



استفاده از فیلتر ذره‌ای برای تخمین دقیق شرایط مرزی بار آبی ثابت در آبخوان آزاد

علی محتشمی^۱، سید آرمان هاشمی منفرد^{۱*}، غلامرضا عزیزیان^۱، ابوالفضل اکبرپور^۲

۱-دانشکده فنی و مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

۲-دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۲۱

بازنگری: ۱۳۹۹/۰۷/۰۵

پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۰۴

ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۹/۱۰

کلمات کلیدی:

آبخوان بیرجند

خطای جذر میانگین مربعات

شرایط مرزی هد ثابت

فیلتر ذره‌ای

مدل بدون شبکه جریان آب زیرزمینی

خلاصه: داشتن اطلاعات دقیق از مقادیر شرایط مرزی در آبخوان‌ها یکی از عوامل موثر در افزایش دقت مدل‌های آب زیرزمینی هستند. در این مطالعه به کمک روش فیلتر ذره‌ای و مدل عددی بدون شبکه جریان آب زیرزمینی، مقادیر دقیق سطح آب در مرزهای هد ثابت آبخوان بیرجند تعیین شدند. فیلتر ذره‌ای یکی از روش‌های همگون‌سازی داده‌ها بوده که در جهت کالیبراسیون آنلاین و بهبود عملکرد مدل‌های عددی دینامیکی کمک شایانی می‌کند. همچنین مدل عددی بدون شبکه، از جمله مدل‌هایی است دامنه محاسباتی را شبکه‌بندی نمی‌کند و معادلات را تنها بر روی گره‌ها اعمال می‌کند. این آبخوان به مساحت ۲۶۹ کیلومتر مربع واقع در استان خراسان جنوبی است که ۱۹۰ حلقه چاه بهره‌برداری و ۱۰ چاه مشاهده‌ای دارد. همچنین در مرزهای آن، نه جبهه ورودی و یک جبهه خروجی هد ثابت وجود دارد که این جبهه‌ها در مدل بدون شبکه، تعداد ۱۰۵ گره مرزی را شامل می‌شوند. پس از تعیین حدود بالا و پایین سطح آب برای هر یک از این گره‌ها در الگوریتم فیلتر ذره‌ای مقادیر دقیق هد در نقاط مرزی تعیین شد و سپس به کمک مدل شبیه‌ساز، سطح آب زیرزمینی به دست آمده با مقادیر مشاهداتی مقایسه شدند. نزدیکی نتایج به مقادیر مشاهداتی، قدرت این روش در جهت تخمین مقادیر دقیق مرزی را نشان داد، به طوری که، با اتصال این روش کالیبراسیون به مدل بدون شبکه، خطای جذر میانگین مربعات از ۰/۷۵۷ به ۰/۳۸۶ متر رسید. این مقدار کاهش در مقدار خطا، ضرورت اضافه شدن این روش، به تمامی مدل‌های آب زیرزمینی را نشان می‌دهد. همچنین نتایج نشان دادند که با افزایش تعداد ذرات، در روش فیلتر ذره‌ای، دقت نتایج بالاتر می‌رود، به طوری که خطای جذر میانگین مربعات با در نظر گرفتن ۵۰۰، ۷۰۰ و ۱۰۰۰ ذره به ترتیب ۰/۴۸۴، ۰/۴۰۱ و ۰/۳۸۶ متر می‌باشند.

۱- مقدمه

این منابع به معنای برداشت بهینه از آن‌هاست. به منظور رسیدن به این مهم، نیاز است که رفتار آب زیرزمینی در آبخوان مورد بحث و مطالعه قرار بگیرد. بدین جهت داشتن اطلاع دقیق از آن یک نیاز ضروری برای مدیران و مهندسان آبی است.

بدون شک بهترین حالت شناخت رفتارهای یک سیستم جریان آب زیرزمینی، انجام مجموعه تحقیقات دراز مدت برای هر منطقه مشخص می‌باشد که با توجه به وضعیت کنونی و سقف محدود بودجه‌های پژوهشی عملاً امکان‌پذیر نیست. در این میان با ابزاری مانند شبیه‌سازها و یا مدل‌ها می‌توان با دقت قابل قبولی شرایط مشابه آن چه در طبیعت موجود است، به وجود آورد و به نتایج رضایت‌بخش و دقیقی دست یافت. مدل‌های آب زیرزمینی با حل معادلات مربوط به آبخوان‌ها، جریان آب زیرزمینی را مدل‌سازی می‌کنند [۲]. حل این معادلات با استفاده از روش‌های تحلیلی تنها به موارد بسیار ساده با هندسه ساده و با کاربردهای عموماً آموزشی

سفره‌های آب زیرزمینی به عنوان یکی از مهم‌ترین منابع تامین آب در جهان به ویژه مناطق کم آب و خشک همواره مورد توجه بوده است. از آن جا که در مناطق کم باران و حاشیه کویر سفره‌های آب زیرزمینی از مهم‌ترین منابع به شمار می‌روند، لذا با افزایش بهره‌برداری، مورد تهدید جدی قرار گرفته است. رشد روز افزون جمعیت به همراه نیاز به آب برای مصارف گوناگون و همچنین درک مناسب از وضعیت آب زیرزمینی و مدیریت آن نقش کلیدی در پایداری منابع آب در نواحی خشک و نیمه خشک ایفا می‌کند [۱].

منابع آب زیرزمینی به صورت مستقیم یا غیرمستقیم از آب‌های سطحی و بارندگی تغذیه می‌شوند و مدیریت عرضه و تقاضا در این سیستم می‌تواند پایداری بهره‌برداری از این منابع را به همراه داشته باشد. استفاده پایدار از

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: wateracademy92@gmail.com



بدون شبکه همجایگی نقاط^۳ و روش‌های تفاضل و اجزاء محدود مقایسه کردند. دقت بالاتر روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین نتیجه اصلی پژوهش آن‌ها بود [۵]. محتشمی و همکاران در سال ۲۰۱۷ به کمک روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین، جریان آب زیرزمینی را در حالت ماندگار و غیرماندگار مدل‌سازی کردند و مدل خود را واسنجی و صحت‌سنجی نمودند. نتایج آن‌ها نشان داد، روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین دقت بالاتری نسبت به روش تفاضل محدود دارد. نکته مهم کار آن‌ها استفاده از تابع حداقل مربعات متحرک بود که علاوه بر این که برای اولین بار در این حوزه مورد استفاده قرار می‌گرفت، مشکل ایجاد نقطه مجازی را که ایراد اصلی تابع پایه شعاعی بود را حل و برطرف کرد [۶]. در سال ۲۰۱۹، پاتانیا و همکاران با اشاره به برتری مدل‌های بدون شبکه نسبت به مدل‌های وابسته به شبکه، از روش بدون المان گالرکین^۴ جهت مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی بهره بردند. روش مورد استفاده آن‌ها بر اساس تابع تقریب حداقل مربعات متحرک بود. آبخوان‌هایی که در آن، سطح آب زیرزمینی را مدل کردند، یک آبخوان یک بعدی و دو آبخوان دو بعدی بود. آبخوان دو بعدی واقعی آن‌ها، آبخوانی با نام دریاچه آبی واقع در کشور کانادا بود [۷].

اما در کنار استفاده از مدل‌های شبیه‌ساز جریان آب زیرزمینی، تحلیل عدم قطعیت پارامترهای آن‌ها هم از بزرگ‌ترین مباحثی است که باید به آن پرداخته شود. عدم قطعیت یکی از ویژگی‌های ذاتی جهان است و به طور گسترده در فعالیت‌های روزانه انسان قابل مشاهده می‌باشد. معمولاً عدم قطعیت از کمبود دقت در وضعیت حال یا آینده به دلیل محدودیت در اطلاعات و داده نشأت می‌گیرد. سیستم آب زیرزمینی یک سیستم پیچیده و باز می‌باشد که بر روی شرایط هیدرولوژیکی و هواشناسی، ساختار زمین‌شناسی، ویژگی‌های توپوگرافی، پوشش گیاهی، فعالیت‌های انسانی و ... اثرگذار می‌باشد. از این گذشته، برخی از ویژگی‌های سیستم آب زیرزمینی به طور مستقیم اندازه‌گیری نمی‌شود مانند هدایت هیدرولیکی که از طریق آنالیز مقادیر اندازه‌گیری شده ورودی و خروجی تخمین زده می‌شود. از این رو، بررسی عدم قطعیت پارامترها در مدل‌سازی آب‌های زیرزمینی از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد.

از میان مطالعات گسترده تحلیل عدم قطعیت، سهم مطالعاتی که به تحلیل عدم قطعیت در مدل‌های آب زیرزمینی پرداخته باشند کمتر می‌باشد [۸]. از جمله تحقیقاتی که بر عدم قطعیت شبیه‌سازی‌های آب‌های زیرزمینی با دیدگاه آماری صورت گرفته است توسط فول و همکاران [۹] و دتینگر

محدود است و برای مسائل پیچیده با هندسه نامنظم کاربرد چندانی ندارد و یا حتی وجود ندارند و صرفاً جهت مقایسه و بررسی نتایج عددی به منظور صحت‌سنجی روش و کنترل به کار گرفته می‌شوند به این منظور برای حل روابط ریاضی آبخوان‌ها از روش‌های عددی استفاده می‌کنند. از مهم‌ترین روش‌های عددی می‌توان به روش‌های؛ اجزاء محدود، تفاضل محدود، اجزاء مرزی و احجام محدود اشاره نمود. اخیراً روش‌های بدون شبکه نیز به مجموعه روش‌های عددی اضافه شده است. اگر چه سابقه روش‌های بدون شبکه بیش از سه دهه نیست ولی بستر مناسب و وسیعی را برای فعالیت‌های علمی-تحقیقاتی و مهندسی طی سال‌های اخیر فراهم کرده است.

در روش‌های بدون شبکه برخلاف روش‌های وابسته به شبکه همچون اجزاء محدود نیازی به تعریف یک ارتباط مشخص بین گره‌ها برای تفسیر رفتار فیزیکی مسئله نمی‌باشد. در این روش‌ها مجموعه‌ای از گره‌ها جایگزین المان‌ها می‌شوند. در واقع گسسته‌سازی حوزه فیزیکی (دامنه) مسئله با تعداد مناسبی از نقاط که هر یک زیردامنه‌های متداخل با زیردامنه‌های نقطه یا نقاط همسایه است انجام می‌شود. ارتباط نقاط در روش‌های اجزاء محدود از طریق المان‌ها و در روش‌های بدون شبکه از طریق تعداد نقاط مشترک موجود در ناحیه مشترک هر یک از زیرحوزه‌ها تامین می‌شود [۳]. در این روش‌ها دو نقطه در صورتی با یکدیگر ارتباط دارند که در ناحیه مشترک حوزه تاثیرشان تعداد نقاط مشخصی که تامین کننده شرط معکوس‌پذیری ماتریس‌ها است، وجود داشته باشد. علت استقبال زیاد محققین از این روش‌ها، کاهش زمان بسیار بالایی است که صرف تولید شبکه در روش اجزاء محدود می‌گردد. وجود برخی مزیت‌ها در روش‌های بدون شبکه انگیزه اصلی به کارگیری روشی کارآمد در این مقاله است. اگر چه استفاده از روش‌های بدون شبکه هنوز به گستردگی روش‌های اجزاء محدود در مسائل مهندسی نیست [۴].

