

کاربرد روش توابع پایه-شعاعی چندربعی برای حل معادله هلمهولتز به منظور آنالیز امواج لرزه‌ای در مخازن سدهای صلب

رضا بابایی^۱، احسان جباری^{۱*}، مرتضی اسکندری قادی^۲

^۱ گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران

^۲ دانشکده مهندسی عمران، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸-۰۳-۰۷

بازنگری: ۱۳۹۸-۰۶-۰۴

پذیرش: ۱۳۹۸-۰۶-۰۵

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۶-۲۴

کلمات کلیدی:

روش توابع پایه-شعاعی چندربعی

سد بتنی وزنی

پارامتر شکل

حوزه فرکانس

فشار هیدرودینامیک

خلاصه: هزینه بالای ساخت شبکه، نیاز به حل اساسی وابسته به شرایط مسئله، تکنیکی، شبیه‌سازی کل میدان، نیاز به شبکه منظم از خطوط متقاطع و ... از برجسته‌ترین نقاط ضعف روش‌های عددی باشبکه پر کاربرد در حل مسائل مکانیک محیط‌های پیوسته می‌باشد. در این پژوهش، با هدف رفع برخی از این نواقص، روش بدون شبکه پایه-شعاعی چندربعی برای آنالیز دوبعدی امواج لرزه‌ای در مخازن سدهای صلب توسعه داده شد. به این منظور، معادله هلمهولتز و شرایط مرزی مختلط حاکم بر مسئله با استفاده از تابع چندربعی در حوزه فرکانس باز تولید و روند حل آن ارائه گردید. نتایج نشان داد که استفاده از فرم اصلی و مختلط این تابع به ترتیب برای فرکانس‌های کمتر و بیشتر از فرکانس طبیعی مخزن، زمان محاسبات را بهینه می‌کند. همچنین برای تعیین مهم‌ترین عامل در دقت و همگرایی روش مذکور یعنی پارامتر شکل بهینه، ابتدا ناکارآمدی برخی از روش‌های پر کاربرد پیشین به اثبات رسید سپس یک الگوریتم جدید و پرسرعت معرفی گردید. نتایج این پژوهش نشان داد که پارامتر شکل بهینه برحسب فرکانس‌های مختلف بارگذاری قابل فرمول‌بندی است. چنین ویژگی کاربرد روش چندربعی در این مسئله خاص را نسبت به سایر روش‌ها آسان‌تر و هزینه‌های محاسباتی آن را کمتر می‌کند. دقت بالای روش حاضر طی دو مثال مختلف به ترتیب با و بدون در نظر گرفتن اثر جذب رسوبات کف مخزن در مقایسه با حل‌های دقیق نشان داده شد که خطای ناچیز آن به دلیل تعریف یک تابع تخمین پیوسته دقیق در کل دامنه مسئله و نیز استفاده از یک الگوریتم کارا برای پیدا کردن پارامتر شکل بهینه می‌باشد.

۱- مقدمه

دست آمد [۱]. در ادامه چوپرا نشان داد که حل وسترگارد تنها برای فرکانس‌های تحریک کوچک‌تر از فرکانس طبیعی اول مخزن معتبر می‌باشد. ایشان با استفاده از تحلیل مختلط و با لحاظ کردن فرضیات وسترگارد اقدام به حل تحلیلی معادله هلمهولتز نمود. چوپرا مؤلفه افقی و قائم زلزله را محاسبه نمود و نشان داد که صرف‌نظر کردن از تراکم‌پذیری و امواج سطحی در حالت تحریک افقی می‌تواند به ترتیب منجر به خطایی در حد ۵/۱ و ۵/۵ درصد در محاسبه نیروی جانبی زلزله گردد [۲]. هومار یک مدل المان‌محدود برای تحلیل و محاسبه فشار هیدرودینامیک مخزن بی‌نهایت در یک سد وزنی ارائه کرد. در این تحقیق یک شرط مرزی انتشاری که برای یک محدوده فرکانسی تحریک تقریباً وسیع کاربرد دارد، ارائه شده است. وی نشان داد که

