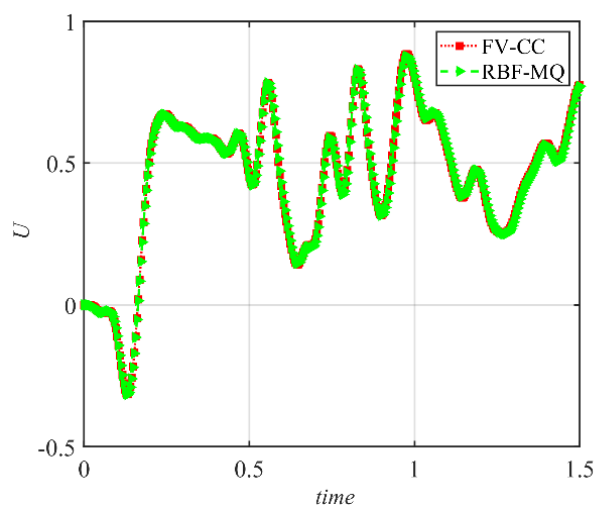
۴-۴-۴ آزمون عددی ۴: یک غشاء حلقه ای

در این آزمون برای بررسی بیشتر عملکرد دو روش عددی حجم محدود و پایه شعاعی و درک بهتر نحوه رفتار این دو روش در دامنه های پیچیده، میدان موج در یک غشاء حلقوی با قطر داخلی ۰/۶ و قطر خارجی ۱ متر که در شکل ۵ نشان داده شده است مدل سازی می شود. شرایط مرزی مسئله در شکل ۵ نشان داده شده است و شرایط اولیه آن صفر می باشد. همچنین برای مقایسه بهتر نتایج، یک حل مرجع با استفاده از روش حجم محدود با شبکه ریزتر تولید شده است. توزیع نقاط برهم نهی و سلول ها مانند آزمون های ۲ و ۳ در هر دو روش یکسان فرض می شود.

در شکل ۹ نتایج عددی این مسئله برای یک نقطه مشخص تا زمان $t = 1.5s$ شبیه سازی شده است. همچنین نتایج خطاها و هزینه محاسباتی هر روش در جدول ۱ گزارش شده است. همان طور که در جدول ۱ مشاهده

می باشد.

از آن جا که پاسخ تحلیلی این آزمون در دسترس نیست نتایج عددی FVM-CC و RBF-MQ با یک پاسخ مرجع از طریق روش حجم محدود با شبکه ریزتر مقایسه شده است. برای مقایسه بهتر، تعداد و موقعیت سلول ها و نقاط پراکنده به طور یکسان انتخاب شده اند.



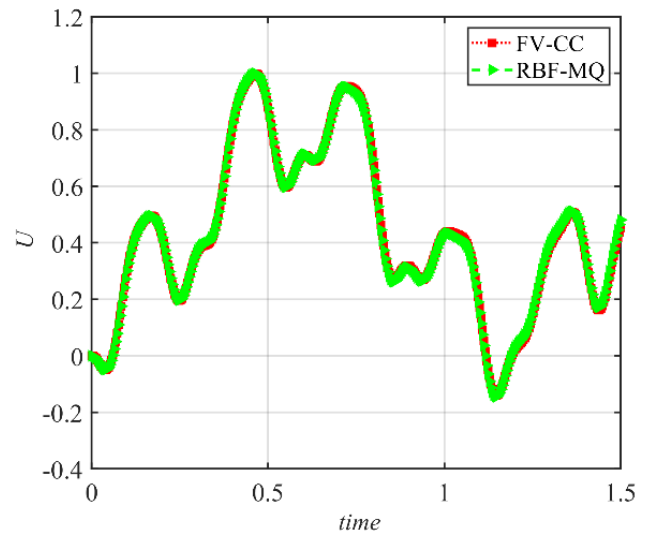
شکل ۸. نتایج آزمون ۳ برای یک نقطه مشخص محاسبه شده با روش های عددی حجم محدود و چندربعی.

Fig. 8. Test 3 results for a specific point calculated using finite volume and multiquadric (MQ) numerical methods.

می‌شود زمان پردازش روش حجم محدود برای این آزمون ۱/۱۱۹ ثانیه و برای روش پایه شعاعی ۰/۱۲۳ ثانیه می‌باشد که نشان‌دهنده هزینه محاسباتی بیشتر (همچنان نه برابر) روش FV نسبت به روش MQ، به ازای مرتبه خطای تقریباً یکسان است. متغیر شکل بهینه برای این مثال $\varepsilon = 9.5$ محاسبه شده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، عملکرد روش بدون شبکه پایه شعاعی چندربعی (MQ) در مقایسه با روش حجم محدود سلول مرکزی (FV) برای حل معادله موج دو بعدی بررسی شده است. پیاده‌سازی روش حجم محدود سلول مرکزی وابسته به تولید شبکه‌های مثلثی است و نیازمند صرف هزینه بالای تولید سلول‌ها به ویژه در هندسه‌های نامنظم و پیچیده است؛ در حالی که آماده‌سازی میدان در روش پایه شعاعی با استفاده از نقاط پراکنده دلخواه به مراتب ساده‌تر انجام می‌شود. پنج آزمون عددی معرفی شده در این تحقیق شامل مدل‌سازی موج



شکل ۹. نتایج آزمون ۴ برای یک نقطه مشخص محاسبه شده با روش‌های عددی حجم محدود و چندربعی.