استفاده از روش‌های بدون شبکه در مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی توسط تعدادی از نویسندگان، از جمله نویسندگان همین مقاله صورت گرفته است. در سال ۲۰۱۷، بدولا و الدیبهو به کمک روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین به مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی پرداختند. نکته مهم در کار آن‌ها استفاده از تابع پایه شعاعی^۱ به جای تابع حداقل مربعات متحرک^۲ بود، که به خودی خود محدودیت‌هایی از جمله تغییر مرز آبخوان را به همراه داشت. آن‌ها دو آبخوان مستطیلی استاندارد و یک آبخوان واقعی (پوچامپاد) را مدل کردند و سطح آب زیرزمینی را محاسبه کردند و نتایج خود را با نتایج روش

3 Point Collocation Method

4 Element Free Galerkin

1 Radial Basis Function

2 Moving Least Squares Method

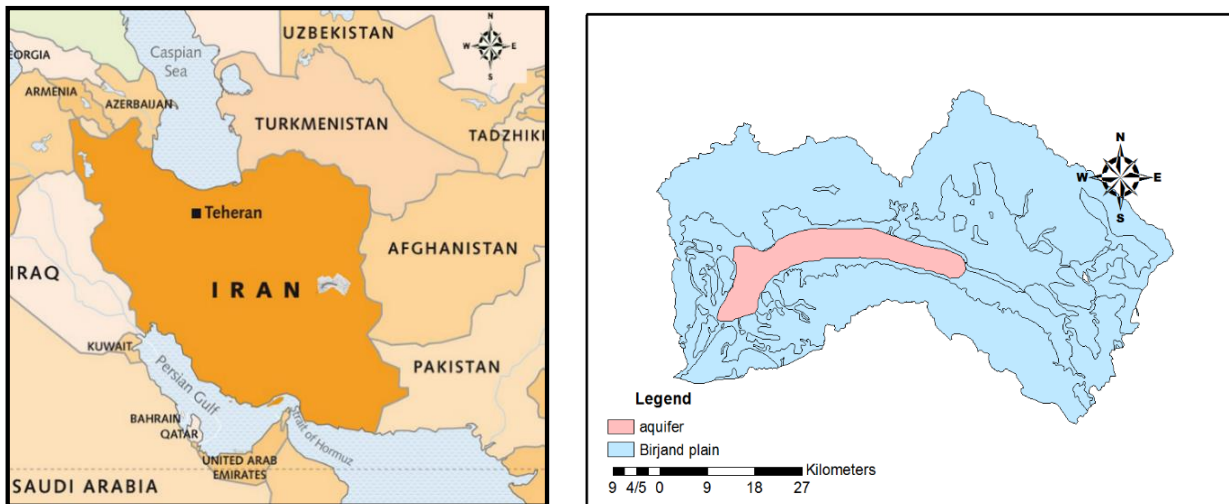
وضعیت بیلان آب زیرزمینی به مدل‌سازی و بررسی قابلیت اعتماد پارامترهای هیدودینامیکی آبخوان نیانگل واقع در کشور چین پرداختند و در نهایت دقت مدل‌سازی خود را بالاتر بردند [۱۴]. توهیدل مصطفی و همکاران (۲۰۱۹) به منظور مدیریت پایدار آب زیرزمینی آبخوانی در شمال غرب بنگلادش، به بررسی و پیش‌بینی سطح آب زیرزمینی در آن‌جا پرداختند. آن‌ها در پژوهش خود به بررسی تاثیر عدم قطعیت‌های مدل‌های مفهومی هیدروژئولوژی و اقلیمی در پیش‌بینی‌شان اشاره کردند. شبیه‌ساز جریان آب زیرزمینی و روش بررسی عدم قطعیت در مطالعه آن‌ها به ترتیب نرم افزار GMS و مدل بی‌زین بود که به کمک ترکیب این دو روش دریافتند که ۲۳ درصد عدم قطعیت‌های موجود، وابسته به مدل‌های مفهومی هیدروژئولوژیکی است و بقیه موارد وابسته به مدل جریان و مدل‌های اقلیمی است [۱۵]. ناسنت و همکاران در سال ۲۰۲۰، به بررسی عدم قطعیت پارامترهای ورودی مدل آب زیرزمینی خود پرداختند. آن‌ها به کمک PMWIN که بر اساس روش عددی تفاضل محدود است، سطح آب زیرزمینی را در آبخوانی از کشور بنگلادش شبیه‌سازی کردند و به کمک ترکیب روش‌های DREAM^۲ و مدل بی‌زین و استفاده از یک معیار درست‌نمایی جدید، عدم قطعیت پارامترهای هدایت هیدرولیکی و آبدی ویژه را بررسی کردند. نتایج آن‌ها کارایی بالای مدل بررسی عدم قطعیت‌شان را نشان می‌داد که به کمک آن توانستند نتایج مدل‌سازی را به داده‌های مشاهداتی نزدیک کنند [۱۶].

در این مطالعه روش جدید فیلتر ذره‌ای که یک روش کالیبراسیون آنلاین است، به مدل بدون شبکه جریان آب زیرزمینی، به منظور یافتن مقادیر دقیق شرایط مرزی و بهبود نتایج آن متصل شده است. از آن جایی که فیلتر ذره‌ای روشی قوی جهت تخمین پارامترهای عدم قطعیت دار است، ترکیب آن با یک مدل جریان دقیق کاربردی بوده و نحوه حرکت آب در آبخوان را با دقت بالایی پیش‌بینی می‌کند. لازم به ذکر است از این روش، برای اولین بار در این حوزه استفاده شده است. در کنار این روش، از مدل بدون شبکه جریان آب زیرزمینی نیز استفاده می‌گردد. این مدل که دقیق‌تر از مدل‌های قدیمی و سنتی است با دقت بالایی، رفتار آب زیرزمینی را بررسی و ارزیابی می‌کند. همچنین به منظور کاهش خطاهای ناشی از مدل جریان، روش تقریب کریجینگ به مدل بدون شبکه اضافه شده است.

و ویلسون [۱۰] ارائه شده است آن‌ها استفاده از روش‌های آماری در کنار روش‌های مبتنی بر مونت کارلو را پیشنهاد دادند و بیان کردند که به عنوان یک ابزار مفید در تحلیل عدم قطعیت موجود در شبیه‌سازی‌های آبی، مورد استفاده قرار گیرد.

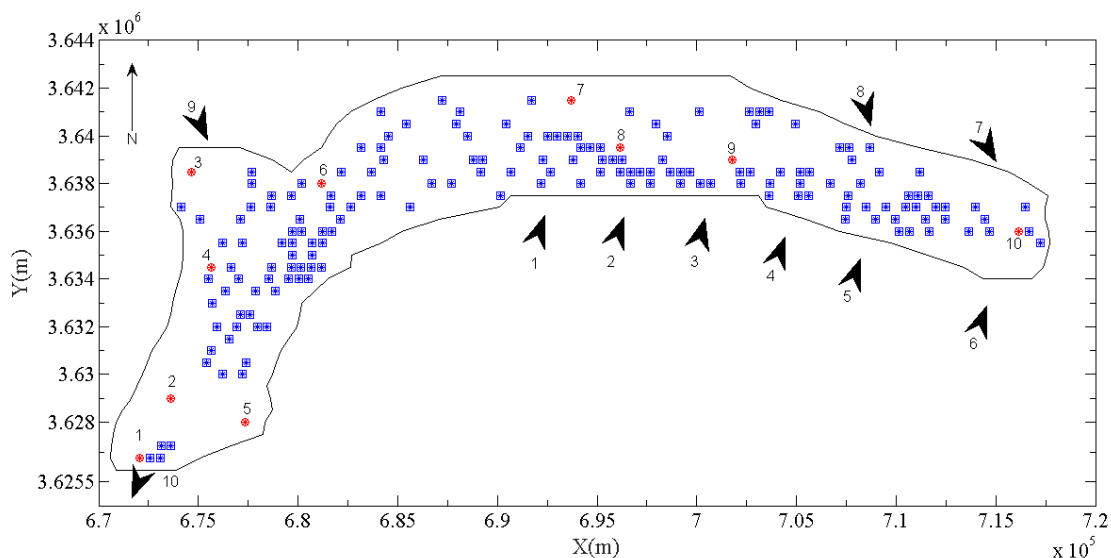
در زمینه تحلیل عدم قطعیت مدل‌های آب زیرزمینی می‌توان به الگوریتم مونت کارلو، زنجیر مارکوف و الگوریتم‌های مشابه آن اشاره نمود. اما از طرف دیگر مطالعات بسیار محدودی در مورد بررسی عدم قطعیت در مدل‌سازی آب‌های زیرزمینی انجام شده است که اغلب آن‌ها در مورد تحلیل حساسیت پارامترهای مدل‌ها و تحلیل شاخص‌های آماری بوده است از جمله چیت‌سازان و همکاران در سال ۱۳۸۷ که با استفاده از روش مشخصه‌های آماری به تحلیل عدم قطعیت مدل ریاضی آبخوان دشت کازرون پرداختند و بهبود قابل توجهی در معیارهای برازش مدل مشاهده نمودند [۱۱]. همچنین رسول زاده و موسوی در سال ۱۳۸۷ به بررسی عدم قطعیت در برآورد پارامترهای مدل آب زیرزمینی دشت ارسنجان با استفاده از الگوریتم لونبرگ که نوعی روش معکوس می‌باشد پرداختند و ابراز داشتند با اینکه سطح آب زیرزمینی شبیه‌سازی شده با مشاهده‌ای تطابق نسبتاً خوبی در مرحله واسنجی دارند اما به علت همبستگی بالای بعضی پارامترها به یکدیگر پارامترهای برآورده شده منحصر به فرد نبوده و از عدم قطعیت بالایی برخوردارند [۱۲]. همچنین از روش گلو^۱ جهت تحلیل عدم قطعیت در مدل‌های جریان آب زیرزمینی استفاده شده است. همراز و همکاران (۲۰۱۵) جریان آب زیرزمینی را در آبخوانی به کمک مدل عددی تفاضل محدود در محیط نرم افزار GMS مدل‌سازی کردند و عدم قطعیت پارامترهای هدایت هیدرولیکی و آبدی ویژه را توسط روش گلو ارزیابی کردند [۱۳]. در سال ۲۰۱۷، عابدینی و همکاران به کمک روش تفاضل محدود در نرم افزار GMS و روش گلو، به بررسی و ارزیابی دو پارامتر هدایت هیدرولیکی و تغذیه در آبخوان بجنورد پرداختند. نتایج آن‌ها نشان داد که پارامتر تغذیه نسبت به سایر پارامترها از قابلیت تشخیص کم‌تری در فرایند واسنجی برخوردار بوده و دارای عدم قطعیت بیشتری است همچنین پارامتر هدایت هیدرولیکی در فرایند واسنجی، به مقادیر دقیق خود نزدیک شده، به طوری که مقدار خطا، به نحو موثری کاهش یافته است [۸].

در سال ۲۰۱۸، دو و همکاران، به کمک مدل مادفلو در نرم افزار GMS و چندین معیار ارزیابی از جمله، معیارهای خطای RMSR و NRMSE، روند دینامیکی سطح آب زیرزمینی، تخلیه از قنات‌ها، مکان‌های با دبی بالا و



شکل ۱. موقعیت جغرافیایی آبخوان و دشت بیرجند [۶]

Fig. 1. Geographical location of Birjand aquifer and its plain



شکل ۲. نمایش چاه‌های بهره‌برداری و مشاهداتی در آبخوان

Fig. 2. Presentation of observation and extraction wells in aquifer

مشخص شده است [۱۷]. همچنین این شکل موقعیت جغرافیایی این آبخوان را در کشور ایران نشان می‌دهد.