جابجایی‌های نسبی وجه مشترک سد و مخزن به هنگام زلزله، حالت کشش موجود در جرم سیال مخزن را برهم می‌زند و باعث انعکاس و انتشار امواج فشاری در آن می‌شود. در دهه‌های اخیر محققین بسیاری، روش‌های تحلیلی و عددی متفاوتی را برای محاسبه فشار هیدرودینامیک در مخازن سدها توسعه داده‌اند. وسترگارد نخستین فردی بود که با فرضیات ساده‌کننده‌ای اقدام به حل معادله حاکم (معادله هلمهولتز^۱) در قلمرو فرکانس نمود. با آن فرضیات، یک رابطه تحلیلی به فرم سری برای توزیع فشار بر روی بدنه سد صلب به

1 Helmholtz equation

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: e.jabbari@qom.ac.ir



روش المان مرزی در راستای اجتناب از وجود شبکه، مسائل را فقط با المان بندی مرزها حل می‌کند. میلان با استفاده از این روش، اثر هندسه مخازن را بر روی مقدار و توزیع فشار هیدرودینامیکی وارده بر سدهای بتنی در حوزه فرکانس بررسی کرد. ایشان نشان داد که مقدار فشار هیدرودینامیک و جابجایی سد در مدل سه‌بعدی بیشتر از مدل دوبعدی به دست می‌آید و بر لزوم به‌کارگیری مدل‌های سه‌بعدی تأکید کرد [۷]. نجیب روش المان مرزی را برای آنالیز مخازن پوشیده از یخ در سدهای بتنی تحت نیروهای هارمونیک افقی به کار برد. وی توأمأ یک شرط مرزی جدید جاذب انرژی برای دور دست مخزن پیشنهاد داد به طوری که با استفاده از آن، مرز مدل‌سازی در فاصله نزدیک‌تری از سد قرار می‌گیرد و طول مخزن یا به عبارت دیگر حجم محاسبات کاهش می‌یابد [۸]. در روش المان مرزی ضمن حل مسئله در فضایی با یک بعد کمتر از فضای فیزیکی، شرط میرایی تشعشی^۲ به صورت تحلیلی ارضا می‌شود ولی نیاز به حل اساسی^۳ وابسته به شرایط مسئله و موضوع تکنیکی^۴ از برجسته‌ترین نقاط ضعف این روش محسوب می‌گردند.

روش المان مرزی-محدود مقیاس شده^۵ مزایای روش المان‌های محدود (عدم نیاز به حل اساسی و ...) و المان‌های مرزی (شبکه‌بندی مرزها، ارضای شرط میرایی تشعشی و ...) را با یکدیگر ترکیب کرده است. این روش برای آنالیز هیدرودینامیکی سد و مخزن هم در حوزه زمان و هم در حوزه فرکانس، عملکرد خوبی از خود به نمایش گذاشته است [۹ و ۱۰]. در روش المان مرزی-محدود مقیاس شده از توابع شکل کلاسیک روش المان‌های محدود استفاده می‌گردد که می‌تواند برخی از مشکلات آن را با خود به دنبال داشته باشد. همچنین این روش به حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با ماتریس ضرایب پر منجر می‌شود.

روش معادلات مجزا به عنوان یک روش المان مرزی-محدود مقیاس شده توسعه‌یافته با ایجاد ویژگی‌های جدید توانسته است ماتریس‌های ضرایب دستگاه معادلات حاکم را به صورت قطری تولید کند و حجم محاسبات را به طور چشمگیری کاهش دهد. بابایی و همکاران با این روش، شرایط مرزی و معادله‌ی حاکم بر توزیع فشار هیدرودینامیک در مخازن سدهای بتنی را در حوزه فرکانس استخراج

