



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

دوره ۴۸، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۵، صفحه ۳۳۱ تا ۳۴۰
Vol. 48, No. 3, Fall 2016, pp. 331-340



نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر - مهندسی عمران و محیط زیست

Amirkabir Journal of Science & Research
Civil and Environmental Engineering
(ASJR-CEE)

الگوریتم برنامه‌ریزی اعداد صحیح برای بهینه‌سازی محدوده استخراج زیرزمینی

وحید نیک‌بین^{۱*}، مجید عطایی‌پور^۲

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(دریافت: ۱۳۹۲/۱۲/۲۱، پذیرش: ۱۳۹۴/۱/۲۹)

چکیده

بهینه‌سازی محدوده استخراج زیرزمینی عبارت است از محدوده‌ای با بیشترین ارزش که محدودیت‌های فنی و هندسی در آن لحاظ شده باشد. اگرچه حدود پنج دهه از ارایه اولین الگوریتم بهینه‌سازی محدوده استخراج گذشته است، اما بیشتر این الگوریتم‌ها در زمینه بهینه‌سازی محدوده استخراج روباز بوده‌اند و تعداد کمی از آن‌ها برای بهینه‌سازی محدوده استخراج زیرزمینی قابلیت کاربرد دارند. از میان معدود الگوریتم‌های ارایه‌شده در این زمینه تنها چند الگوریتم دارای منطق ریاضی هستند که هیچ یک از آن‌ها قابلیت حل مسئله سه‌بعدی را ندارند. همچنین تاکنون الگوریتم سه‌بعدی که دارای منطق ریاضی باشد، برای حل این مسئله گزارش نشده است. بعضی از این الگوریتم‌ها تنها برای یک روش خاص ارایه شده‌اند و با توجه به متعدد بودن روش‌های استخراج زیرزمینی، دامنه کاربرد آن‌ها محدود است. در این مقاله یک الگوریتم بر مبنای برنامه‌ریزی اعداد صحیح برای روش‌های استخراج عمودی ارایه شده و از یک مدل بلوکی خاص برای تسهیل حل مسئله استفاده شده است. توانایی در نظر گرفتن محدودیت حداقل عرض پایه‌های جانبی از دیگر ویژگی‌های این الگوریتم است. اجرای الگوریتم ارایه‌شده بر روی مدل‌های بلوکی اقتصادی فرضی و مقایسه نتایج آن با دیگر الگوریتم‌های مشابه، نشان‌دهنده توانایی بالای آن در یافتن جواب بهینه واقعی است.

کلمات کلیدی:

مدلسازی، بهینه‌سازی، محدوده استخراج معادن زیرزمینی، برنامه‌ریزی عدد صحیح

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please site this article using:
Nikbin, V., and Atae-pour, M., 2016. "An Integer Programming Algorithm for Stope Layout Optimization". *Amirkabir Journal of Civil and Environmental Engineering*, 48(3), pp. 1-2.

DOI: 10.22060/ceej.2016.410

URL: http://ceej.aut.ac.ir/article_410.html

E-mail: vahidnikbin@yahoo.com نویسنده مسئول و عهده دار مکاتبات:



۱- مقدمه

بیش از چهار دهه از زمان ارایه اولین الگوریتم‌های بهینه‌سازی برای محدوده‌های استخراج معادن می‌گذرد. بیشتر الگوریتم‌های ارایه‌شده در زمینه مباحث مربوط به معدن‌کاری روباز بوده است که طی زمان بهبود یافته‌اند. رشد این الگوریتم‌ها در زمینه معدن‌کاری زیرزمینی برخلاف معدن‌کاری روباز، به دلایلی مانند متعدد بودن روش‌های استخراج زیرزمینی، پیچیدگی مدل‌سازی اقتصادی محدوده معدنی و استفاده از فرضیات ساده‌ساز در تهیه این الگوریتم‌ها بسیار کند بوده است. برخی از محدودیت‌ها و مشکلات موجود در هر کدام از الگوریتم‌های ارایه‌شده در گذشته مورد توجه قرار گرفته و به این ترتیب، بخشی از پیچیدگی‌های تعیین محدوده نهایی استخراج زیرزمینی رفع شده است. بنابراین تاکنون الگوریتم جامعی که بتوان از آن برای بهینه‌سازی محدوده کارگاه‌های استخراج در همه روش‌های استخراج زیرزمینی استفاده نمود، ارایه نشده است [۱].

در این مقاله، پس از مدل‌سازی خطی تابع هدف و محدودیت‌های حاکم بر طراحی کارگاه‌های استخراج زیرزمینی، یک مسئله از نوع برنامه‌ریزی اعداد صحیح^۱ (IP) به دست آمده است. در مدل‌سازی مسئله با در نظر گرفتن محدودیت‌هایی مانند حداقل عرض پایه‌های جانبی و حداکثر ارتفاع کارگاه‌های استخراج، سعی شده است تا روش ارایه‌شده تا حد امکان از جامعیت و گستردگی برخوردار باشد. پس از صورت‌بندی مسئله، مدل‌سازی بر روی یک مدل بلوکی اقتصادی فرضی انجام شده و با استفاده از نرم‌افزار CPLEX حل شده است. مقایسه نتایج حاصل با سایر الگوریتم‌های دارای منطق ریاضی نشان‌دهنده توانایی بالای روش ارایه‌شده در تعیین جواب بهینه واقعی است.

۲- پیشینه مطالعات

به طور کلی، الگوریتم‌های ارایه‌شده برای بهینه‌سازی اقتصادی محدوده نهایی معادن زیرزمینی از نظر منطق استفاده در آن‌ها را می‌توان به دو گروه «الگوریتم‌های دارای منطق ریاضی^۲» و «الگوریتم‌های دارای منطق جستجوگر^۳» تقسیم نمود.

اولین الگوریتم بهینه‌سازی محدوده استخراج زیرزمینی در سال ۱۹۷۷ و برای روش تخریب بلوکی ارایه شده است. این الگوریتم دارای منطق برنامه‌ریزی پویا بوده و با انجام اصلاحاتی بر روی الگوریتم لرج و گراسمن^۴ ارایه شده است. الگوریتم لرج و گراسمن قدیمی‌ترین الگوریتمی است که برای بهینه‌سازی محدوده استخراج روباز بر روی یک مدل اقتصادی دوبعدی به کار رفته است. این الگوریتم دارای منطق ریاضی بوده و در طراحی آن محدودیت‌های هم‌ترازی سقف کارگاه، حداقل طول و حداقل ارتفاع کارگاه استخراج لحاظ شده است. با در نظر گرفتن سه

محدودیت گفته‌شده، جواب حاصل از این الگوریتم بهینه واقعی است؛ اما محدودیت حداقل عرض پایه‌های جانبی به روشی جستجو محور در طراحی این الگوریتم وارد شده است که در نتیجه آن، ممکن است جواب الگوریتم با جواب بهینه واقعی تفاوت داشته باشد [۲].

در سال ۱۹۹۵ الگوریتمی برای بهینه‌سازی محدوده استخراج زیرزمینی بر مبنای روش شاخه و حد در یک پهنه یا طبقه ارایه شده است. این الگوریتم بر روی مدل اقتصادی دوبعدی محدوده معدنی تعریف می‌شود و با اتکا به یک منطق ریاضی، محدوده استخراج در هر ردیف از مدل بلوکی به طور جداگانه مشخص می‌گردد [۳].