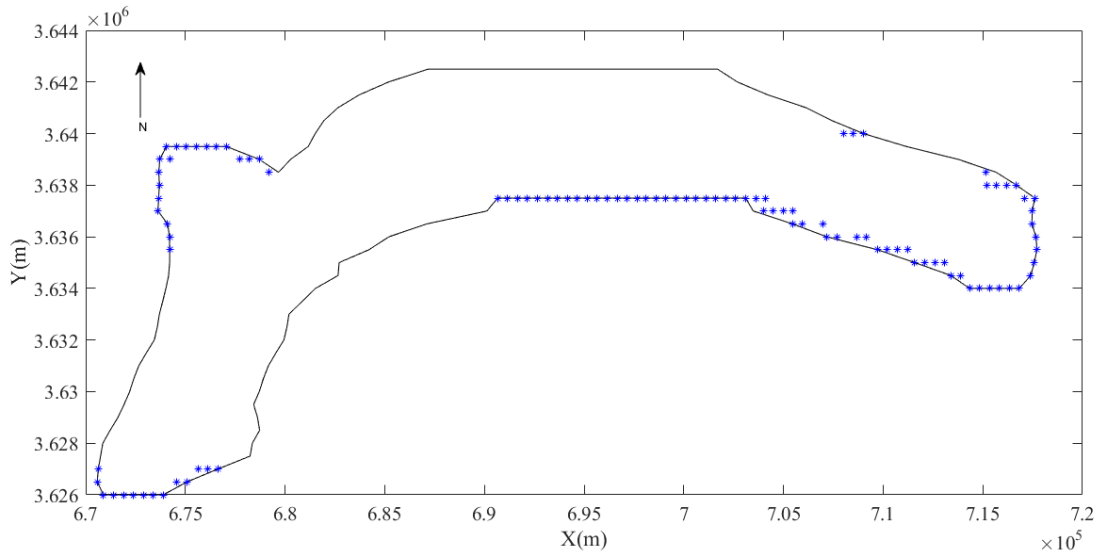
قابل ذکر است ۱۹۰ چاه بهره‌برداری و ۱۰ چاه مشاهداتی در آبخوان وجود دارد که به ترتیب با علامت دایره آبی و دایره قرمز در شکل ۲ به تصویر کشیده شده است.

شرایط مرزی در آبخوان بیرجند از دو نوع هد ثابت و جریان ثابت صفر است. محدوده جبهه‌های ورودی و خروجی (شرایط مرزی هد ثابت) بر

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱- منطقه مورد مطالعه

محدود مطالعاتی آبخوان بیرجند، با مختصات تقریبی ۳۲ و ۳۴ تا ۳۳ و ۸ عرض شمالی، ۵۸ و ۴۱ تا ۵۹ و ۴۴ طول شرقی در استان خراسان جنوبی قرار گرفته است. این آبخوان که از نوع آزاد بوده با مساحت تقریبی ۲۶۹ کیلومتر مربع و میانگین ضخامت اشباع ۳۰ متر با رنگ قرمز در شکل ۱



شکل ۳. نقاط مرزی دارای شرایط مرزی هد ثابت در آبخوان بیرجند

Fig. 3. Nodes with constant head boundaries in Birjand aquifer

وزن هر ذره به روز رسانی می‌شود، مقدار آن وزن، ناشی از شباهت موقعیت ذره به واقعیت اصلی می‌باشد. هنگامی که وزن هر ذره مشخص شد، به منظور جلوگیری از انحطاط (تبهگنی) که در ادامه به آن پرداخته می‌شود، عمل نمونه‌گیری مجدد صورت می‌گیرد. به عبارت واضح‌تر ذراتی که دارای وزن بسیار کمی بوده حذف می‌شوند و ذرات دارای وزن زیاد در ایجاد ذرات جدید حول مختصات خودشان شرکت داده می‌شوند. این کار سبب کاهش میزان محاسبات، جلوگیری از پخش شدن بیهوده ذرات می‌شود.

فیلتر ذره‌ای یک روش موثر برای حل مسئله تخمین در مواجهه با سیستم‌های غیرخطی با نویز گوسی می‌باشد. این روش جزء روش‌های آماری مونت کارلوست [۲۰]. برای توصیف فیلتر ذره‌ای استاندارد، سیستم غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$x_t = f(x_{t-1}) + w_{t-1} \quad (1)$$

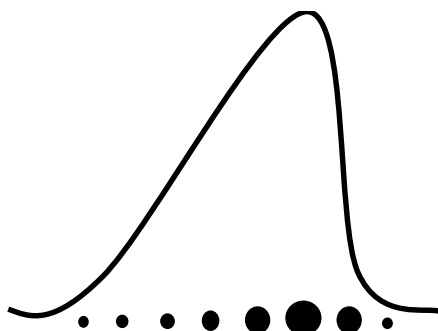
$$y_t = g(x_t) + v_t \quad (2)$$

که در آن x_t بردار حالت، y_t بردار اندازه‌گیری، f و g توابع غیرخطی می‌باشند، همچنین فرض می‌شود که w_t نویز پروسه و v_t نویز اندازه‌گیری است. فیلتر ذره‌ای تابع چگالی احتمالی پسین $p(x_t | y_{1:t})$

اساس نقشه خطوط هم پتانسیل آب زیرزمینی (ایزوپیز) آبخوان بیرجند تهیه می‌شود، خطوط جریان ورودی و خروجی مرز، عمود بر خطوط هم پتانسیل آب زیرزمینی‌ای هستند که تا مرز آبخوان کشیده شده‌اند. طبق پژوهش‌های صورت گرفته شرایط مرزی هد ثابت شامل ۱۰ منطقه می‌باشد، یک منطقه به عنوان شرایط مرزی هد ثابت خروجی و ۹ منطقه شرایط مرزی هد ثابت ورودی هستند [۱۸ و ۱۳]. این مناطق با فلش‌هایی در شکل ۲ مشخص شده‌اند. مقدار هد در مرزهای هد ثابت آبخوان تاثیر بسزایی در جواب‌های مدل دارد. شکل ۳ نقاط مرزی هد ثابت را برای آبخوان بیرجند نشان می‌دهد.

۲-۲- روش فیلتر ذره‌ای

فیلتر ذره‌ای، روش عددی و محاسباتی برای به دست آوردن تابع چگالی احتمال یک فرایند تصادفی و نیز تخمین حالت شی در زمان آینده، بر اساس حالات و مشاهدات در زمان‌های قبل است. فیلتر ذره‌ای به جای یک تخمین، چند تخمین می‌زند تا بر اساس آن‌ها بهترین تخمین را به عنوان حالت پدیده انتخاب کند [۱۹]. برای این امر در ابتدا از حالت قبلی شی نمونه‌های مختلفی اخذ می‌کند تا بر اساس آن‌ها و مشاهدات جدید، حالت‌های جدید را تخمین بزند. ذرات بردارهای حالتی هستند که در یک جا جمع شده‌اند و از توزیع احتمال استفاده می‌کنند. هر ذره یک وزن مربوط به خود می‌گیرد، مقدار این وزن در تکرار اول برای همه ذرات یکسان و $\frac{1}{N}$ بوده [۲۰] N تعداد ذرات پخش شده در فضای حالت است) سپس بر اساس معیار درست‌نمایی



شکل ۴. توصیف تابع پسین با فیلتر ذره‌ای [۲۱]

Fig. 4. Posterior distribution function using particle filter

را به صورت مجموعه‌ای از ذرات وزن داده شده به صورت زیر بیان می‌کند: بازگشتی محاسبه خواهند شد [۲۴]:

$$q(x_{0:t} | y_{1:t}) = q(x_t | x_{0:t-1}, y_{1:t}) \times q(x_{0:t-1} | y_{1:t-1}) \quad (۶)$$

$$S_t = \{ \{x_t^{(i)}, w_t^{(i)}\} | i = 1, \dots, N \} \quad (۳)$$

در این صورت نمونه‌های $x_{0:k}^{(i)}$ از تابع چگالی پیشنهادی $q(x_{0:k-1} | y_{1:k-1})$ نمونه‌برداری شده‌اند با حالت جدید $x_{0:k}^{(i)}$ نمونه‌برداری شده از $q(x_{0:k} | x_{0:k-1}, y_{1:k-1})$ به دست می‌آید که وزن این نمونه‌ها به صورت رابطه ۷ است [۲۵ و ۲۶]:

$$w_t = \frac{p(x_{1:t} | y_{1:t})}{q(x_{1:t-1} | y_{1:t-1}) \times q(x_t | y_t, x_{t-1})} \quad (۷)$$

از طرفی با توجه به قانون بیز، تابع چگالی احتمال پسین را می‌توان به صورت رابطه ۸ نوشت:

$$p(x_{0:k} | y_{1:k}) = \frac{p(y_k | x_{0:k}, y_{1:k-1}) p(x_{0:k} | y_{1:k-1})}{p(y_k | y_{1:k-1})}$$

$$= \frac{p(y_k | x_{0:k}, y_{1:k-1}) p(x_k | x_{0:k-1}, y_{1:k-1})}{p(y_k | y_{1:k-1})} \times$$

$$p(x_{0:k-1} | y_{1:k-1}) \quad (۸)$$

$$= \frac{p(y_k | x_k) p(x_k | x_{k-1})}{p(y_k | y_{1:k-1})} p(x_{0:k-1} | y_{1:k-1})$$

$$\propto p(y_k | x_k, y_{1:k-1}) p(x_k | x_{k-1}) p(x_{0:k-1} | y_{1:k-1})$$

بنابراین می‌توان وزن ذرات را به صورت رابطه بازگشتی ۹ نوشت [۲۳]:

که N بیانگر تعداد ذرات است. شکل ۴ توصیف تابع پسین با فیلتر ذره‌ای را نشان می‌دهد. فیلتر ذره‌ای، تابع پسین $p(x_t | y_{1:t})$ را به صورت رابطه ۴ تقریب می‌زند [۲۳ و ۲۲].

$$p(x_t | y_{1:t}) \sim \sum_{i=1}^N w_t^{(i)} \delta(x_t - x_t^{(i)}) \quad (۴)$$

که $\delta(x)$ تابع دلتای دیراک است و $w_t^{(i)} > 0$ وزن مربوط به $x_t^{(i)}$ و $\sum_{i=1}^N w_t^{(i)} = 1$ می‌باشد.

نمونه‌برداری مستقیم از تابع چگالی احتمال اصلی (که به تابع توزین هدف معروف است) ممکن نیست. از این رو، از روش نمونه‌برداری پر اهمیت استفاده می‌شود. در روش نمونه‌برداری پر اهمیت، به جای نمونه‌برداری مستقیم از تابع هدف، از یک تابع توزین پیشنهادی، نمونه‌برداری می‌شود. با در نظر گرفتن تابع چگالی پیشنهادی به صورت $q(x_{0:t} | y_{1:t})$ وزن ذرات به صورت رابطه ۵ محاسبه می‌شود [۲۲]:

$$w_t^{(i)} = \frac{p(x_{0:t}^{(i)} | y_{1:t})}{q(x_{0:t}^{(i)} | y_{1:t})} \quad (۵)$$

با تجزیه تابع چگالی پیشنهادی به صورت رابطه ۶ وزن‌ها به صورت

بررسی می‌گردد. این متغیر به کمک رابطه ۱۲ محاسبه می‌شود [۲۱]:

$$N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_t^i)^2} \quad (12)$$

که در آن وزن‌ها با w_t^i نمایش داده شده است. با استفاده از تعداد نمونه موثر تعریف شده زمانی که این مقدار از یک مقدار آستانه (N_{thresh}) تعریف شده کمتر باشد ($N_{eff} < N_{thresh}$) عمل نمونه‌گیری مجدد جهت حذف عامل انحطاط صورت می‌گیرد [۳۰]. شانس تخمین‌هایی که وزن مشارکت بالاتری دارند، در گام‌های بعدی برای عدم حذف آن‌ها بیشتر است. مقدار آستانه معمولاً کسری از تعداد دسته ذرات به کار برده شده در محاسبات می‌باشد، و طبق پژوهش‌های گذشته آن را $\frac{N}{2}$ در نظر می‌گیرند [۳۱] و [۳۰]. بنابراین به کمک این روش (نمونه‌گیری مجدد) اثر انحطاط (تبهگنی) را می‌توان کاهش داد و الگوریتم فیلتر ذره‌ای را در طول زمان سازگار کرد. این مهم در بسیاری از رفرنس‌های مربوط به فیلتر ذره‌ای صورت پذیرفته است [۳۲ و ۳۳].