با اعمال این شرط مرزی در مقایسه با شرط مرزی سامرفلد^۱ نتایج واقعی‌تری به دست می‌آید. شرط مرزی مذکور وابسته به فرکانس بوده و از این‌رو تحلیل مخزن در قلمرو فرکانس صورت می‌گیرد [۳]. شاران مدلی برای لحاظ کردن میرایی انتشاری امواج هیدرودینامیک در سدها تحت اثر زلزله افقی با استفاده از روش المان محدود ارائه کرد. در این کار نشان داده شد که شرط مرزی سامرفلد و مشابه آن تنها برای فرکانس‌های تحریک بزرگ‌تر از فرکانس طبیعی اول مخزن مناسب هستند و برای فرکانس‌های پائین‌تر که در پاسخ سازه سهم بیشتری دارند، مناسب نمی‌باشند. از این‌رو مرز قطع شده بالادست بایستی در فاصله بزرگی از سد حدوداً (۲ برابر ارتفاع سد) قرار گیرد [۴]. روش المان محدود دارای قابلیت‌های خوبی در آنالیز لرزه‌ای سدهای بتنی وزنی می‌باشد ولی علاوه بر هزینه زیاد برای ساخت شبکه‌ها مشکلاتی همچون (۱) ضرورت ایجاد شبکه‌های درشت‌تر و در نتیجه کاهش دقت در شبیه‌سازی میدان‌های بزرگ‌مقیاس مانند مخزن سد، (۲) تعمیم دشوار به مسائل سه بعدی مخصوصاً در هندسه‌های پیچیده و (۳) عدم توانایی مدل‌سازی میدان‌های نیمه بی‌نهایت را با خود به همراه دارد.

چنین تأثیر جریان‌ات سطحی و غیرخطی بودن شتاب انتقالی را در تحلیل دوبعدی سد وزنی و مخزن مطالعه کرد. سد با المان‌های محدود و مخزن با تفاضل‌های محدود گسسته سازی شد و سد پایین‌فالت به عنوان مطالعه موردی تحلیل شد. نتایج ایشان نشان می‌دهد که تأثیرات امواج سطحی و شتاب انتقالی در پاسخ سد بی‌اهمیت می‌باشند، اما می‌توانند منجر به خیز شدید آب در وجه بالادست شوند. در تحلیل اخیر مقدار این خیز تا حد ۷/۲ متر هم رسید. در ادامه وی یک الگوی تفاضل محدود سه‌بعدی برای تحلیل فشار هیدرودینامیکی غیرخطی بر روی یک سد قوسی را ارائه کرد. رفتار غیرخطی امواج سطحی و شتاب انتقالی در مدل لحاظ و چند سد با اشکال و دیواره‌های مخزن مختلف تحت زلزله کوبه مطالعه شدند. نتایج نشان می‌دهد که خیز اوج سطح آب برای یک سد قوسی به ۱۸ متر می‌رسد که به طرز مبالغه‌آمیزی اعتبار آن را زیر سؤال می‌برد [۵ و ۶]. روش تفاضل محدود به شبکه منظمی از خطوط متقاطع کمکی نیاز دارد و معمولاً تنها برای هندسه و شرایط مرزی منظم قابل کاربرد است. به علاوه به دلایلی همچون مدل‌سازی کل فضا، هزینه محاسباتی بالایی دارد.

2 Radiation damping

3 Fundamental solution

4 Singularity

5 Scaled boundary finite element method (SBFEM)

1 Sommerfeld

ماتریس ضرایب را از بین برده اند [۱۹]. پاتل و همکاران در سال ۲۰۱۷ از روش چندربعی برای حل معادله لاپلاس^۴ و شبیه‌سازی آبخوان‌های نامنظم زیرزمینی استفاده کردند. ایشان در این تحقیق پارامترهایی مانند ناهمگنی، انواع شرایط مرزی و فشار متغیر را بررسی کردند و نتیجه گرفتند که روش حاضر می‌تواند از جنبه دقت و هزینه محاسباتی، به‌عنوان یک شبیه‌ساز بهینه در مدیریت آب‌های زیرزمینی نیز عمل کند [۲۰]. روش چندربعی قابلیت ترکیب با سایر روش‌های عددی را نیز داراست. به‌عنوان مثال لی و همکاران در سال ۲۰۱۸ ترکیب این روش را با روش اختلاف محدود در حل معادلات پخش و انتقال به کار بردند و با استفاده از توزیع خاصی از نقاط به نتایجی دقیق‌تر از روش اختلاف محدود دست یافتند [۲۱].