در سال ۱۹۹۵ الگوریتمی به نام «کارگاه شناور^۵» برای بهینه‌سازی کارگاه استخراج ارایه شده است که از آن برای تعیین محدوده مواد معدنی قابل استخراج در نرم‌افزار Datamine استفاده می‌شود. الگوریتم کارگاه شناور یک الگوریتم جستجوگر است و منطق مورد استفاده در آن با الگوریتم مخروط شناور^۶ (که برای تعیین محدوده بهینه استخراج روباز تدوین شده) مشابه است [۴].

در سال ۱۹۹۷ یک الگوریتم جستجوگر به نام الگوریتم «با ارزش‌ترین همسایگی^۷» برای بهینه‌سازی محدوده کارگاه استخراج ارایه شده است. این الگوریتم مشابه با الگوریتم کارگاه شناور بوده؛ ولی پوش‌ها را با روشی متفاوت از روش کارگاه شناور تعریف کرده است. این الگوریتم در درون مدل اقتصادی کانسار، بلوک‌هایی که متناظر با بیشترین سود هستند را با اعمال شرایط هندسی کارگاه جستجو می‌کند [۵].

در سال ۲۰۰۵ یک الگوریتم جدید به نام «OLIPS^۸» برای بهینه‌سازی محدوده استخراج در کانسارهای رگه‌ای ارایه شده است. این الگوریتم دارای منطق برنامه‌ریزی پویا بوده و از آن‌جایی که بر روی مدل اقتصادی بلوکی خاصی اجرا می‌شود، بنابراین بعضی از محدودیت‌های ابعادی کارگاه استخراج را رفع می‌کند [۶].

در سال ۲۰۰۹ یک روش بهینه‌سازی احتمالاتی، برای طراحی کارگاه در شرایط عدم قطعیت بر اساس برنامه‌ریزی اعداد صحیح ارایه شده است. اگرچه این روش با در نظر گرفتن عدم قطعیت زمین‌شناسی، کمک زیادی را به طراحی کارگاه‌های استخراج می‌کند و همچنین اولین روشی است که عدم قطعیت را در طراحی کارگاه در نظر می‌گیرد؛ اما اشکال‌هایی نیز دارد. از جمله اشکال‌های این روش آن است که در ابتدا محل محدوده‌ها را تعیین می‌کند، سپس کارگاه‌های با بیشترین سود را در این محدوده‌ها جستجو می‌کند. بنابراین توانایی یافتن محل بهینه کارگاه‌ها را ندارد [۷].

در سال ۲۰۱۰، الگوریتم جستجو محور دیگری برای تعیین محدوده استخراج زیرزمینی در سه بعد ارایه شده است. این الگوریتم بر روی مدل بلوکی اقتصادی اجرا می‌شود و می‌تواند موقعیت، ارزش و ارزش خالص

⁵ Floating Stope

⁶ Moving Cone

⁷ Maximum Value Neighbourhood

⁸ Optimum Limit Integrated Probable Stope

¹ Integer Programming

² Rigorous Algorithms

³ Heuristic Algorithms

⁴ Lerchs and Grossman

	-1	5	0	0	2	0	-1	1	0	-2
	-2	-2	1	-1	1	1	4	8	1	0
	1	-1	6	-1	-2	-2	2	6	1	3
	1	3	3	-2	-1	-1	2	4	2	2
Z ↑	3	4	5	-1	-1	-4	1	2	10	1
X →										

شکل (۱): مدل بلوکی اقتصادی اولیه (P)

بلوکی ثانویه (S) تهیه می‌شود. تعداد بلوک‌های مدل S در دو جهت x و z به ترتیب با I و K نشان داده می‌شود. مقادیر I و K با استفاده از رابطه‌های (۱) و (۲) قابل محاسبه هستند:

$$I = M + \text{Max} \{d_x, R\} \quad (1)$$

که در آن d_x و R به ترتیب بیانگر حداقل طول کارگاه استخراج و حداقل ضخامت لنگه جانبی در جهت x است.

$$K = \begin{cases} 0 & N \leq d_z \\ (N - d_z + 1) & d_z \leq N < D_z \\ (D_z - d_z + 1) & D_z \leq N \end{cases} \quad (2)$$

که در آن، d_z و D_z به ترتیب معرف حداقل و حداکثر ارتفاع کارگاه‌های استخراج هستند. به عنوان مثال، اگر حداقل طول کارگاه استخراج، حداقل ضخامت پایه‌های جانبی، حداقل ارتفاع کارگاه استخراج و حداکثر ارتفاع کارگاه استخراج به ترتیب ۳، ۱، ۳ و ۵ بلوک باشد، آنگاه مدل بلوکی ثانویه دارای ۱۳ سطر و ۳ ستون است.

۴-۱- ارزش‌گذاری بلوک‌های مدل ثانویه

پس از تعیین ابعاد مدل بلوکی ثانویه، نوبت به تعیین ارزش بلوک‌های واقع در این مدل می‌رسد. ارزش بلوک‌های واقع در مدل S با استفاده از رابطه (۳) تعیین می‌شود. همان‌طور که در شکل (۲) نیز نشان داده شده است، ارزش بلوک‌های واقع در ستون‌هایی از مدل P که حداقل ارتفاع آن‌ها برابر d_z است با هم جمع شده و به عنوان یک مقدار در مدل S نشان داده می‌شود:

$$S_{(i,k)} = \begin{cases} -u & i = 1 \\ -u & i \geq M + 2 \\ \sum_{t=1}^{(k+d_z-1)} P_{(i-t)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

که در آن u معرف یک عدد بزرگ و با علامت مثبت است.

برای مدل بلوکی اولیه نشان داده شده در شکل (۱)، مدل ثانویه S به صورت شکل (۲) درمی‌آید. با توجه به مقادیر تعریف‌شده پیشین برای d_x و R و d_z و D_z مدل S دارای ۱۳ بلوک در جهت x و ۳ بلوک در جهت z است. با توجه به رابطه (۳) نحوه محاسبه ارزش دو بلوک از مدل S به صورت زیر است:

فعلی^۱ کارگاه‌های استخراج را در سه بعد بیابد. همان‌طور که قبلاً گفته شد، این الگوریتم دارای ماهیت جستجوگر بوده و بنابراین توانایی تعیین محدوده بهینه واقعی استخراج را ندارد [۸].

در سال ۲۰۱۳، از روش جریان شبکه^۲ برای بهینه‌سازی محدوده استخراج زیرزمینی در روش استخراج از طبقات فرعی استفاده شده است. در مدل‌سازی این روش به جای استفاده از مدل بلوکی مرسوم، از یک مدل بلوکی استوانه‌ای استفاده شده است. یکی از محدودیت‌های مهم این الگوریتم، کاربرد آن صرفاً برای یک دوپل منفرد است [۹]. نویسندگان این مقاله در ادامه کار خود، از این روش برای تعیین محدوده بهینه در اطراف چند دوپل استفاده نموده‌اند [۱۰].

علاوه بر الگوریتم‌های مذکور، الگوریتم‌های دیگری نیز مانند الگوریتم تقسیم هشت‌گانه^۳ و رهیافت‌های زمین آماری پایین‌دستی^۴ نیز وجود دارند که بر روی نوع خاصی از مدل‌های بلوکی زمین‌شناسی محدوده معدنی (غیراقتصادی) تعریف شده‌اند [۱۱].