۲-۳- روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین (MLPG^۳)

اتلوری و ژو در سال ۱۹۹۸ اولین بار از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین به منظور حل معادله پتانسیل استفاده کردند [۳۴]. از آن پس این روش توسط تعداد زیادی از محققین و پژوهشگران، در مسائل علمی و مهندسی به کار گرفته شد [۳۵]. در این روش از آن جایی که تابع تست و آزمایش از دو فضای متفاوت انتخاب می‌شوند، اساس و پایه فرمول‌بندی بسیاری از روش‌های بدون شبکه قرار گرفته است [۳۶]. در این روش از تابع تقریب حداقل مربعات متحرک به منظور ساخت تابع شکل استفاده می‌شود، از آن جایی که این تابع شرط دلتای کرونیکور را ارضا نمی‌کند در اعمال شرایط مرزی ضروری (دیریشلت) مسئله دچار مشکلاتی می‌شود و بدین منظور باید از تکنیک‌های دیگری استفاده نمود [۳۷]. تکنیک‌های دیگر، استفاده از روش جایگزینی^۴ و روش تابع پنالتی^۵ می‌باشد [۳۸] از آن جایی که این روش‌ها مقادیری تقریب در نتایج اضافه می‌کنند، بهتر است از روش‌هایی به جای آن‌ها استفاده کرد که این تقریب‌ها را از بین ببرد و مدل را به واقعیت نزدیک کند. گرچه مقادیر ایجاد خطا در این روش‌ها کم هستند، اما حذف آن‌ها از مهم‌ترین اقداماتی است که باید صورت پذیرد. بنابراین

$$w_t^{(i)} = w_{t-1}^{(i)} \frac{p(y_t | x_t^{(i)}) p(x_t^{(i)} | x_{t-1}^{(i)})}{q(x_t^{(i)} | x_{t-1}^{(i)}, y_{1:t})} \quad (9)$$

شکل ۴ نمونه‌گیری پر اهمیت را به صورت گرافیکی نشان می‌دهد. این شیوه به دست آوردن تابع چگالی، احتمال پسین به نمونه‌برداری پر اهمیت بازگشتی SIS^۱ معروف است [۲۳ و ۲۲]. به منظور جلوگیری از پدیده تباهدگی، الگوریتم SIS با نمونه‌گیری مجدد معرفی شده است [۲۷]، که به الگوریتم SIR^۲ معروف می‌باشد و دارای سه گام نمونه‌برداری، محاسبه وزن نمونه‌ها و نمونه‌برداری مجدد است:

۱- نمونه‌برداری

ذرات با نمونه‌برداری از توزیع پیشنهادی به دست می‌آیند.

$$x^{(i)} \sim q(x_t | y_{1:t}) \quad (10)$$

۲- محاسبه وزن نمونه‌ها

$$w_t^{(i)} = w_{t-1}^{(i)} \frac{p(y_t | x_t^{(i)}) p(x_t^{(i)} | x_{t-1}^{(i)})}{q(x_t^{(i)} | x_{t-1}^{(i)}, y_{1:t})} \quad (11)$$

۳- نمونه‌گیری مجدد

ذرات با وزن بالاتر جایگزین ذرات با وزن کمتر می‌شوند. متاسفانه الگوریتم فیلتر ذره‌ای دارای ایراد بزرگی است. به طوری که در گذر زمان واریانس وزن‌های ذرات افزایش می‌یابد و ایجاد انحطاط و ناسازگاری می‌کند [۲۸]. در شرایط مطلوب بدون انحطاط، تمام ذرات دارای وزن‌های متفاوت می‌باشند و به صورت یکسان در محاسبه توزیع چگالی احتمال متغیرهای حالت مشارکت دارند [۲۹]. در این شرایط واریانس وزن‌ها به مقدار صفر میل می‌نماید، و نیازی به نمونه‌گیری مجدد نمی‌باشد. اما در شرایط انحطاط، زمانی که تعدادی از ذرات دارای وزنی بیشتر از ذرات دیگر بوده که تفاوت معنی‌داری با هم پیدا کنند، استفاده از نمونه‌گیری مجدد نیاز خواهد بود. به منظور در نظر داشتن شرایط انجام نمونه‌گیری مجدد بر مبنای رابطه تعریف شده با نام تعداد نمونه موثر (N_{eff}) تعداد ذرات مورد استفاده

3 Meshless Local Petrov-Galerkin

4 Collocation Method

5 Penalty Function

1 Sequential Important Sampling

2 Sequential Important Re-Sampling

که ماتریس‌های A و B در رابطه‌های ۱۵ و ۱۶ تعریف می‌شوند:

$$A = (P^T R^{-1} P)^{-1} P^T R^{-1} \quad (15)$$

$$B = R^{-1} (I - PA) \quad (16)$$

که در آن I ماتریس واحد با اندازه $N \times N$ بوده و بردار $p(x)$:

$$p^T(x) = [p_1(x) p_2(x) \dots p_N(x)] \quad (17)$$

در ماتریس P با اندازه $N \times M$ مقادیر چند جمله‌ای پایه برای هر نقطه نوشته می‌شود:

$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & \dots & p_M(x_N) \\ \dots & & \dots \\ p_1(x_N) & \dots & p_M(x_N) \end{bmatrix} \quad (18)$$

ماتریس‌های R و بردار $r(x)$ به وسیله معادلات ۱۹ و ۲۰ محاسبه می‌شوند:

$$R = \begin{bmatrix} r(x_1, x_1) & \dots & r(x_1, x_N) \\ \dots & & \dots \\ r(x_N, x_1) & \dots & r(x_N, x_N) \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$r^T(x) = [r(x, x_1) r(x, x_2) \dots r(x, x_N)] \quad (20)$$

که در آن تابع همبستگی بین دو نقطه واقع شده در X_j و X_i بوده و بیانگر کواریانس مقدار واقعی $H(x)$ است:

$$r(x_i, x_j) = E [H(x_i) H(x_j)] \quad (21)$$

پس بنابراین با توجه به معادلات بالا، مشاهده می‌شود که مقادیر ماتریس R و $r(x_i, x_j)$ نقش مهمی را در محاسبات ایفا می‌کنند. تابع همبستگی ساده که مکرراً مورد استفاده قرار می‌گیرد، تابع گوسی است

روش کریجینگ متحرک^۱ پیشنهاد می‌گردد. روش کریجینگ متحرک از جمله روش‌هایی است که بدون اضافه کردن تقریب و با ارضای تابع دلتای کرونیکور شرایط مرزی ضروری را اعمال می‌کند [۳۹]. در این مطالعه از آن جایی که نیاز است عدم قطعیت شرایط مرزی مسئله مورد بررسی و تحلیل قرار گیرد از روش کریجینگ متحرک جهت اعمال شرایط مرزی ضروری به صورت مستقیم استفاده می‌شود. این روش از سال ۲۰۱۳ به منظور انجام عمل تقریب‌سازی و ساخت تابع شکل در حوزه جامدات مورد استفاده قرار گرفت که می‌توان به مراجع [۳۹-۴۱] اشاره کرد و برای اولین بار در این مطالعه در حوزه سیالات و به ویژه آب زیرزمینی مورد استفاده قرار گرفته می‌گیرد.

۲-۴- تابع تقریب کریجینگ متحرک (MK)

تابع تقریب کریجینگ متحرک یک روش شناخته شده به منظور درون‌یابی مکانی در هندسه و علم معدن است [۴۲]. نحوه ساخت و فرمول‌بندی تابع شکل این روش به طور مختصر در ادامه توضیح داده می‌شود. تابع $H(x)$ را در نظر بگیرید که در دامنه \dot{U} به وسیله چندین گره گسسته شده باشد. گره‌های N ، $i = 1, 2, \dots, N$ که x_i در آن تعداد کل گره‌های پخش شده در دامنه است. فرض می‌شود که تنها N گره احاطه کننده نقطه x بر روی تابع $H(x)$ تاثیر می‌گذارند. زیردامنه \dot{U}_x که شامل گره‌های احاطه کننده هست، دامنه تقریب نقطه x نامیده می‌شود. تقریب کریجینگ متحرک $H^h(x)$ در نقطه x همانطور که توسط لیو و گو [۳۸] (۲۰۰۱) ارائه شده است، تعریف می‌شود. بنابراین فرمول‌بندی تابع شکل بدون شبکه کریجینگ متحرک به صورت رابطه ۱۳ محاسبه می‌گردد.

$$H^h(x) = \sum_{i=1}^N \phi_i(x) H_i = \Phi(x) H, \quad x \in \Omega_x \quad (13)$$

که در آن $H = [H(x_1) H(x_2) \dots H(x_N)]^T$ بردار مقدار تابع در دامنه \dot{U} است. $\ddot{O}(x)$ بردار تابع شکل با اندازه $1 \times N$ است که به صورت رابطه ۱۴ بیان می‌گردد.

$$\Phi(x) = p^T(x) A + r^T(x) B \quad (14)$$

که از معادله ۲۲ محاسبه می‌گردد [۴۳ و ۳۹]:

$$r(x_i, x_j) = e^{-\alpha_c \left(\frac{r_{ij}}{d_c}\right)^2} \quad (22)$$

که در آن $\alpha_c > 0$ پارامترهای همبستگی استفاده شده به منظور برازش استفاده می‌شوند و مقدار آن مشخص است.

۲-۵- معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد

در شرایطی که آبخوان مورد استفاده، آزاد باشد بر اساس فرض دویوئی و معادلات پیوستگی، معادله حاکم در حالت غیرماندگار رابطه ۲۳ خواهد بود [۴۴ و ۴۵].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y H \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{S_y \partial H}{\partial t} + Q \times \delta(x - x_w)(y - y_w) + q \quad (23)$$

که در آن H سطح آب زیرزمینی (بر حسب متر)؛ k ضریب هدایت هیدرولیکی (بر حسب متر بر روز)، k_x در جهت افقی و k_y در جهت عمودی؛ S_y آبدهی ویژه (بدون بعد)، Q دبی متمرکز (با علامت منفی در صورت چاه بهره‌برداری و با علامت مثبت در صورت چاه تزریق با واحد متر مکعب بر روز)، \vec{a} تابع دلتای دیراک با این مشخصه، زمانی که مختص x و مختص y به ترتیب در مختص افقی (x_w) و عمودی (y_w) چاه باشد، $\vec{a} = 1$ و در غیر این صورت $\vec{a} = 0$ است و q دبی گسترده مانند باران (با علامت مثبت) و یا تبخیر (با علامت منفی) است. لازم به ذکر است از آن جایی که معادله وابسته به زمان بوده (حالت غیرماندگار) شرایط اولیه از حالت ماندگار به دست می‌آید و در رابطه قرار می‌گیرد.