دقت روش چندربعی کاملاً به پارامتر شکل^۵ آن وابسته است. محققین برای یافتن پارامتر شکل بهینه روش‌های تجربی مختلفی را ارائه کرده‌اند [۲۲-۲۴]. کانزا [۲۵ و ۲۶] روابط توانی و خطی را برای تعیین پارامتر شکل متناسب با هر گره محاسباتی ارائه کرده است. سارا اثبات کرد که وقتی پارامتر شکل بزرگ می‌شود، خطای این روابط زیاد می‌شود و برای رفع این مشکل یک رابطه تصادفی را پیشنهاد داد [۲۷]. طبیعت تصادفی این رابطه باعث نتایج مختلف و غیرثابتی در تخمین توابع می‌شود. گل‌بابایی و ربیعی [۲۸] نیز یک رابطه مثلثاتی ارائه کرده‌اند که نسبت به روابط مذکور دقت بالاتری دارد. علاوه بر این، محققین دیگری با ترکیب روابط پیشین توانسته‌اند از مزایای آن‌ها به‌طور هم‌زمان بهره‌مند شوند [۲۹]. دقت روابط مذکور بسته به نوع تابع RBF، بعد مسئله، نوع مسئله (درون‌یابی یا حل معادلات دیفرانسیل) شرایط مرزی (اجباری یا طبیعی) و نوع توزیع نقاط (یکنواخت یا غیریکنواخت) متفاوت است و هر رابطه برای شرایط خاصی پاسخ قابل‌قبول ارائه داده است. همچنین روابط تعیین پارامتر شکل متغیر به دلیل ایجاد اختلافات بیشتر در درایه‌های ماتریس ضرایب، احتمال کوچک شدن عدد وضعیت و بدحالت شدن آن را بالاتر می‌برند. به‌علاوه در چنین روابطی تعیین حد پایین و حد بالای پارامترهای شکل همواره یک چالش بوده است. بی‌آزار یک روش کلی برای تعیین حدود مذکور پیشنهاد داده است. در روش ایشان مسئله ابتدا با پارامترهای شکل مختلف حل می‌شود تا حدود تقریبی آن به دست آید سپس با استفاده از آنها حل نهایی حاصل می‌گردد. واضح

و حل کردند [۱۱ و ۱۲]. این روش در هندسه‌های پیچیده با مشکل مواجه می‌شود چراکه در آن، همه مرزها باید از محل مرکز مختصات محلی قابل‌رویت باشند.