Fig. 9. Test 4 results for a specific point calculated using finite volume and multiquadric (MQ) numerical methods.

جدول ۱. خطا و کارایی روش‌های حجم محدود CC و بدون شبکه پایه شعاعی MQ نسبت به پاسخ دقیق برای آزمون‌های عددی ارائه شده

Table 1. Error and efficiency of CC finite volume and MQ radial basis function meshless methods relative to the exact solution for the presented numerical tests.

دقت و کارایی				نوع گسسته سازی	روش حل	شماره آزمون
CPU runtime (s)	MAPE %	L2	L ∞			
0.025s	6.94	0.0778	0.1634	مربعی - منظم	FDM-LF	آزمون ۱-الف
1.144s	8.96	0.1321	0.2459	مثلثی - منظم	FVM-CC	
0.109s	9.70	0.1476	0.321	بدون شبکه $\varepsilon = 11.1$	RBF-MQ	
0.038s	5.07	0.0213	0.0472	مربعی - منظم	FDM-LF	آزمون ۱-ب
1.541s	6.98	0.0409	0.0723	مثلثی - منظم	FVM-CC	
0.156s	7.74	0.0525	0.087	بدون شبکه $\varepsilon = 12.5$	RBF-MQ	
1.549s	5.41	0.0142	0.0326	مثلثی - بی سازمان	FVM-CC	آزمون ۲
0.172s	6.42	0.0251	0.0463	بدون شبکه $\varepsilon = 20$	RBF-MQ	
1.527s	6.07	0.0237	0.0463	مثلثی - بی سازمان	FVM-CC	آزمون ۳
0.167s	7.68	0.0325	0.0764	بدون شبکه $\varepsilon = 19$	RBF-MQ	
1.119s	5.52	0.0161	0.031	مثلثی - بی سازمان	FVM-CC	آزمون ۴
0.122s	7.02	0.0211	0.0431	بدون شبکه $\varepsilon = 9.5$	RBF-MQ	

Δt گام زمانی
 CFL عدد کورانت

حجم محدود قابل توصیه است.

۶- فهرست علائم

منابع

- [1] M. Akbari, B. Pirzadeh, Preserving stationary discontinuities in two-layer shallow water equations with a novel well-balanced approach, Journal of Hydroinformatics, 25(5) (2023) 1979-2003.
- [2] H. Kahid Basiri, R. Babaei, A. Fallah, E. Jabbari, Development of multiquadric method for solving dam break problem, Journal of Hydraulics, 14(4) (2020) 83-98. (in persian)
- [3] E.F. Toro, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [4] R.J. LeVeque, Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [5] P.D. Lax, Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1973.
- [6] A. Harten, J.M. Hyman, Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics, 50(2) (1983) 235-269.
- [7] P.L. Roe, Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, Journal of Computational Physics, 43(2) (1981) 357-372.
- [8] M. Akbari, B. Pirzadeh, Implementation of exactly well-balanced numerical schemes in the event of shockwaves: A 1D approach for the shallow water equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 94(7) (2022) 849-895.
- [9] M.E. Vázquez-Cendón, Improved Treatment of Source Terms in Upwind Schemes for the Shallow Water