۳- مدل بلوکی اقتصادی اولیه

کانسار با توجه به شیب در استخراج زیرزمینی، به طبقات و یا پهنه‌هایی تقسیم می‌شود و عملیات استخراج ماده معدنی در هر طبقه یا پهنه پس از انجام آماده‌سازی‌های لازم انجام می‌گیرد. در کانسارهای پرشیب (دارای شیب عمودی و یا نزدیک به عمودی)، کانسار به چند طبقه استخراجی تقسیم می‌شود و استخراج ماده معدنی در هر کدام از طبقات با بکارگیری یکی از روش‌های استخراج قایم انجام می‌پذیرد. در این مقاله، مدل‌سازی و بهینه‌سازی محدوده استخراج زیرزمینی برای روش‌های استخراج عمودی و در دو بعد انجام می‌شود. به عبارت دیگر، اگر در جهت ضخامت کانسار تنها یک بلوک تعریف شود، می‌توان از این کانسار مقاطع دو بعدی تهیه نمود و سپس بر اساس ملاحظات فنی و اقتصادی تعریف‌شده، محدوده بهینه را بر روی آن جانمایی کرد. با تهیه مقاطع عمودی دوطرفی از کانسار و تقسیم آن به بلوک‌های کوچکتر، مدل بلوکی عباری از کانسار تهیه می‌شود و پس از آن، ارزش اقتصادی هر بلوک با توجه به مقادیر عیار و انجام محاسبات مربوط و در نتیجه مدل بلوکی اقتصادی اولیه (P) تعیین می‌شود.

نمونه‌ای از یک مدل بلوکی اقتصادی اولیه (P) در شکل (۱) نشان داده شده است. تعداد بلوک‌های مدل P در جهت امتداد و عمق کانسار به ترتیب با M و N نشان داده می‌شود. در مدل بلوکی شکل (۱)، مقادیر M و N به ترتیب برابر با ۱۰ و ۵ بلوک است.

۴- مدل بلوکی ثانویه

بر اساس مدل بلوکی P و محدودیت‌های حاکم بر مسئله، مدل

¹ Net Present Value

² Network Flow Method

³ Octree Division Algorithm

⁴ Downstream Geostatistical Approach

منفی بزرگ (-u) اختصاص داده شده است.

$$\text{Maximize } Z = \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K S_{(i,k)} X_{(i,k)} \quad (4)$$

$$X_{(i,k)} \in \{0,1\}$$

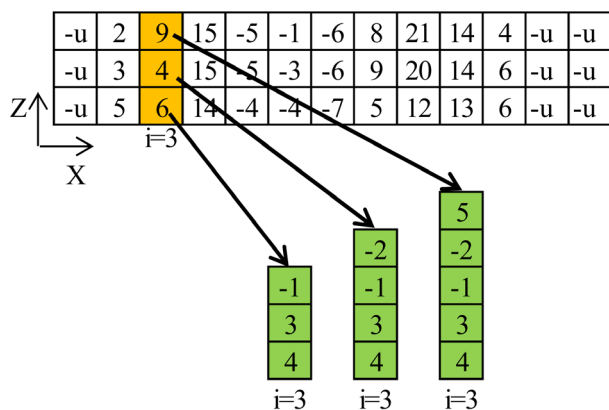
$X_{(i,k)}$ یک متغیر دودویی (صفر و یک) است که می‌تواند یکی از دو مقدار صفر یا یک را اختیار کند. اگر $X_{(i,k)}$ برابر یک باشد، بلوک واقع در ستون i ام و سطر k ام از مدل بلوکی S به عنوان یکی از بلوک‌های واقع در محدوده بهینه قرار می‌گیرد. در غیر این صورت، آن بلوک باطله محسوب می‌شود و خارج از محدوده بهینه استخراج قرار می‌گیرد.

۶- مدل‌سازی ریاضی محدودیت‌های حاکم بر مسئله

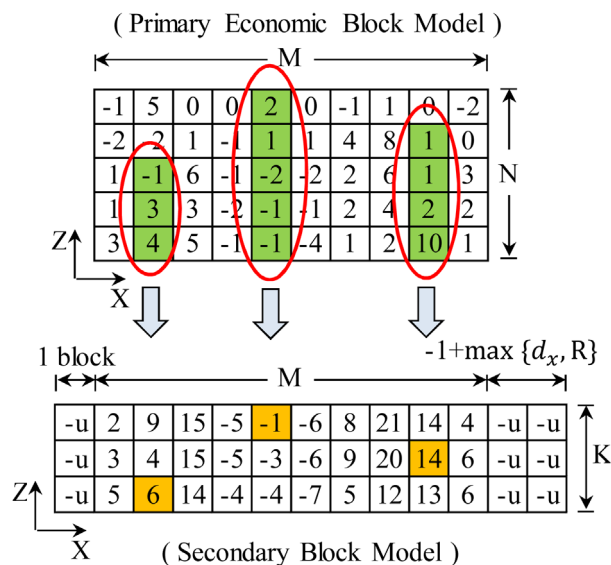
در این مقاله، محدودیت‌های مؤثر در تعیین محدوده بهینه در هر طبقه استخراجی در دو بعد در نظر گرفته شده است. از جمله این محدودیت‌ها می‌توان به محدودیت حداقل طول کارگاه استخراج در جهت امتداد (X)، حداقل عرض پایه‌های جانبی و محدودیت هم‌ترازی سقف کارگاه استخراج اشاره نمود. همچنین از آن جایی که مقادیر هر یک از بلوک‌های مدل S با جمع کردن بلوک‌های واقع در ستون‌هایی از مدل P (با حداقل ارتفاع d_i) تعیین شده است، بنابراین محدودیت حداقل و حداکثر ارتفاع کارگاه استخراج به صورت عملی لحاظ شده است.

۶-۱- محدودیت عدم تکرار

برای جلوگیری از تکرار استخراج یک بلوک، حداکثر یکی از متغیرهای واقع در هر یک از ستون‌های مدل بلوکی ثانویه (S) می‌تواند یک باشد و بقیه متغیرهای مربوط به این ستون باید برابر صفر شوند. به عبارت دیگر، این محدودیت تضمین می‌کند که هر بلوک از مدل فقط یک بار استخراج شود. به عنوان مثال، همان‌طور که در شکل (۳) نشان داده شده است، اگر بیش از یکی از سه متغیر $X_{(3,1)}$ و $X_{(3,2)}$ و $X_{(3,3)}$ مقدار یک را اختیار کند، محدودیت عدم تکرار نقض می‌شود. بنابراین حداکثر یکی از این سه متغیر می‌تواند برابر با یک باشد.