همان‌طور که اشاره شد تحقیقات در زمینه تحلیل دینامیکی مخازن سدهای بتنی در مسیر اجتناب از شبکه و مشکلات آن پیش می‌روند. پژوهش حاضر نیز در این راستا به توسعه روش بدون شبکه چندربعی^۱ باهدف رفع برخی از مشکلات نامبرده پرداخته است. اصطلاح «چندربعی» ترجمه فارسی عبارت لاتین مالتی کوادریک است که ترجمه درستی به نظر می‌رسد و براساس سایر پژوهش‌های پیشین فارسی، در این مقاله نیز استفاده شده است. این روش زیرمجموعه روش‌های توابع پایه شعاعی^۲ است که کانزا برای اولین بار از آن در حل معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی استفاده کرد [۱۳]. لی و همکاران طی مثال‌های مختلفی، روش چندربعی و روش المان محدود را مقایسه نمودند. ایشان با استفاده از بهینه‌سازی پارامتر شکل در سه مثال متفاوت، به این نتیجه رسیدند که دقت روش چندربعی ضمن کاهش حجم محاسبات از روش المان محدود بالاتر است [۱۴]. سارا در سال ۲۰۰۶ به گردآوری خانواده توابع پایه شعاعی و بررسی خصوصیات و ارتباط آن‌ها با یکدیگر پرداخت و با آوردن مثال‌هایی، روش چندربعی را اصلی‌ترین عضو این خانواده معرفی کرد [۱۵]. کانزا و همکاران در سال ۲۰۱۳ معادلات برگر^۳ سه‌بعدی را با روش چندربعی حل کردند. ایشان با روش تجزیه دامنه، پیچیدگی دامنه‌های بزرگ را تسهیل و دقت نتایج را با کوچک کردن پارامتر شکل افزایش دادند [۱۶]. وو و ژانگ با استفاده از روش نامبرده معادلات غیرخطی موج را گسسته‌سازی و حل کردند. نتایج آن‌ها نه‌تنها نشان‌دهنده دقت بالای جواب‌ها بود بلکه مشخصات خوبی در ردیابی طولانی‌مدت داشت [۱۷]. باستامنت و همکاران معادلات استوکس را در حالت دوبعدی در یک دامنه محدود حل کرده و تقریب مناسبی برای مقادیر سرعت و فشار به دست آوردند [۱۸]. روش چندربعی برای حل معادله هلمهولتز نیز در حالات تئوری به کار رفته است. در این حالات برخلاف تحلیل لرزه‌ای مخزن سد در حوزه فرکانس، آنالیزها مختلط نبوده است. در این راستا، لین و همکاران چند مثال دوبعدی را ارائه کرده و با فن خاصی مشکل بدحالت شدن

1 Multiquadric (MQ)

2 Radial Basis Function (RBF)

3 Burgers equation

4 Laplace equation

5 Shape parameter

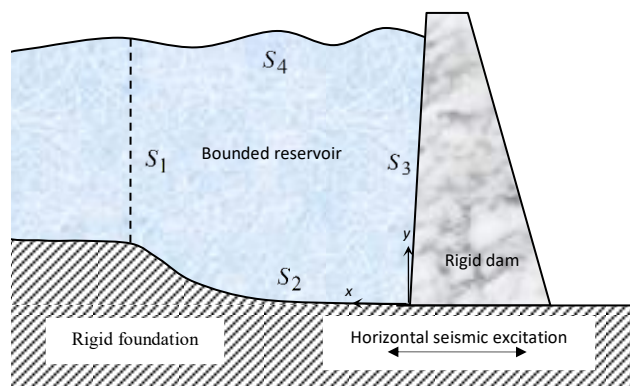
روش‌های پرکاربرد پیشین برای تعیین پارامتر شکل بهینه بررسی و یک الگوریتم مناسب معرفی می‌گردد. پس از تعیین پارامترهای شکل بهینه متناظر با فرکانس‌های مختلف بارگذاری، رابطه بین آن‌ها مشخص خواهد شد. با در اختیار داشتن چنین رابطه‌ای دیگر نیاز به بهینه کردن پارامتر شکل در هر فرکانس بارگذاری نخواهد بود و ضمن کاربرد آسان‌تر روش چندربعی، هزینه‌های محاسباتی آن نیز به شدت کاهش خواهد یافت. در نهایت نتایج رویکرد پیشنهادی در قالب دو مثال متفاوت و کاربردی با روش‌های تحلیلی مقایسه و دقت و توانایی آن ارزیابی می‌شود.