در یک هندسه ساده مربعی شکل با شرایط مرزی دریکله، یک موج گوسی و سینوسی برای شرایط اولیه موج و مدل سازی حرکت موج در سه هندسه نامنظم با وجود شرایط مرزی دریکله و نیومن است. نتایج عددی به دست آمده نشان داد که هزینه محاسباتی در روش حجم محدود در مقایسه با روش پایه شعاعی به طور میانگین تا نه برابر بوده است. نتایج مدل سازی جریان در هندسه مربعی شکل برای روش های MQ و FV با نتایج حل تحلیلی از طریق جداسازی متغیرها و روش اختلاف محدود مقایسه شده است. نتایج در هر دو آزمون نشان می دهد که اگرچه روش اختلاف محدود در مقایسه با روش های عددی حجم محدود و پایه شعاعی دارای دقت و سهولت بالاتری است، با این وجود روش عددی اختلاف محدود و روش تحلیلی به سادگی قابل تعمیم برای هندسه های پیچیده و نامنظم نیست و استفاده از آن ها غالباً محدود به هندسه های ساده مربعی در مختصات کارترزین یا دایروی در مختصات قطبی است. نتایج همچنین نشان از دقت اندکی بیشتر روش حجم محدود نسبت به روش پایه شعاعی دارد. یکی از دلایل این موضوع وابستگی روش پایه شعاعی MQ به مقدار پارامتر شکل انتخابی است. همچنین روابط توصیه شده در پژوهش های پیشین برای یافتن عدد شکل بهینه در دو حالت از مثال اول این پژوهش استفاده شده است. نتایج نشان داده است که دقت عددی روش پایه شعاعی با مقدار عدد شکل به دست آمده از این روابط با نتایج متغیر شکل بهینه محاسبه شده از روش تکرار اختلاف چندان نداشته است. در مجموع می توان گفت که در مقایسه دو روش عددی حجم محدود و روش پایه شعاعی چندربعی که برای مسائل با هندسه های پیچیده، نامنظم و دامنه های گسترده که نیازمند صرف هزینه محاسباتی کمتر می باشند، استفاده از روش پایه شعاعی MQ اکیدا توصیه می شود. در مقابل برای میدان های کوچکتر، هندسه های منظم و مسائلی که دقت بالاتر مدنظر باشد، روش

علائم انگلیسی

x, y, z متغیرهای مستقل مکان
 t متغیر مستقل زمان
 X, Y توابع مستقل به ترتیب بر حسب x, y
 T تابع مستقل به ترتیب بر حسب t
 L_x, L_y طول میدان در جهات x, y
 α_i ضرایب مجهول تابع چندربعی
 u متغیر پایستار از جنس جابجایی (m) یا سرعت (ms-1)
 c ضریب ثابت سرعت انتشار (ms-1)

- Equations—A Brief Review, in: K.N. Das, P. Biswas, I. Budinska, R. Mallipeddi (Eds.) Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics and Applications, Springer Nature Singapore, Singapore, 2026, pp. 107-117.
- [17] N. Tavakoli, R. Babaei, E. Jabbari, Solving the Inhomogeneous Second-Order Wave Equation with Asymmetric Boundary Conditions: Novel Analytical, Mesh-Based, and Meshless Approaches in Computational Fluid Dynamics, Journal Of Iranian Water Engineering Research, 3(3) (2023) -(in persian)
- [18] A.E. Tarwater, Parameter study of Hardy's multiquadric method for scattered data interpolation, Lawrence Livermore National Laboratory, California, United States, 1985.
- [19] B. Šarler, R. Vertnik, Meshfree explicit local radial basis function collocation method for diffusion problems, Computers & Mathematics with Applications, 51(8) (2006) 1269-1282.
- [20] A. Fallah, E. Jabbari, R. Babaei, Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization, Computers & Mathematics with Applications, 77(3) (2019) 815-829. (in persian)
- [21] M. Koushki, R. Babaei, E. Jabbari, Application of MQ-RBF method for solving seepage problems with a new algorithm for optimization of the shape parameter, Amirkabir Journal of Civil Engineering, 52(4) (2020) 1009-1024. (in persian)
- [22] R. Franke, Scattered data interpolation: tests of some methods, Mathematics of computation, 38(157) (1982) 181-200.
- Equations in Channels with Irregular Geometry, Journal of Computational Physics, 148(2) (1999) 497-526.
- [10] R.J. LeVeque, Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods: The Quasi-Steady Wave-Propagation Algorithm, Journal of Computational Physics, 146(1) (1998) 346-365.
- [11] M. Akbari, B. Pirzadeh, A second order well-balanced and entropy consistent numerical scheme for one-dimensional shallow water equations, Journal of Hydraulics, 19(2) (2024) 1-17. (in persian)
- [12] R.L. Hardy, Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, Journal of Geophysical Research (1896-1977), 76(8) (1971) 1905-1915.
- [13] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, Computers & Mathematics with Applications, 19(8-9) (1990) 147-161.
- [14] E. Jabbari, A. Fallah, A Comparison Between Local and Global MQ-RBF, Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering, (2025).
- [15] M. Gholamipoor, M. Ghiasi, Numerical Simulation of Fully Non-linear Sloshing Waves in a Rectangular Tank Using Radial Basis Function-Finite Difference Method, Water Waves, (2025).
- [16] D. Mishra, N.B. Barik, T. Samantara, A Radial Basis Function and Its Application in Solving Partial Differential

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

N. Tavakoli, M. Akbari, R. Babaei, E. Jabbari, A Comparison between the Performance of RBF-MQ Method and Cell-Centered Finite Volume Method in Solving 2d Wave Equation, Amirkabir J. Civil Eng., 58(4) (2026) 463-478.

DOI: [10.22060/ceej.2026.23804.8245](https://doi.org/10.22060/ceej.2026.23804.8245)