شکل (۳): نقض شدن محدودیت عدم تکرار در ستون سوم از مدل بلوکی ثانویه



شکل (۲): موقعیت قرارگیری مدل S نسبت به مدل P

$$S_{(7,1)} = \sum_{t=1}^3 P_{(6,t)} = P_{(6,1)} + P_{(6,2)} + P_{(6,3)} \quad (a)$$

$$= -4 - 1 - 2 = -7$$

$$S_{(11,2)} = \sum_{t=1}^4 P_{(10,t)} = P_{(10,1)} + P_{(10,2)} + P_{(10,3)} + P_{(10,4)} \quad (b)$$

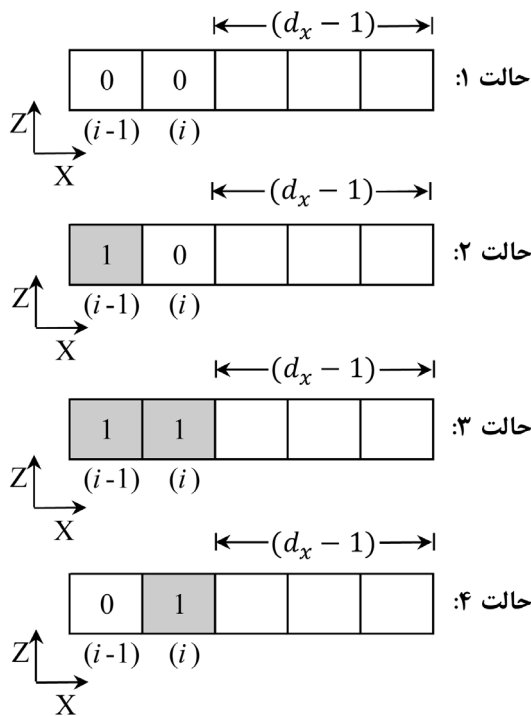
$$= 1 + 2 + 3 + 0 = 6$$

۴-۲- موقعیت قرارگیری مدل ثانویه نسبت به مدل اولیه

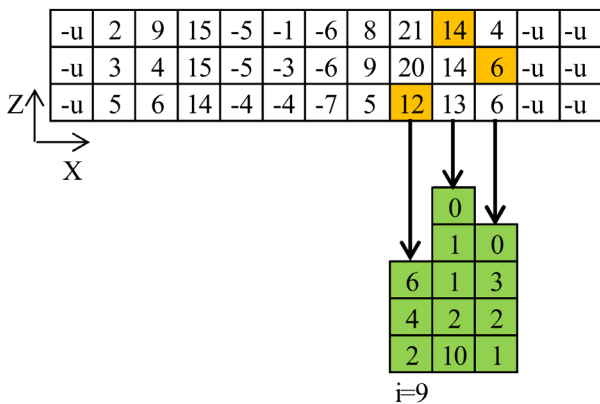
موقعیت قرارگیری مدل S نسبت به مدل P در شکل (۲) نشان داده شده است. با توجه به نحوه ساخت مدل بلوکی ثانویه (تبدیل چند بلوک در مدل اولیه به یک بلوک در مدل ثانویه)، معمولاً تعداد بلوک‌های مدل ثانویه از تعداد بلوک‌های مدل اولیه کمتر است. همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد، مدل‌سازی‌های انجام‌شده در این مقاله از نوع برنامه‌ریزی عدد صحیح (IP) است. بنابراین کوچکتر بودن مدل ثانویه باعث کاهش تعداد نقاط موجه می‌شود و زمان رسیدن به جواب نیز کاهش می‌یابد. بنابراین می‌توان یکی از مهمترین ویژگی‌های ساخت مدل بلوکی ثانویه را کاهش تعداد متغیرهای مسئله دانست که در نتیجه آن، در زمان کمتری می‌توان به جواب بهینه رسید. این مسئله در کاهش زمان حل مدل‌های بزرگ می‌تواند دارای اهمیت باشد.

۵- مدل‌سازی ریاضی تابع هدف

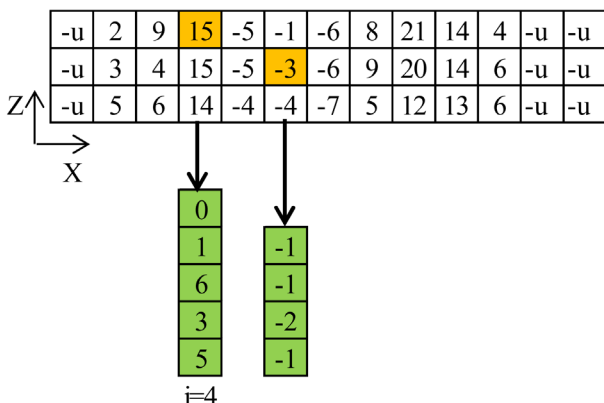
تابع هدف، تعیین محدوده بهینه استخراج براساس بیشینه نمودن سود بوده و این تابع هدف با رابطه (۴) قابل بیان است. همان‌طور که در شکل (۲) دیده می‌شود، در مدل بلوکی ثانویه برای حل مسئله $I-M$ ستون فرضی به مدل اضافه شده است و برای جلوگیری از انتخاب بلوک‌های واقع در این ستون‌های مجازی، به هر کدام از آن‌ها یک ارزش



شکل (۴): حالت‌های مختلف مجموع اعداد واقع در ستون i و ستون $i-1$



شکل (۵): برقراری محدودیت حداقل ابعاد کارگاه استخراج



شکل (۶): نقض شدن محدودیت حداقل ابعاد کارگاه استخراج

محدودیت عدم تکرار با رابطه (۵) بیان می‌شود:

$$\sum_{k=1}^K X_{(i,k)} \leq 1 \quad \forall i \quad (5)$$

این محدودیت برای ستون سوم از مدل بلوکی ثانویه نشان داده شده در شکل (۲) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{k=1}^3 X_{(3,k)} = X_{(3,1)} + X_{(3,2)} + X_{(3,3)} \leq 1 \quad (c)$$

۶-۲- محدودیت حداقل طول کارگاه استخراج

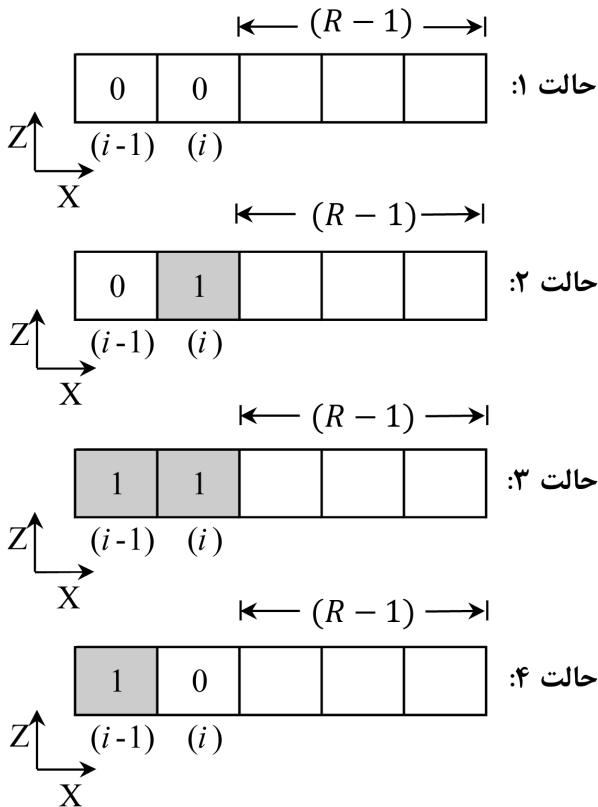
با توجه به محدودیت قبل، جمع مقادیر دودویی در هر ستون از مدل بلوکی ثانویه برابر با یک یا صفر است. اگر جمع مقادیر دودویی در ستون i برابر با یک و در ستون $i-1$ برابر با صفر باشد، ستون i ام در گوشه‌ای از یک کارگاه قرار می‌گیرد. در چنین شرایطی باید جمع مقادیر دودویی تمام $d_x - 1$ ستونی که بعد از ستون i ام قرار می‌گیرند، برابر با یک باشد. این محدودیت با رابطه (۶) قابل بیان است:

$$(d_x - 1) \left(\sum_{k=1}^K X_{(i,k)} - \sum_{k=1}^K X_{(i-1,k)} \right) - \sum_{a=(i+1)}^{(i+d_x-1)} \sum_{k=1}^K X_{(a,k)} \leq 0 \quad (6)$$