۲-۶- گسسته سازی معادله آب زیرزمینی در آبخوان آزاد

به منظور حل معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین نیازمند به ساده‌سازی و جابه‌جایی‌هایی در معادله بوده به طوری که با توجه به [۴۶]:

$$\frac{\partial H^2}{\partial x} = 2H \frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial H^2}{\partial y} = 2H \frac{\partial H}{\partial y} \quad (24)$$

با جایگذاری ۲۴ در رابطه ۲۳:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial H^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial H^2}{\partial y} \right) = 2 \times \left(\frac{S_y \partial H}{\partial t} + R \right) \quad (25)$$

و با توجه به همسان بودن آبخوان مورد استفاده

$$k \left[\left(\frac{\partial^2 H^2}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 H^2}{\partial y^2} \right) \right] = 2 \times \left(\frac{S_y \partial H}{\partial t} + R \right) \quad (26)$$

نهایتاً پس از گسسته‌سازی به روش باقی مانده وزنی به یک دسته معین (به اندازه تعداد گره‌ها) معادله خطی به شکل $KU = F$ رسیده که فرم گسسته شده هر پارامتر در روابط ۲۷ تا ۲۹ نشان داده شده است. K ماتریس سختی، F ماتریس بار و U ماتریس مجهولات و به عبارتی سطح آب زیرزمینی در هر دوره زمانی است [۴۷].

$$[K] = -2k \left[\iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial x} H^n \frac{\partial \phi}{\partial x} d\Omega + \iint_{\Omega} \frac{\partial W_i}{\partial y} H^n \frac{\partial \phi}{\partial y} d\Omega \right] - 2 \iint_{\Omega} W_i S_y \left(\frac{1}{\Delta t} \right) d\Omega \quad (27)$$

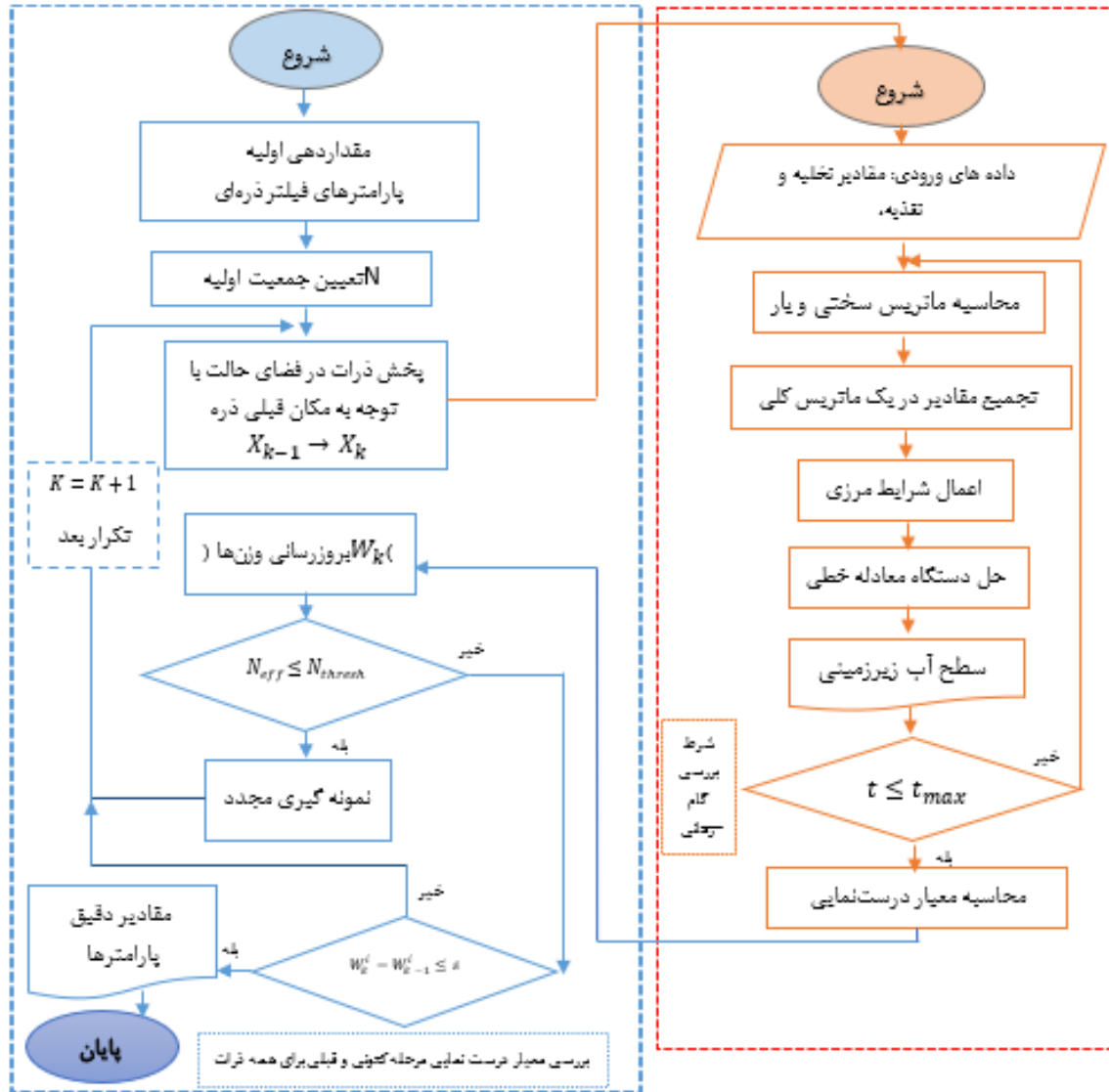
$$[U] = H^{n+1} \quad (28)$$

$$[F] = -2 \iint_{\Omega} W_i S_y \left(\frac{H^n}{\Delta t} \right) d\Omega + 2 \iint_{\Omega} W_i R d\Omega \quad (29)$$

در معادلات بالا W و ϕ به ترتیب تابع وزن اسپلاین درجه سه و تابع شکل کریچینگ متحرک است. تابع W به کمک رابطه ۳۰ محاسبه می‌گردد [۳۷]:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{2}{3} - 4\bar{r}_i^2 + 4\bar{r}_i^3 & \bar{r}_i \leq 0.5 \\ \frac{4}{3} - 4\bar{r}_i + 4\bar{r}_i^2 - \frac{4}{3}\bar{r}_i^3 & 0.5 < \bar{r}_i \leq 1 \\ 0 & \bar{r}_i > 1 \end{array} \right. \quad (30)$$

در ادامه، شکل ۵ نمودار جریانی کار را در این پژوهش نشان می‌دهد.



شکل ۵. نمودار جریان فیلتر ذره‌ای متصل به مدل بدون شبکه

Fig. 5. Flowchart of particle filter linked to the meshless model

فیلتر ذره‌ای به ترتیب ۵۰۰، ۷۰۰، ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ عدد هستند. انتخاب این چهار عدد بر اساس مطالعات قبلی صورت گرفته است [۳۱].

ابعاد فضای حالت، به تعداد پارامترهای عدم قطعیت‌دار است، به این معنی که تعداد ۵۰۰، ۷۰۰، ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ ذره در فضای ۱۰۵ بعدی پراکنده می‌شوند و بر اساس حرکت‌های مکرری که در جهت یافتن مقدار وزن بیشتر انجام می‌دهند در یک منطقه کوچک از این فضا جمع می‌شوند و سپس مقدار دقیق پارامترها را تعیین و مشخص می‌کنند. معیار درست‌نمایی و یا به عبارتی معیار وزنی‌ای که الگوریتم فیلتر ذره‌ای بر اساس آن عملیات فیلتراسیون را انجام می‌دهد در رابطه ۳۱ مشخص شده است. این معیار از مرجع [۳۱] گرفته شده است.

$$w_k^i = w_{k-1}^i \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y - S)^2}{\delta^2}\right) \quad (31)$$

که در آن w_k^i وزن ذره i ام در مرحله k است، w_{k-1}^i وزن ذره در مرحله $k-1$ ، y مقادیر مشاهدات، S مقادیر شبیه‌سازی شده و δ انحراف معیار در نظر گرفته شده است. پس از انتشار ذرات در فضای حالت، به هر ذره، وزنی اختصاص داده می‌شود. با مقایسه هیستوگرام هر ذره با هیستوگرام لحظه قبل، با استفاده از تابع درست‌نمایی مشاهدات، وزن آن ذره مشخص می‌گردد. تابع درست‌نمایی مشاهدات که در رابطه ۳۱ ذکر شده است، ذرات را وزن‌دار کرده و از روی وزن ذرات می‌تواند به تخمین موقعیت در لحظه جاری برسد. در ادامه جدول ۱ مشخصات گره‌های (پارامتر عدم قطعیت‌دار) هر جبهه در آبخوان را مشخص می‌کند.

همانطور که در قسمت منطقه مورد مطالعه ذکر شد، تعداد ۱۰ جبهه هد ثابت در آبخوان وجود دارد که به ترتیب در ستون اول جدول ۱ ذکر شده‌اند. ستون دوم این جدول تعداد گره‌های شامل شده توسط هر جبهه را نشان می‌دهد. بیش‌ترین و کم‌ترین گره‌ها مربوط به جبهه‌های ۹ و ۸ هستند. ستون سوم این جدول، کران بالا و کران پایینی سطح آب زیرزمینی‌ای که هر جبهه می‌تواند اختیار کند را مشخص می‌کند، این مقدار بر اساس کم‌ترین و بیش‌ترین سطح آب زیرزمینی مشاهده شده در آن ناحیه در نظر گرفته شده است. در نهایت ستون چهارم، واریانس مربوط به ذرات پراکنده شده در این بازه را نشان می‌دهد. این مقدار از آنجایی که برای یک جنس پارامتر یعنی سطح آب زیرزمینی است، برای همه گره‌ها و جبهه‌ها یکسان است. مقدار آن با توجه به مطالعه [۳۱] برداشته شده است.

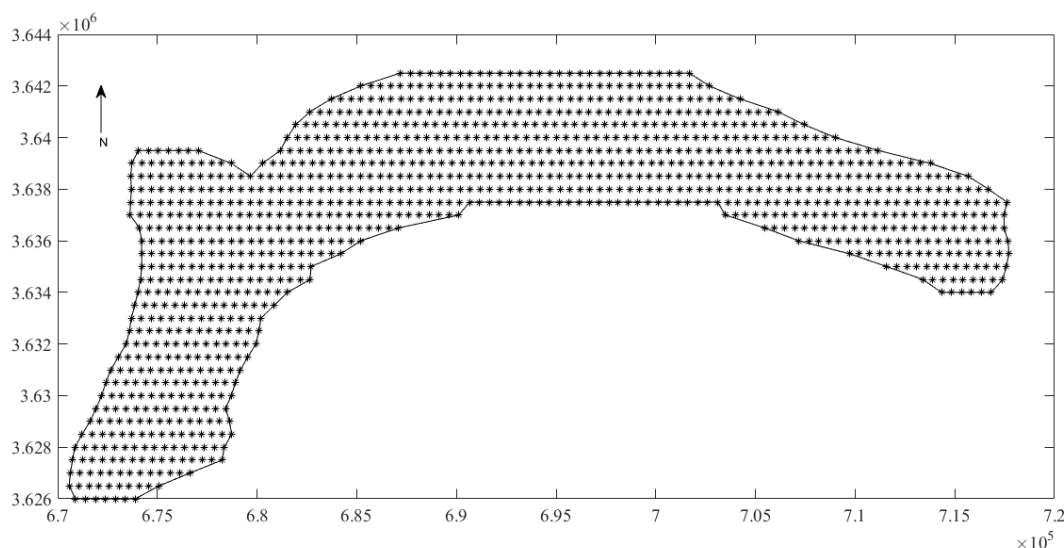
همانطور که از نمودار جریانی بر می‌آید، در مراحل اولیه، بازه تغییرات سطح آب زیرزمینی برای هر یک گره‌ها (پارامترهای عدم قطعیت‌دار) تعیین می‌شود، سپس تعداد مشخص ذره در فضایی با ابعاد تعداد پارامترهایی که عدم قطعیت‌شان باید مورد بررسی قرار گیرد، پخش می‌شود. در تکرار اول ($k=0$) مکان ذرات در فضای تشکیل شده به صورت تصادفی بوده ولی در تکرارهای بعدی متناسب با مقدار وزنی که بر اساس تابع درست‌نمایی دریافت می‌کنند، تغییر می‌کند. پس از پخش ذرات، به هر کدام وزنی اختصاص می‌یابد، مقدار این وزن در تکرار اول یکسان می‌باشد. بر اساس مقادیر سطح آب زیرزمینی‌ای که الگوریتم فیلتر ذره‌ای برای گره‌های شرط مرزی نشان می‌دهد، مدل بدون شبکه جریان اجرا می‌شود. لازم به ذکر است، از آنجایی مدل جریان، در حالت غیرماندگار است و برای یک سال با گام زمانی ماهانه اجرا می‌شود پارامتر t_{max} برابر ۱۲ بوده و این الگوریتم ۱۲ بار تکرار می‌شود. در انتها تابع درست‌نمایی محاسبه شده و بر اساس آن وزن‌های جدید به ذرات اختصاص می‌یابد. از آنجایی که فیلتر ذره‌ای در طول زمان ناسازگار است، از تکنیک نمونه‌گیری مجدد جهت رفع انحطاط استفاده می‌شود. در صورت انحطاط، نمونه‌گیری مجدد صورت می‌گیرد و وزن‌های ذراتی که ایجاد تپه‌گنی می‌کنند اصلاح می‌شود. در صورتی که شرط $N_{eff} < N_{thresh}$ برقرار نبود، شرط توقف یعنی اختلاف تابع درست‌نمایی برای همه ذرات در مرحله کنونی و قبلی محاسبه شده، در صورتی که کمتر از یک مقدار خیلی ناچیز ($0/00000001$) باشد، الگوریتم فیلتر ذره‌ای متوقف شده و مقادیر دقیق پارامترها را خروجی می‌دهد، در غیر این صورت به مرحله بعدی می‌رود.