for $2 \leq i \leq (M + 1)$

همان‌طور که قبلاً نیز گفته شد، با توجه به محدودیت عدم تکرار تنها یک متغیر دودویی در هر ستون از مدل S می‌تواند دارای مقدار ۱ باشد. بنابراین مجموع اعداد واقع در دو ستون مجاور i و $i-1$ دارای چهار حالت مختلف هستند. در حالت‌های ۱ تا ۳ در شکل (۴)، تفاضل مجموع مقادیر این دو ستون صفر یا منفی است. بنابراین قسمت اول رابطه (۶) نیز یا صفر و یا دارای مقداری منفی بوده و چون قسمت دوم این رابطه نیز منفی است، بنابراین جمع قسمت اول و قسمت دوم رابطه (۶) همواره منفی و یا صفر است و این رابطه برای حالت‌های ۱ تا ۳ همواره برقرار است. ولی در حالت ۴ تفاضل این دو مقدار برابر با یک بوده و رابطه (۶) تنها در شرایطی برقرار است که مجموع اعداد واقع در تمام $d_x - 1$ ستونی که پس از ستون i قرار می‌گیرند، برابر با یک باشند. به عبارت دیگر، این رابطه تضمین‌کننده برقراری محدودیت حداقل طول کارگاه استخراج است.

اگر d_x برابر با سه بلوک در نظر گرفته شود و با توجه به محاسبات (d) و (e)، این محدودیت به ترتیب در شکل (۵) رعایت و در شکل (۶) نقض شده است. بنابراین محدوده نشان داده شده در شکل (۶)، شرایط تشکیل یک کارگاه استخراج را ندارد.



شکل (۷): حالت‌های مختلف مجموع اعداد واقع در ستون i و ستون $i-1$

-u	2	9	15	-5	-1	-6	8	21	14	4	-u	-u
-u	3	4	15	-5	-3	-6	9	20	14	6	-u	-u
-u	5	6	14	-4	-4	-7	5	12	13	6	-u	-u

$i=5$

0
-2
1
1
1
3
4
5

0
1
2
6
1
2
4
2
10

$i=5$

شکل (۸): برقراری محدودیت حداقل عرض پایه‌های جانبی

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \sum_{k=1}^K X_{(5,k)}\right) - \left(1 - \sum_{k=1}^K X_{(4,k)}\right) \\
 & - \sum_{a=6}^6 \left(1 - \sum_{k=1}^3 X_{(a,k)}\right) = \left(1 - X_{(5,1)} - X_{(5,2)} - X_{(5,3)}\right) \\
 & - \left(1 - X_{(4,1)} - X_{(4,2)} - X_{(4,3)}\right) - \\
 & \left(1 - X_{(6,1)} - X_{(6,2)} - X_{(6,3)}\right) = 1 - 0 - 0 - 0 - 1 + 0 \\
 & + 0 + 1 - 1 + 0 + 0 + 0 = 0 \leq 0
 \end{aligned} \quad (f)$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \left(\sum_{k=1}^3 X_{(9,k)} - \sum_{k=1}^3 X_{(8,k)} \right) - \sum_{a=10}^{11} \sum_{k=1}^3 X_{(a,k)} \\
 & = 2X_{(9,1)} + 2X_{(9,2)} + 2X_{(9,3)} - 2X_{(8,1)} - 2X_{(8,2)} \\
 & - 2X_{(8,3)} - X_{(10,1)} - X_{(10,2)} - X_{(10,3)} - X_{(11,1)} \\
 & - X_{(11,2)} - X_{(11,3)} = 2 + 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 \\
 & - 0 - 0 - 1 - 0 - 1 - 0 = 0 \leq 0
 \end{aligned} \quad (d)$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \left(\sum_{k=1}^3 X_{(4,k)} - \sum_{k=1}^3 X_{(3,k)} \right) - \sum_{a=5}^6 \sum_{k=1}^3 X_{(a,k)} = \\
 & 2X_{(4,1)} + 2X_{(4,2)} + 2X_{(4,3)} - 2X_{(3,1)} - 2X_{(3,2)} \\
 & - 2X_{(3,3)} - X_{(5,1)} - X_{(5,2)} - X_{(5,3)} - X_{(6,1)} \\
 & - X_{(6,2)} - X_{(6,3)} = 0 + 0 + 2 - 0 - 0 - 0 - 0 \\
 & - 0 - 0 - 0 - 1 - 0 = 1 > 0
 \end{aligned} \quad (e)$$

۶-۳- محدودیت حداقل عرض پایه‌های جانبی

برخلاف محدودیت حداقل ابعاد کارگاه استخراج، اگر جمع مقادیر دودویی در ستون i ام برابر صفر و در ستون $i-1$ برابر یک باشد، ستون i ام در گوشه‌ای از یک پایه جانبی قرار می‌گیرد. در چنین شرایطی باید جمع مقادیر دودویی تمام $R-1$ ستونی که بعد از ستون i ام قرار می‌گیرند، برابر صفر شود. این محدودیت با رابطه (۷) قابل بیان است.

$$\begin{aligned}
 & (R-1) \left[\left(1 - \sum_{k=1}^K X_{(i,k)}\right) - \left(1 - \sum_{k=1}^K X_{(i-1,k)}\right) \right] \\
 & - \sum_{a=(i+1)}^{(i+R-1)} \left(1 - \sum_{k=1}^K X_{(a,k)}\right) \leq 0 \\
 & \text{for } : 2 \leq i \leq (M+1)
 \end{aligned} \quad (7)$$

این محدودیت مشابه محدودیت حداقل طول کارگاه استخراج است؛ با این تفاوت که مجموع اعداد واقع در هر ستون از مدل K به جای یک، باید صفر باشد. چهار حالت مختلف برای جمع مقادیر دو ستون مجاور وجود دارد که در شکل (۷) نشان داده شده است.

با توجه به مجموع مقادیر واقع در دو ستون مجاور i و $i-1$ در حالت‌های ۱ تا ۳، قسمت اول رابطه (۷) همواره صفر و یا منفی بوده و با توجه به منفی بودن قسمت دوم، مجموع این دو عبارت همواره صفر و یا منفی است. قسمت اول رابطه (۷) در حالت ۴، همواره مثبت و برابر با $R-1$ بوده و تنها در صورتی این رابطه برقرار است که مجموع اعداد واقع در تمام $R-1$ ستونی که پس از ستون i قرار دارند، برابر با صفر باشد. به عبارت دیگر، قسمت دوم رابطه (۷) باید برابر با $R-1$ شود.

اگر R برابر دو بلوک در نظر گرفته شود، این محدودیت با توجه به محاسبات (f) و (g) به ترتیب در شکل (۸) رعایت و در شکل (۹) نقض شده است. بنابراین کارگاه‌های نشان داده شده در شکل (۹)، شرایط انتخاب به عنوان یک محدوده استخراجی را ندارند.

در رابطه‌های (۸) و (۹)، G معرف یک عدد بزرگ مثبت است. اگر مقادیر m_z و G به ترتیب ۱ و ۱۰۰ باشد، این محدودیت با توجه به محاسبات (h) و (i) در شکل (۱۰) رعایت شده است. در صورتی که با توجه به محاسبات (j) و (k) در شکل (۱۱) نقض شده است. بنابراین به دلیل نقض شدن محدودیت هم‌ترازی در محدوده نشان داده در شکل (۱۱) شرایط تشکیل یک کارگاه استخراج وجود ندارد.

$$\sum_{k=1}^3 kX_{(8,k)} - \sum_{k=1}^3 kX_{(9,k)} \leq 1 + 100 \left(1 - \sum_{k=1}^3 X_{(9,k)} \right)$$

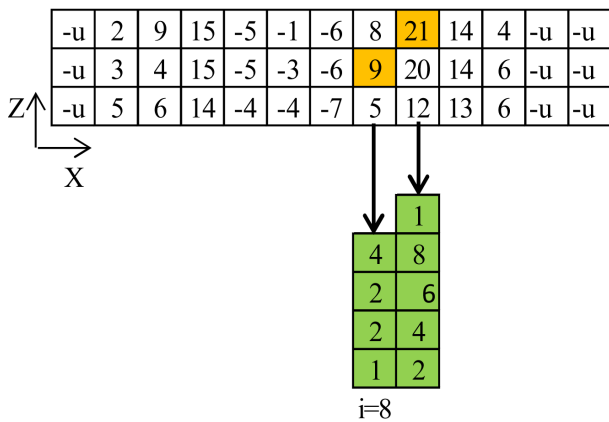
$$= X_{(8,1)} + 2X_{(8,2)} + 3X_{(8,3)} - X_{(9,1)} - 2X_{(9,2)} - 3X_{(9,3)} - 100(1 - X_{(9,1)} - X_{(9,2)} - X_{(9,3)})$$

$$= -1 \leq 1 \quad (h)$$

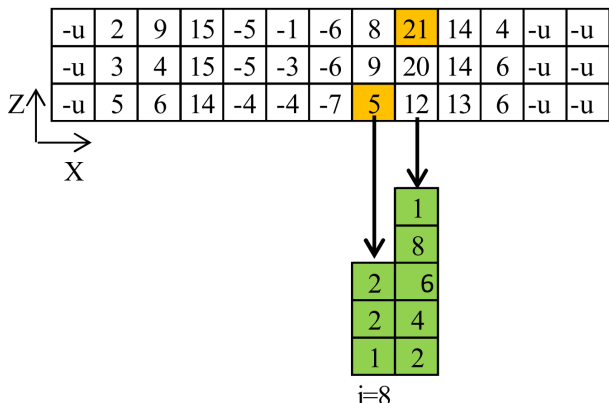
$$\sum_{k=1}^3 kX_{(9,k)} - \sum_{k=1}^3 kX_{(8,k)} \leq 1 + 100 \left(1 - \sum_{k=1}^3 X_{(8,k)} \right)$$

$$= X_{(9,1)} + 2X_{(9,2)} + 3X_{(9,3)} - X_{(8,1)} - 2X_{(8,2)} - 3X_{(8,3)} - 100(1 - X_{(8,1)} - X_{(8,2)} - X_{(8,3)})$$

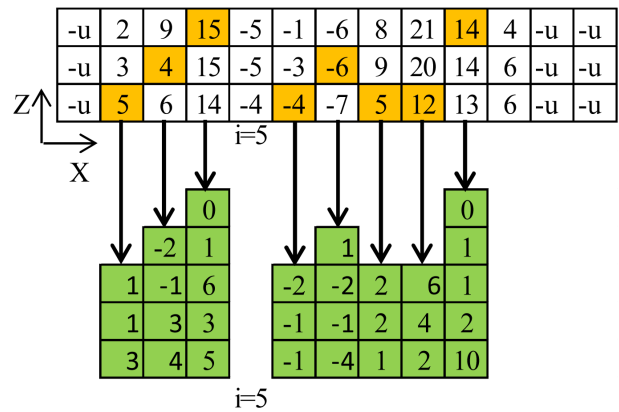
$$= 1 \leq 1 \quad (i)$$



شکل (۱۰): برقراری محدودیت هم‌ترازی



شکل (۱۱): نقض شدن محدودیت هم‌ترازی



شکل (۹): نقض شدن محدودیت حداقل عرض پایه‌های جانبی

$$\left(1 - \sum_{k=1}^K X_{(5,k)} \right) - \left(1 - \sum_{k=1}^K X_{(4,k)} \right)$$

$$- \sum_{a=6}^6 \left(1 - \sum_{k=1}^3 X_{(a,k)} \right) = (1 - X_{(5,1)} - X_{(5,2)} - X_{(5,3)})$$

$$- (1 - X_{(4,1)} - X_{(4,2)} - X_{(4,3)})$$

$$- (1 - X_{(6,1)} - X_{(6,2)} - X_{(6,3)}) = 1 - 0 - 0 - 0 - 1$$

$$+ 0 + 0 + 1 - 1 + 1 + 0 + 0 = 1 > 0$$

۶-۴- محدودیت هم‌ترازی سقف کارگاه استخراج

منظور از محدودیت هم‌ترازی سقف کارگاه استخراج این است که اختلاف تراز بین هر دو ستون مجاور در قسمت سقف کارگاه نیز باید کوچکتر و یا مساوی یک مقدار از پیش تعیین شده (m_z) باشد. این محدودیت در بعضی از روش‌های استخراج مانند تخریب بلوکی از اهمیت بالایی برخوردار است. در صورتی که مجموع مقادیر دودویی در دو ستون مجاور هر دو برابر یک باشد، لازم است تا محدودیت هم‌ترازی بررسی شود. برای اعمال محدودیت هم‌ترازی از رابطه‌های (۸) و (۹) استفاده می‌شود:

$$\sum_{k=1}^K kX_{(i,k)} - \sum_{k=1}^K kX_{(i+1,k)} \leq m_z$$

$$+ G \left(1 - \sum_{k=1}^K X_{(i+1,k)} \right) \quad \text{for } 2$$

for: $2 \leq i \leq M$

$$\sum_{k=1}^K kX_{(i+1,k)} - \sum_{k=1}^K kX_{(i,k)} \leq m_z$$

$$+ G \left(1 - \sum_{k=1}^K X_{(i,k)} \right) \quad (9)$$

for $2 \leq i \leq M$

-1	5	0	0	2	0	-1	1	0	-2
-2	-2	1	-1	1	1	4	8	1	0
1	-1	6	-1	-2	-2	2	6	1	3
1	3	3	-2	-1	-1	2	4	2	2
3	4	5	-1	-1	-4	1	2	10	1

شکل (۱۳): محدوده حاصل از کاربرد الگوریتم Riddle به ارزش ۷۶ واحد

-1	5	0	0	2	0	-1	1	0	-2
-2	-2	1	-1	1	1	4	8	1	0
1	-1	6	-1	-2	-2	2	6	1	3
1	3	3	-2	-1	-1	2	4	2	2
3	4	5	-1	-1	-4	1	2	10	1

شکل (۱۴): محدوده حاصل از کاربرد الگوریتم OLIPS به ارزش ۷۷ واحد

-100	2	9	15	-5	-1	-6	8	21	14	4	-100
-100	3	4	15	-5	-3	-6	9	20	14	6	-100
-100	5	6	14	-4	-4	-7	5	12	13	6	-100
-100	4	7	8	-3	-2	-5	3	6	12	3	-100

شکل (۱۵): مدل بلوکی ثانویه حاصل از مدل بلوکی اقتصادی اولیه شکل (۱۲)