محدوده‌های شرایط مرزی هد ثابت، در آبخوان بیرجند به کمک پژوهشگران قبلی در پژوهش‌های [۱۸ و ۱۳] مشخص شده است. اما مقدار دقیق سطح آب در این مرزها تعیین نشده است. هدف اصلی در این مطالعه یافتن مقادیر دقیق سطح آب در این مرزهاست. همانطور که در شکل ۳ مشخص شده است. تعداد ۱۰۵ گره مرزی با شرایط مرزی هد ثابت وجود دارند. به تعداد گره‌های مرزی هد ثابت، پارامتر عدم قطعیت‌دار وجود دارد که به کمک روش فیلتر ذره‌ای مقدار دقیق این پارامترها تعیین و مشخص می‌شود. بدین منظور، بازه‌ای از سطح آب زیرزمینی برای هر کدام از گره‌ها و یا جبهه‌های ورودی و خروجی آبخوان، در نظر گرفته شده است، این مقادیر، بر اساس کم‌ترین و بیش‌ترین سطح آب زیرزمینی مشاهده شده در آن ناحیه از آبخوان به دست آمده است. تعداد ذرات در نظر گرفته شده برای الگوریتم

جدول ۱. مشخصات پارامترهای در نظر گرفته شده در فیلتر ذره‌ای

Table 1. Specification of considered parameters in particle filter

| شماره جبهه | تعداد نقاط شامل شده (تعداد پارامترها) | بازه تغییرات | واریانس | شماره جبهه | تعداد نقاط شامل شده (تعداد پارامترها) | بازه تغییرات | واریانس |
|------------|---------------------------------------|--------------|---------|------------|---------------------------------------|--------------|---------|
| ۱ | ۷ | [۱۳۱۲، ۱۳۳۵] | ۱ | ۶ | ۱۶ | [۱۳۷۶، ۱۳۹۶] | ۱ |
| ۲ | ۱۰ | [۱۳۲۷، ۱۳۴۰] | ۱ | ۷ | ۱۳ | [۱۳۹۲، ۱۳۹۸] | ۱ |
| ۳ | ۹ | [۱۳۳۸، ۱۳۵۹] | ۱ | ۸ | ۳ | [۱۳۶۵، ۱۳۹۸] | ۱ |
| ۴ | ۸ | [۱۳۵۵، ۱۳۶۵] | ۱ | ۹ | ۲۰ | [۱۲۹۵، ۱۳۱۳] | ۱ |
| ۵ | ۵ | [۱۳۶۱، ۱۳۸۲] | ۱ | ۱۰ | ۱۴ | [۱۲۶۷، ۱۲۷۸] | ۱ |



شکل ۶. نحوه پخش نقاط گرهی در آبخوان بیرجند

Fig. 6. Scattering field nodes in Birjand aquifer

۳- نتایج

حل معادلات دیفرانسیل جزئی جریان آب زیرزمینی مستلزم تعیین مقادیر شرایط مرزی از نظر سطح آب و استفاده از اطلاعات موجود در این مرزهاست، در غیر این صورت، غیرقابل حل خواهد بود و یا جواب دقیقی نخواهد داد. تعیین مقادیر شرایط مرزی یکی از مشکل‌ترین مراحل در مدل‌سازی جریان آب‌های زیرزمینی است که به کمک روش فیلتر ذره‌ای این امر میسر می‌گردد.

در کنار مدل فیلتر ذره‌ای، مدل بدون شبکه جریان آب زیرزمینی متصل به آن اجرا می‌شود. این مدل تابعی از برنامه اصلی (ارزیابی عدم قطعیت به

کمک فیلتر ذره‌ای) است. این مدل قبلاً توسط نویسندگان همین مقاله، صحت‌سنجی شده و کالیبره شده است و نتایج آن در پژوهش [۴۸] ارائه شده است. در این مدل، برخلاف مدل‌های عددی دیگر مانند مدل تفاضل محدود و اجزاء محدود که وابسته به شبکه‌بندی هستند و معادلات را بر روی شبکه اعمال می‌کنند، میدان حل به کمک گروهی از نقاط گرهی مشخص می‌شود و معادلات بر روی آن‌ها اعمال می‌گردد. هر گره اطلاعاتی همچون، هدایت هیدرولیکی، آبدهی ویژه، مقدار دبی (در صورت چاه)، مقدار بارندگی و تبخیر در بر دارد. در آبخوان بیرجند تعداد ۱۱۷۵ گره با فاصله ۵۰۰ متر پراکنده شده است که نحوه پراکنده شدن این گره‌ها در شکل ۶ مشخص شده است.

این در حالی است که در روش بدون شبکه مرز آبخوان بدون هیچ تغییری مدل می‌شود.

اما نتایج بهتر روش بدون شبکه پتروو-گالرکین متصل به فیلتر ذره‌ای، نسبت به مدل بدون شبکه و تفاضل محدود، اتصال یک الگوریتم کالیبراسیون قدرتمند به مدل جریان است؛ که با انجام اقداماتی مقدار دقیق پارامترهای عدم قطعیت‌دار را که در اینجا سطح آب زیرزمینی در نقاط مرزی است را محاسبه می‌کند و در مدل قرار می‌دهد.

به منظور ارزیابی دقت روش‌ها به کمک تنها یک عدد، از معیار خطاهای پر کاربرد در حوزه مطالعات آب زیرزمینی استفاده شده است. خطای میانگین، خطای میانگین مطلق و خطای جذر میانگین مربعات به عنوان معیارهایی برای تشخیص عملکرد مدل استفاده شدند. واحد این خطاها بر اساس واحد مقادیر وارد شده در آن‌هاست. این خطاها به ترتیب از روابط ۳۲ تا ۳۴ محاسبه می‌شوند.

$$ME = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (h_o - h_s)}{m \times n} \quad (32)$$

$$MAE = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |h_o - h_s|}{m \times n} \quad (33)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (h_o - h_s)^2}{m \times n}} \quad (34)$$

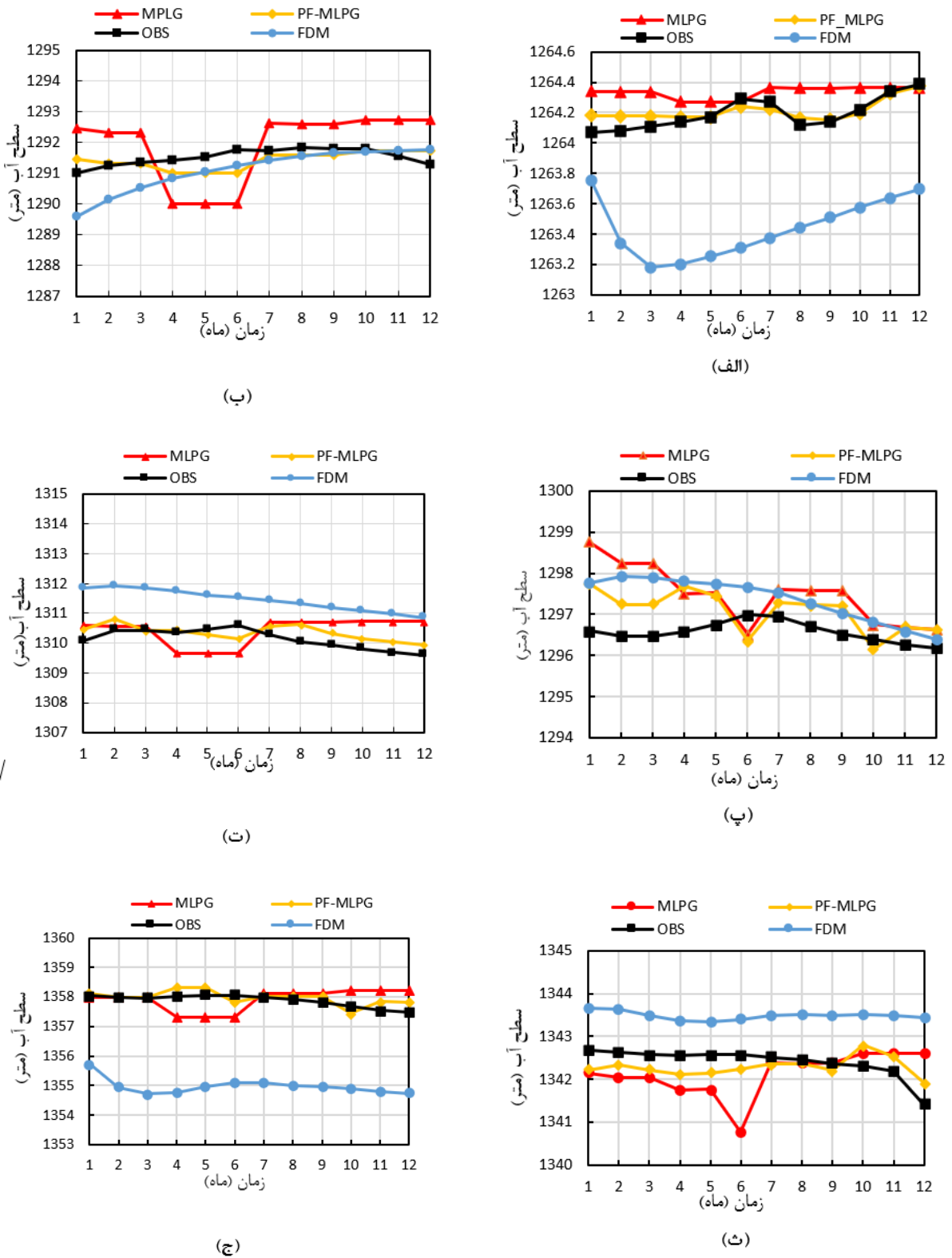
که در آن h_o و h_s به ترتیب سطح آب مشاهده شده و شبیه‌سازی شده است و m و n تعداد گام‌های زمانی و تعداد پیرومترهاست. با توجه به روابط ۳۳-۳۱ این خطاها محاسبه شده که نتایج آن در جدول ۲ ذکر شده است.