برای تعیین محدوده استخراج بر مبنای مدل بلوکی نشان داده شده در شکل (۱۵)، مدل بلوکی ثانویه ساخته می‌شود. همان‌طور که پیش از این نیز بیان شده است، $-u$ یک عدد بزرگ منفی است که برای انتخاب‌نشدن ستون‌های فرضی به مدل اضافه می‌شوند. در این مثال، مقدار این عدد -100 فرض شده است. بنابراین تابع هدف مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \text{Maximize } Z &= \sum_{i=1}^{12} \sum_{k=1}^4 S_{(i,k)} X_{(i,k)} \\ &= -100X_{(1,1)} - 100X_{(1,2)} - 100X_{(1,3)} - 100X_{(1,4)} \\ &\quad + 4X_{(2,1)} + 5X_{(2,2)} + 3X_{(2,3)} + 2X_{(2,4)} + 7X_{(3,1)} \\ &\quad + 6X_{(3,2)} + 4X_{(3,3)} + 9X_{(3,4)} + 8X_{(4,1)} + \dots \end{aligned} \quad (J)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 kX_{(8,k)} - \sum_{k=1}^3 kX_{(9,k)} &\leq 1 + 100 \left(1 - \sum_{k=1}^3 X_{(9,k)} \right) \\ &= X_{(8,1)} + 2X_{(8,2)} + 3X_{(8,3)} - X_{(9,1)} - 2X_{(9,2)} \\ &\quad - 3X_{(9,3)} - 100(1 - X_{(9,1)} - X_{(9,2)} - X_{(9,3)}) \\ &= -2 \leq 1 \end{aligned} \quad (j)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 kX_{(9,k)} - \sum_{k=1}^3 kX_{(8,k)} &\leq 1 + 100 \left(1 - \sum_{k=1}^3 X_{(8,k)} \right) \\ &= X_{(9,1)} + 2X_{(9,2)} + 3X_{(9,3)} - X_{(8,1)} - 2X_{(8,2)} \\ &\quad - 3X_{(8,3)} - 100(1 - X_{(8,1)} - X_{(8,2)} - X_{(8,3)}) \\ &= 2 > 1 \end{aligned} \quad (k)$$

۷- اعتبارسنجی

برای اعتبارسنجی روش جدید، نتایج حاصل از آن با نتایج بدست آمده از الگوریتم‌های برنامه‌ریزی پویای دوبعدی Riddle و OLIPS مقایسه شد. از آنجایی که الگوریتم‌های ریاضی Riddle و OLIPS محدودیت‌های کمتری را در نظر می‌گیرند، بنابراین محدودیت‌های حداقل عرض پایه‌های جانبی و حداکثر ارتفاع کارگاه استخراج در مثالی که تشریح می‌شود در نظر گرفته نمی‌شود تا هر سه روش از شرایط مشابهی در تعیین محدوده استخراج برخوردار باشند. در شکل (۱۲) مدل بلوکی اقتصادی اولیه نشان داده شده است. اگر حداقل ارتفاع کارگاه استخراج، حداقل طول کارگاه استخراج و محدودیت هم‌ترازی سقف کارگاه به ترتیب ۲، ۱ و ۲ بلوک فرض شود، آن‌گاه محدوده‌های حاصل از کاربرد الگوریتم Riddle و OLIPS برای این مثال به صورت شکل‌های (۱۳) و (۱۴) درمی‌آید. ارزش این محدوده‌ها به ترتیب برابر با ۷۶ و ۷۷ واحد است. با توجه به ماهیت ریاضی الگوریتم‌های Riddle و OLIPS، انتظار می‌رود تا جواب حاصل از هر دو الگوریتم یکسان باشد. اما ارزش محدوده به دست آمده از کاربرد الگوریتم Riddle یک واحد کمتر از ارزش محدوده حاصل از کاربرد OLIPS است. شاید اختلاف جواب دو محدوده از اشکال در تدوین برنامه رایانه‌ای ناشی شده باشد که بر مبنای الگوریتم Riddle پیاده‌سازی و اجرا شده است.

-1	5	0	0	2	0	-1	1	0	-2
-2	-2	1	-1	1	1	4	8	1	0
1	-1	6	-1	-2	-2	2	6	1	3
1	3	3	-2	-1	-1	2	4	2	2
3	4	5	-1	-1	-4	1	2	10	1

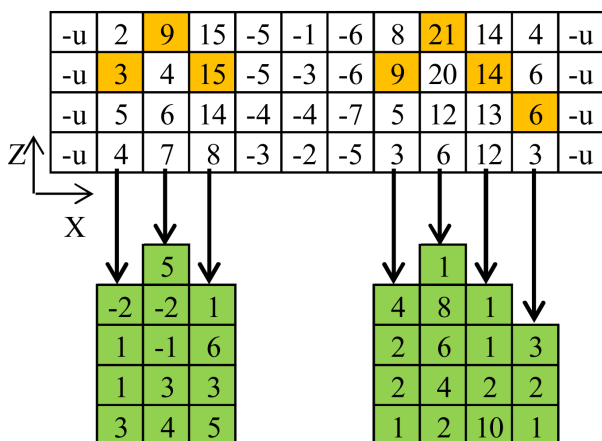
شکل (۱۲): مدل بلوکی اقتصادی اولیه

$$\begin{aligned}
 &99X_{(10,1)} + 98X_{(10,2)} + 97X_{(10,3)} \\
 &+ 96X_{(10,4)} + 101X_{(11,1)} + 102X_{(11,2)} \\
 &+ 103X_{(11,3)} + 104X_{(11,4)} \leq 201
 \end{aligned} \quad (v)$$

برای حل مدل پیشنهادی از نرم‌افزار *CPLEX* استفاده شده است که بر اساس نتایج آن، متغیرهای $X_{(2,3)}$ و $X_{(3,4)}$ و $X_{(4,3)}$ و $X_{(8,3)}$ و $X_{(9,4)}$ و $X_{(10,3)}$ و $X_{(11,2)}$ برابر یک و سایر متغیرها برابر با صفر هستند و مقدار تابع هدف نیز برابر ۷۷ واحد بوده که نشان‌دهنده ارزش محدوده تعیین شده است.

۸- جمع‌بندی

در این مقاله از یک الگوریتم برنامه‌ریزی عدد صحیح برای یافتن محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج زیرزمینی استفاده شده است که بر روی یک نوع مدل بلوکی خاص (مدل بلوکی ثانویه) اجرا می‌شود. در الگوریتم ارایه‌شده، محدودیت‌های حداقل طول، حداقل و حداکثر ارتفاع، حداقل ضخامت لنگه‌های جانبی و در نهایت محدودیت هم‌ترازی سقف کارگاه لحاظ شده و تابع هدف آن بیشینه‌نمودن سود است. هرچند که الگوریتم ارایه‌شده دارای منطق ریاضی بوده و جواب حاصل از آن همواره بهینه واقعی است، اما نتایج آن برای اطمینان از این موضوع با دیگر الگوریتم‌های مشابه مقایسه شده است. جواب حاصل از این الگوریتم با جواب الگوریتم *OLIPS* یکسان و یک واحد از جواب حاصل از کاربرد الگوریتم *Riddle* بیشتر بود. با توجه به ماهیت ریاضی سه الگوریتم نام‌برده‌شده، انتظار آن می‌رود که ارزش محدوده حاصل از کاربرد آن‌ها یکسان و با هم برابر باشد. احتمالاً ضعف در تدوین برنامه رایانه‌ای که *Riddle* بر مبنای الگوریتم خود نوشته است، می‌تواند دلیل تفاوت جواب این الگوریتم به جواب الگوریتم‌های *OLIPS* و مدل جدید ارایه‌شده در این مقاله باشد. گفتنی است که الگوریتم *Riddle* محدودیت‌های هم‌ترازی سقف کارگاه استخراج، حداقل طول و حداقل ارتفاع کارگاه استخراج را در نظر گرفته و در الگوریتم *OLIPS* نیز علاوه بر سه