بر اساس معیار خطای جذر میانگین مربعات که به عنوان معیار اصلی جهت بررسی دقت مدل در مطالعات آب زیرزمینی به شمار می‌رود [۶]، روش‌های بدون شبکه متصل به فیلتر ذره‌ای فارغ از تعداد ذرات نتایج بهتری نسبت به روش بدون شبکه و مخصوصاً تفاضل محدود ارائه کرده است. روش بدون شبکه متصل به فیلتر ذره‌ای در سه حالت با تعداد ذرات ۵۰۰، ۷۰۰ و ۱۰۰۰ اجرا شد. نتایج در حالتی که تعداد ذرات ۱۰۰۰ عدد باشند بسیار بهتر از دو حالت دیگر است. بنابراین همان طور که هاونگی (۲۰۱۸) در پژوهش خود به آن اشاره کرده است، با افزایش تعداد ذرات در مسائلی که

همچنین این مدل برای یک سال آبی و با گام زمانی ماهانه اجرا می‌گردد. پس از اجرای مدل فیلتر ذره‌ای متصل شده به مدل جریان آب زیرزمینی، مقادیر دقیق شرط مرزی هر یک از گره‌ها محاسبه شد و در مدل جریان به تنهایی قرار داده شد، تا به کمک آن مدل‌سازی سطح آب زیرزمینی صورت بگیرد. شکل‌های ۷ سطح آب زیرزمینی مشاهده شده و به دست آمده به کمک روش‌های بدون شبکه متصل به فیلتر ذره‌ای ۱۰۰۰ ذره، بدون شبکه و تفاضل محدود را برای چند پیرومتر انتخابی، به تصویر کشیده است.

شکل‌های ۷ تغییرات سطح آب زیرزمینی، در مکان پیرومترها را نشان می‌دهد، قسمت الف، ب، پ، ت، ث و ج به ترتیب مربوط به پیرومترهای یک، دو، چهار، پنج، هفت و هشت هستند. در این شکل‌ها، نمودارهای قرمز، آبی، زرد و مشکی به ترتیب نشان دهنده سطح آب محاسبه شده توسط روش بدون شبکه، روش تفاضل محدود، روش بدون شبکه متصل به فیلتر ذره و سطح آب مشاهده شده است. نمودار معیار، نمودار سطح آب مشاهده شده و به رنگ مشکی است و باقی نمودارها نسبت به آن سنجیده می‌شوند. در قسمت الف شکل ۷ سطح آب مشاهده شده ابتدا یک روند افزایشی در ۶ ماه اول داشته و سپس روند کاهشی و مجدداً افزایشی دارد. در این قسمت، نموداری که بیش‌ترین تطابق را با نمودار معیار دارد مربوط به روش بدون شبکه متصل به فیلتر ذره‌ای است که تقریباً همان روند را تکرار می‌کند. پس از آن، نمودار روش بدون شبکه و در نهایت روش تفاضل محدود به نمودار معیار نزدیک هستند. لازم به ذکر است نتایج روش‌های بدون شبکه و تفاضل محدود به ترتیب برگرفته از مطالعات [۶] و [۴۸] می‌باشند. قسمت ب این شکل، باز هم روش بدون شبکه متصل به فیلتر ذره‌ای، مطابقت بیشتری نسبت به نمودار معیار دارد. در این نمودار بر خلاف نمودارهای دیگر روش تفاضل محدود نسبت به روش بدون شبکه بهتر عمل کرده و دقت بالاتری را از خود نشان می‌دهد. در قسمت ج شکل ۷، همه نمودارها روند نزولی خود را دارند، آن چه مشاهده می‌شود دقت بالاتر روش بدون شبکه متصل به فیلتر ذره‌ای نسبت به باقی موارد است. در قسمت‌های ت، ث ج و چ، این نتیجه تکرار شده و دقت روش بدون شبکه متصل به فیلتر ذره‌ای کاملاً محسوس و قابل مشاهده است.

نتایج بهتر روش بدون شبکه نسبت به روش‌های وابسته به شبکه همچون تفاضل محدود که در نتایج آن ذکر شد، ناشی از عدم وابستگی آن به شبکه‌بندی میدان حل و مشکلات دنباله‌روی آن است. از آن جایی که روش تفاضل محدود، محدود به ایجاد شبکه‌های مستطیلی است، دامنه آبخوان را به درستی مدل نمی‌کند و باعث ایجاد خطا در نتایج می‌گردد و



شکل ۷. سطح آب مشاهداتی و محاسباتی با روش‌های مختلف عددی در بازه زمانی مدل‌سازی

Fig. 7. Observed and simulated groundwater head with different numerical methods in simulation period

جدول ۲. محاسبه خطای میانگین، مطلق میانگین و جذر میانگین مربعات در حالت غیرمادگار

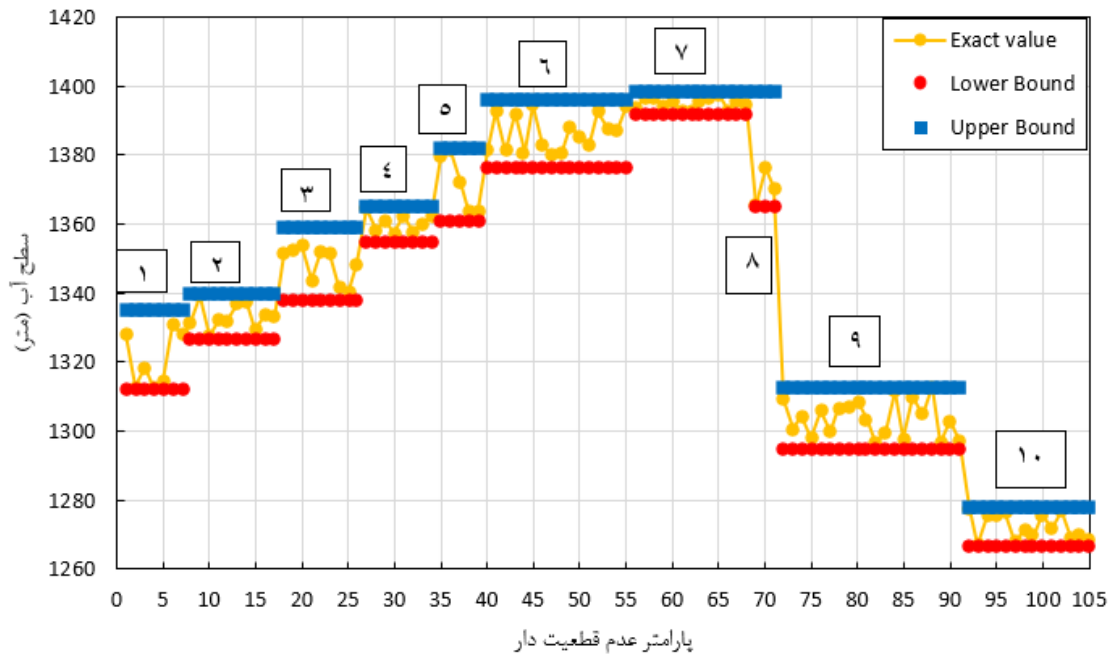
Table 2. Computation of mean, mean absolute and root mean square errors in unsteady state

| روش تفاضل محدود [۴۸] | روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین [۶] | روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین متصل به فیلتر ۱۰۰۰ ذره | روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین متصل به فیلتر ۷۰۰ ذره | روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین متصل به فیلتر ۵۰۰ ذره | |
|----------------------|--------------------------------------|---|--|--|-------------------------------|
| ۰/۱۵۹ | -۰/۱۲ | -۰/۰۶۱ | -۰/۰۸۳ | -۰/۱۰۱ | خطای میانگین (متر) |
| ۱/۴۳۴ | ۰/۵۷۳ | ۰/۲۹۸ | ۰/۳۳۲ | ۰/۴۱۶ | خطای مطلق میانگین (متر) |
| ۱/۱۹۷ | ۰/۷۵۷ | ۰/۳۸۶ | ۰/۴۰۱ | ۰/۴۸۴ | خطای جذر میانگین مربعات (متر) |

۴- نتیجه گیری

فیلتر ذره‌ای از جمله روش‌های همگون‌سازی داده‌ها و کالیبراسیون آنلاین است که در جهت تخمین پارامترهای عدم قطعیت‌دار یک سیستم دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد. اتصال این روش به مدل قدرتمند و دقیقی بدون شبکه آب زیرزمینی، موجب ارائه نتایجی با دقت بالاتری می‌شود، که با شرایط واقعی آبخوان، تطابق اکثریت دارد. در این روش ابتدا ذراتی با وزن‌های یکسان، در یک فضای حالت پخش می‌شوند. ابعاد فضای حالت در این روش به تعداد پارامترهای عدم قطعیت‌دار یعنی ۱۰۵ بعد است، که تعداد ۵۰۰، ۷۰۰ و ۱۰۰۰ ذره در این فضا، به منظور یافتن مقادیر دقیق شرایط مرزی هد ثابت پراکنده شدند. آبخوان مورد استفاده، آبخوان آزاد دشت بیرجند واقع در استان خراسان جنوبی است که تک لایه بوده و ضخامت اشباع ۳۰ متر دارد. بر اساس عملکرد الگوریتم‌های کالیبراسیون و مدل‌سازی، مقادیر دقیق هد در ۱۰۵ گره مرزی آبخوان محاسبه شد. با ورود این مقادیر به الگوریتم شبیه‌ساز، سطح آب به دست آمده و با مقادیر مشاهده‌ای مقایسه شد. نکته مهم افزایش دقت مدل‌سازی با افزایش تعداد ذرات پراکنده شده در روش فیلتر ذره‌ای است، به طوری که خطای معیار را که جذر میانگین مربعات است به ترتیب برای ۵۰۰، ۷۰۰ و ۱۰۰۰ ذره به ترتیب ۰/۴۸۴، ۰/۴۰۱ و ۰/۳۸۶ متر محاسبه شد و این در حالی است که مدل بدون شبکه که از روش تفاضل محدود بسیار دقیق‌تر است، به تنهایی خطای ۰/۷۵۷ متر را نشان می‌دهد. این کاهش خطا، دقت کارشناسان آب

پارامترهای عدم قطعیت‌دار زیادی دارند، نتایج بهتری کسب می‌شود [۴۹]. اما این بدین معنا نیست که همیشه این نتیجه رخ می‌دهد، چرا که مدل، برای تعداد ۲۰۰۰ ذره هم اجرا شد، اما نتایج آن تفاوت معناداری با نتایج ۱۰۰۰ ذره نداشت (اختلاف خطای جذر میانگین مربعات کمتر از ۰/۰۰۰۰۰۱ متر). نکته دیگر اجرا شدن مدل بدون شبکه متصل به فیلتر ذره بر روی سیستم مرکز محاسبات سنگین دانشگاه سیستان و بلوچستان است. این مدل با افزایش تعداد ذره سنگین‌تر شده و زمان بیشتری را جهت اجرا صرف می‌کند. با توجه به پیشرفت زمانی در انجام محاسبات، مقادیر پارامترها به سمت یک مقدار ثابت که تکرار بیشتری را در محاسبه‌ها داشته و نیز وزن بالاتری را با استفاده از تابع درست‌نمایی مشاهدات، به خود اختصاص می‌دهند، میل می‌کنند، نمودار توزیع حاشیه این پارامترها که در ده جبهه قرار گرفته‌اند در شکل ۸ نشان داده شده است. شکل ۸ کران بالا و پایین و مقادیر دقیق محاسبه شده توسط الگوریتم فیلتر ذره‌ای را برای گره‌های قرار گرفته در ده جبهه را نشان می‌دهد. نمودار زرد رنگ مقادیر دقیق هستند که در بازه تعیین شده به کمک الگوریتم فیلتر ذره‌ای محاسبه شدند. نقاط آبی، حد بالای سطح آب را برای گره‌های هر جبهه نشان می‌دهد که این مقادیر با توجه به سطح آب مشاهده شده در آن ناحیه به دست آمده است. همچنین نقاط قرمز حد پایین را برای پارامترهای عدم قطعیت‌دار را به نمایش می‌گذارد.



شکل ۸. نمودار حاشیه‌ای پارامترهای عدم قطعیت‌دار

Fig. 8. Marginal graph of uncertain parameters

in unconfined aquifers using meshless local Petrov-Galerkin method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 48 (2017) 43-52.

- [6] A. Mohtashami, A. Akbarpour and M. Mollazadeh, Development of two dimensional groundwater flow simulation model using meshless method based on MLS approximation function in unconfined aquifer in transient state, *Journal of Hydroinformatics*, 19(5) (2017) 640-652.
- [7] T. Pathania, A. Bottacin-Busolin, A. K. Rastogi, T. I. Eldho, Simulation of Groundwater Flow in an Unconfined Sloping Aquifer Using the Element-Free Galerkin Method, *Water Resources Management*, 33 (2019) 2827-2845.
- [8] M. Abedini, A. N. Ziai, M. Shafiei, B. Ghahraman, H. Ansari and J. Meshkini, Uncertainty Assessment of Groundwater Flow Modeling by Using Generalized Likelihood Uncertainty Estimation Method (Case Study: Bojnourd Plain), *Iranian Journal of Irrigation and Drainage*, 10(6) (2017) 755-769.

را جهت برنامه‌ریزی‌های مختلف آب در این آبخوان افزایش می‌دهد که از مهم‌ترین اهداف این تحقیق است.

منابع

- [1] M. Ghousehei, Groundwater balance computation of Damghan aquifer, Kermanshah, 2011.
- [2] A. Akbarpour, M. Azizi and M. Shirazi, Groundwater Management of Mokhtaran aquifer with using finite difference mathematical finite difference, Tehran, (2012) 1-12.
- [3] A. P. Markopoulos, N. E. Karkalos and E. Papazoglou, Meshless Methods for the Simulation of Machining and Micro-machining: A Review, 1st ed., *Archives of Computational Methods in Engineering*, (2019).
- [4] A. Mohtashami, A. Akbarpour and M. Mollazadeh, Modeling of groundwater flow in unconfined aquifer in steady state with meshless local Petrov-Galerkin, *Modares Mechanical Engineering*, 17(2) (2017) 393-403.
- [5] B. Swathi, T. I. Eldho, Groundwater flow simulation

- [18] S. Sadeghi Tabas, A. Akbarpour, M. Pourreza Bilondi and S. Z. Samadi, Application of Cuckoo Optimization Algorithm in Automatic Calibration of Aquifer Hydrodynamic Parameters using Mathematical Model, *Iranian Journal of Irrigation and Drainage*, 9(2) (2015) 345-356.
- [19] S. R. Kambhampati, *Target/Object Tracking Using Particle Filtering*, Wichita: Wichita State University, (2008).
- [20] P. Fearnhead and H. R. Kuensch, Particle Filters and Data Assimilation, *Annual Review of Statistics and Its Application*, 5(1) (2018) 421-449.
- [21] R. Havangi, Increasing consistency of particle filter using the classic method and particle swarm algorithm, *Computational Intelligence in Electrical Engineering*, 7(2) (2016) 77-88.
- [22] S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon and T. Clapp, tutorial on particle filters for Online nonlinear/nongaussian Bayesian tracking, *IEEE Transaction Signal Process*, 50(2) (2002) 174-188.
- [23] B. Ristic, S. Arulampalam and N. Gordon, in *Beyond Kalman Filter: Particle Filters Tracking Applicant*, Boston: 1st ed, (2004).
- [24] T. Li, M. Bolic and P. M. Djuric, Resampling Methods for Particle Filtering: Classification, implementation and strategies, *IEEE Signal Processing Magazine*, 32(3) (2015) 70-86.
- [25] G. Choe, T. Wang, F. Liu, S. Hyon and J. Ha, Particle filter with spline resampling and global transition model, *IET Computer Vision*, 19(2) (2015) 184-197.
- [26] F. Ruknudeen and S. Asokan, Application Particle Filter to On-Board Life Estimation of LED Lights, *IEEE Photonics Journal*, 9(3) (2017) 1:17.
- [27] G. Y. Zhang, Y. M. Cheng, F. Yang, Q. Pan and Y. Liang, Design of an Adaptive Particle Filter Based on Variance Reduction Technique, *Acta Automatica Sinica*, 36(7) (2010) 1020-1024.
- [28] M. Ramgraber, C. Albert, M. Schirmer, Data Assimilation and Online Parameter Optimization in Groundwater Modeling using Nested Particle Filters, [9] G. Pohl, K. Pohlmann, A. E. Hassan, J. B. Chapman and T. Mihevic, *Assessing Groundwater Model Uncertainty for the Central Nevada Test Area*, Reno, Nevada, USA, (2002).
- [10] M. D. Dettinger and J. L. Wilson, First order analysis of uncertainty in numerical models of groundwater flow part: 1. Mathematical development, *Water Resource Research*, 17(1) (1981) 149-161.
- [11] M. Chitsazan, M. J. Abedini and M. Salek, The investigation and quantifying the uncertainty of groundwater models in Kazeroun aquifer with using statistic parameters, *Journal of Irrigation Sciences and Engineering (JISE)*, 19 (2008) 17-33.
- [12] A. Rasoulzadeh and S. A. A. Mousavi, Using inverse WTF uncertainty method in estimation of groundwater model parameters, Tehran, (2008).
- [13] B. S. Hamraz, A. Akbarpour, M. Pourreza Bilondi and S. Sadeghi Tabas, On the assessment of ground water parameter uncertainty over an arid aquifer, *Arabian Journal of Geosciences*, 8 (2015) 10759-10773.
- [14] X. Du, X. Lu, J. Hou, X. Ye, Improving the Reliability of Numerical Groundwater Modeling in a Data-Sparse Region, *Water*, 10(3) (2018) 289-304.
- [15] S. M. Touhidul Mustafa, M. Moudud Hasan, A. Kumar Saha, R. Parvin Rannu, E. V. Uytven, P. Willems, M. Huysmans, Multi-model approach to quantify groundwater-level prediction uncertainty using an ensemble of global climate models and multiple abstraction scenarios, *Hydrology and Earth System Sciences*, 23 (2019) 2279-2303.
- [16] J. Nossent, S. M. Touhidul Mustafa, G. Ghysels, M. Huysmans, Integrated Bayesian Multi-model approach to quantify input, parameter and conceptual model structure uncertainty in groundwater modeling, *Environmental Modelling and Software*, 126 (2020) 104654-104671.
- [17] S. Sadeghi tabas, S. Z. Samadi, A. Akbarpour and M. Pourreza Bilondi, Sustainable groundwater modeling using single-and multi-objective optimization algorithms, *Journal of Hydroinformatics*, 18(5) (2016) 1-18.

- [39] S. Khankham, A. Luadsong and N. Ascharyaphohta, MLPG method based on moving kriging interpolation for solving convection–diffusion equations with integral condition, *Journal of King Saud University - Science*, 27(4) (2015) 292-301.
- [40] B. Dai, J. Cheng, B. Zheng, A Moving Kriging Interpolation-Based Meshless Local Petrov–Galerkin Method for Elastodynamic Analysis, *International Journal of Applied Mechanics*, 5(1) (2013) 1350011-1350032.
- [41] W. Feng, G. Lin, B. Zheng, Z. Hu, J. Liu, MLPG method based on moving kriging interpolation for structural dynamic analysis, *Journal of Vibration and Shock*, 33(4) (2014) 27-31.
- [42] L. Lucy, A numerical approach to testing the fission hypothesis, *Astrophysics Journal*, 82 (1977) 1013-1024.
- [43] N. Thamareerat, A. Luadsong and N. Ascharyaphohta, The meshless local Petrov-Galerkin method based on moving Kriging interpolation for solving the time fractional Navier-Stokes equations, *Springerplus*. 5(1) (2016) 417.
- [44] J. Dupouit, *Estudes Theoriques et Pratiques sur le Mouvement desEaux*, Paris: Dud, (1863).
- [45] H. F. Wang and M. P. Anderson, *Introduction to groundwater modeling: finite difference and finite element methods*, first ed., Academic Press, (1995).
- [46] A. Mohtashami, S. A. Hashemi Monfared, G. Azizyan and A. Akbarpour, Determination the capture zone of wells by using meshless local Petrov-Galerkin numerical model in confined aquifer in unsteady state(Case study: Birjand Aquifer), *Iranian journal of Ecohydrology*, 6(1) (2019) 239-255.
- [47] A. Mohtashami, S. A. Hashemi Monfared, G. Azizyan and A. Akbarpour, Determination of the optimal location of wells in aquifers with an accurate simulation-optimization model based on the meshless local Petrov-Galerkin, *Arabian Journal of Geosciences*, 13(2) (2020) 1-13.
- [48] S. Sadeghi Tabas, A. Akbarpour, M. Pourreza-Bilondi, S. Samadi, Toward reliable calibration of aquifer hydrodynamic parameters: characterizing and *Water Resources Research*, 55(11) (2019) 9724-9747.
- [29] M. Ahmadizadeh, S. Marofi, Bayesian analysis and particle filter application in rainfall-runoff models and quantification of uncertainty, *Journal of Water and Soil Conservation*, 24(1) (2017) 251-264.
- [30] G. Manoli, M. Rossi, D. Pasetto, R. Deiana, S. Ferraris, G. Cassiani, M. Putti, An iterative particle filter approach for coupled hydro-geophysical inversion of a controlled infiltration experiment, *Journal of Computational Physics*, 283 (2015) 37-51.
- [31] G. Field, G. Tavisov, C. Brown, A. Harris and O. P. Kreidl, Particle Filters to Estimate Properties of Confined Aquifers, *Water Resources Management*, 30 (2016) 3175-3189.
- [32] T. Li, G. Yuan, W. Li, Particle filter with novel nonlinear error model for miniature gyroscope-based measurement while drilling navigation, *Sensors*, 16(3) (2016) 371-395.
- [33] H. Moradkhani, K. L. Hsu, H. Gupta, S. Sorooshian, Uncertainty assessment of hydrologic model states and parameters: Sequential data assimilation using the particle filter, *Water resources research*, 41(5) (2005) 1-17.
- [34] S. N. Atluri and T. Zhu, A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational Mechanics*, 22(2) (1998) 117-127.
- [35] J. Sladek, P. Stanak, Z.-D. Han, V. Sladek and S. N. Atluri, Applications of the MLPG Method in Engineering & Sciences: A Review, *Computer Modelling in Engineering & Sciences*, 92(5) (2013) 423-475.
- [36] S. N. Atluri, S. Shen, The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method: A Simple & Less-costly Alternative to the Finite Element and Boundary Element Methods, *CMES*, 3(1) (2002) 11-51.
- [37] G. R. Liu and Y. T. Gu, *An introduction to Meshfree Methods and Their Programming*, Singapore: Springer, (2005).
- [38] G. R. Liu and Y. T. Gu, A point interpolation method for two-dimensional solid, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 50 (2001) 937-951.

Computing with Application in Target Tracking, Journal of Soft Computing and Information Technology (JSCIT), 7(2) (2018) 16-28.

optimization of arid groundwater system using swarm intelligence optimization algorithm, Arabian Journal of Geosciences, 9 (2016) 719-739.

[49] R. Havangi, An Improved Particle Filter based on Soft

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Mohtashami, S. A. Hashemi Monfared, Gh. Azizyan, A. Akbarpour, Usage of Particle Filter for Exact Estimation of Constant Head Boundaries in Unconfined Aquifer, Amirkabir J. Civil Eng., 53(12) (2022) 5175-5194.

DOI: 10.22060/ceej.2020.18708.6937