شکل (۱۶): محدوده تعیین‌شده با روش جدید به ارزش ۷۷ واحد

این مسئله دارای ۱۲ محدودیت عدم تکرار است که ۳ مورد از آن‌ها با استفاده از روابط (m) ، (n) و (o) در زیر نشان داده شده است:

$$X_{(1,1)} + X_{(1,2)} + X_{(1,3)} + X_{(1,4)} \leq 1 \quad (m)$$

$$X_{(2,1)} + X_{(2,2)} + X_{(2,3)} + X_{(2,4)} \leq 1 \quad (n)$$

:

$$X_{(12,1)} + X_{(12,2)} + X_{(12,3)} + X_{(12,4)} \leq 1 \quad (o)$$

تعداد محدودیت‌های حداقل طول کارگاه استخراج ۱۰ عدد بوده که ۳ مورد از آن‌ها با استفاده از رابطه‌های (q) ، (p) و (r) در ادامه نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}
 &-X_{(1,1)} - X_{(1,2)} - X_{(1,3)} - X_{(1,4)} + X_{(2,1)} \\
 &+ X_{(2,2)} + X_{(2,3)} + X_{(2,4)} + X_{(3,1)} - X_{(3,2)} \quad (p) \\
 &-X_{(3,3)} - X_{(3,4)} \leq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &-X_{(2,1)} - X_{(2,2)} - X_{(2,3)} - X_{(2,4)} + X_{(3,1)} \\
 &+ X_{(3,2)} + X_{(3,3)} + X_{(3,4)} - X_{(4,1)} - X_{(4,2)} \quad (q) \\
 &-X_{(4,3)} - X_{(4,4)} \leq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &-X_{(10,1)} - X_{(10,2)} - X_{(10,3)} - X_{(10,4)} + X_{11,1} \\
 &+ X_{(11,2)} + X_{(11,3)} + X_{(11,4)} - X_{(12,1)} - X_{(12,2)} \quad (r) \\
 &-X_{(12,3)} - X_{(12,4)} \leq 0
 \end{aligned}$$

همچنین چهار نمونه از روابط محدودیت هم‌ترازی برای این مثال به شرح زیر است. عدد G در روابط ارایه‌شده برای محدودیت‌های هم‌ترازی برابر با ۱۰۰ در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned}
 &101X_{(2,1)} + 102X_{(2,2)} + 103X_{(2,3)} + 104X_{(2,4)} \\
 &+ 99X_{(3,1)} + 98X_{(3,2)} + 97X_{(3,3)} + 96X_{(3,4)} \leq 201 \quad (s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &99X_{(2,1)} + 98X_{(2,2)} + 97X_{(2,3)} + 96X_{(2,4)} \\
 &+ 101X_{(3,1)} + 102X_{(3,2)} + 103X_{(3,3)} \\
 &+ 104X_{(3,4)} \leq 201
 \end{aligned} \quad (t)$$

$$\begin{aligned}
 &101X_{(10,1)} + 102X_{(10,2)} + 103X_{(10,3)} \\
 &+ 104X_{(10,4)} + 99X_{(11,1)} + 98X_{(11,2)} \\
 &+ 97X_{(11,3)} + 96X_{(11,4)} \leq 201
 \end{aligned} \quad (u)$$

- Industry*, Balkema Rotterdam, pp. 129–135, 1995.
- [4] Alford, C., "Optimisation in Unerground Mine Design," *25th International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry*, The Australasian Institute of Mining and Metallurgy, pp. 213–218, 1995.
- [5] Ataee-pour, M.; "A New Heuristic Algorithm to Optimise Stope Boundaries," *Proceeding of the 2nd Regional APCOM Symposium on Computer Applications in the Mineral Industry*, Moscow, Russia, 1997.
- [6] Jalali, S. E. and Ataee-pour, M., "A 2^D Dynamic Programming Algorithm to Optimize Stope Boundaries," in 2004 Proceedings of the *13th Symposium on Mine Planning and Equipment Selection*, (eds. M. Hardygora et al.), Rotterdam, Balkema, pp. 45–52, 2004.
- [7] Dimitrakopoulos, R. and Grieco, N., "Stope Design and Geological Uncertainty: Quantification of Risk in Conventional Designs and Probabilistic Alternative," *J. of Mining Science*, Vol. 45, No. 2, pp. 152–163, 2009.
- [8] Topal, E. and Sens, J.; "A New Algorithm for Stope Boundary Optimization," *Journal of Coal Science and Engineering*, Vol. 16, No.2, pp. 113–119, 2010.
- [9] Bai, X.; Marcotte, D. and Simon, R.; "Underground Stope Optimization with Network Flow Method," *J. of Computers and Geosciences*, No. 52, pp. 361–371, 2013.
- [10] Bai, X.; Marcotte, D. and Simon, R.; "A Heuristic Sublevel Stope Optimizer With Multiple Raises," *The Journal of The Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, Vol. 114, pp. 427–434, 2014.
- [11] Ataee-pour, M.; "A Critical Survey of the Existing Stope Layout Optimization Techniques," *J. of Mining Science*, Vol. 41, pp. 447–466, 2005.
- محدودیت گفته‌شده برای الگوریتم *Riddle*، محدودیت هم‌ترازی کف کارگاه استخراج نیز لحاظ شده است. در الگوریتم ارائه‌شده در این مقاله به غیر از محدودیت هم‌ترازی کف کارگاه استخراج، تمام محدودیت‌های ارائه‌شده در دو الگوریتم ذکر شده نیز در نظر گرفته شده و دو محدودیت حداقل عرض پایه‌های جانبی و حداکثر ارتفاع کارگاه استخراج نیز علاوه بر این محدودیت‌ها در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که الگوریتم *Riddle* محدودیت حداقل عرض پایه‌های جانبی را به روش جستجو محور برای تعیین محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج زیرزمینی به کار می‌برد، اما این محدودیت در الگوریتم جدید ارائه‌شده در این مقاله به روش ریاضی محور در نظر گرفته می‌شود. بنابراین روشی که در این مقاله برای یافتن محدوده بهینه کارگاه‌های استخراج زیرزمینی در یک طبقه استخراجی ارائه شد، ریاضی محور بوده و توانایی یافتن جواب بهینه واقعی را دارد. در عین حال، دویعدی بودن و کاربرد آن صرفاً برای روش‌های استخراج عمودی، مواردی هستند که ممکن است دامنه کاربرد این الگوریتم را محدود نمایند. پیشنهاد می‌شود تا در تحقیقات آینده برای پیدا کردن محدوده بهینه سه‌بعدی تحقیق شود.

۹- مراجع

- [1] Jalali, S. A. and Ataepour, M.; "Optimization of Stope Boundaries by Dynamic Programming Algorithm," *Amirkabir Journal of Civil and Environmental Engineering*, Vol. 62, No. 16, pp. 37–48, 2005 (in Persian).
- [2] Riddle, J.; "A Dynamic Programming Solution of a Block-Caving Mine Layout," *14th International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry*, Society for Mining, Metallurgy and Exploration, Colorado, pp. 767–780, 1977.
- [3] Ovanic, J. and Young, D.; "Economic Optimisation of Stope Geometry using Separable Programming with Special Branch and Bound Techniques," *3rd Canadian Conference on Computer Applications in the Mineral*