۲- معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی حاکم

تحلیل سدهای وزنی در فضای دوبعدی پاسخ قابل قبولی از رفتار واقعی آن‌ها ارائه می‌دهد. بنابراین مخزن و معادله حاکم بر آن در این مقاله به صورت دوبعدی در نظر گرفته می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر انتشار امواج فشار هیدرودینامیک مخزن در حوزه فرکانس به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود که یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای از نوع معادلات بیضوی با ضرایب ثابت است و با عنوان معادله هلمهولتز شناخته می‌شود [۱۱]:

$$\nabla^2 \phi + K^2 \phi = 0 \quad (1)$$

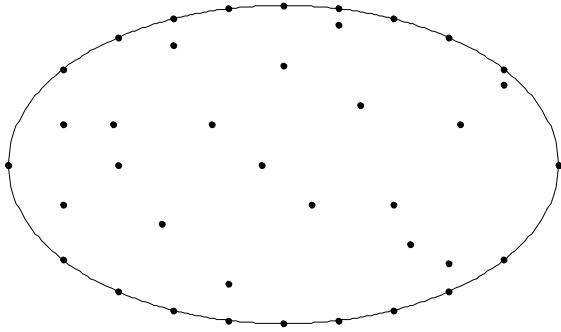
در این رابطه ∇ عملگر لاپلاس، ϕ تابع پتانسیل سرعت و K عدد موج است که به صورت نسبت فرکانس حرکت هارمونیک بر سرعت امواج صوتی در محیط سیال ($K = \frac{\omega}{c}$) تعریف می‌شود. چهار شرط مرزی مطابق شکل (۱) نیز در مخزن سد وجود دارد که در ادامه به طور جداگانه بر حسب تابع پتانسیل سرعت در حوزه فرکانس بیان می‌شوند [۱۱]:



شکل ۱. نمایش شماتیک شرایط مرزی مخزن با سد و پی صلب
Fig. 1. Illustration of Rigid dam body and foundation boundary conditions

است که این الگوریتم به هزینه محاسباتی بالایی نیاز دارد [۳۰]. چن و همکاران در سال ۲۰۱۸ یک الگوریتم جدید برای یافتن پارامتر شکل ارائه دادند. این الگوریتم در ابتدا پارامتر شکل بهینه را برای مسائلی که حل تحلیلی دارند به دست می‌آورد و از آن برای حل مسائل مشابهی که حل تحلیلی ندارند استفاده می‌کند [۳۱]. آذرینی در سال ۲۰۱۸ یک الگوریتم با دقت بالاتر از سایر روش‌های تعیین پارامتر شکل بهینه ارائه داد. در این روش مسئله با تعداد N و $N-2$ نقطه محاسباتی به ازای پارامتر شکل‌های مختلفی حل می‌شود و پارامتری که کمترین اختلاف بین دو جواب را ارائه دهد، پارامتر بهینه است [۳۲]. فلاح و همکاران در سال ۲۰۱۹ یک روش سریع برای یافتن پارامتر شکل بهینه در روش چندربعی با کاربرد در حل مسائل تراوش ارائه دادند. در این الگوریتم از روش نصف کردن بازه پارامتر شکل ضمن مشخص کردن حدود آن استفاده می‌شود و مقدار بهینه آن مربوط به حالتی است که تغییرات پاسخ مسئله نسبت به تغییرات پارامتر شکل کمینه باشد [۳۳]. کوشکی و همکاران نیز در سال ۲۰۱۹ با استفاده از الگوریتم ژنتیک به همراه یک تابع هدف جدید، روشی برای یافتن پارامتر شکل بهینه ارائه کردند که برخلاف روش‌های پیشین، پارامتر شکل به دست آمده از آن به تغییرات تعداد نقاط محاسباتی وابسته نیست [۳۴].

روش چندربعی تاکنون به عنوان اصلی ترین عضو خانواده توابع پایه شعاعی معرفی شده است [۱۵] یعنی دارای کاربرد ساده تر و دقت بالاتر از سایر توابع پایه شعاعی در حل معادلات مشتق جزئی می‌باشد. این امر در حل مسائل پتانسیل که شامل موضوع این تحقیق نیز می‌شود، به اثبات رسیده است [۳۵]. لذا با آگاهی از این موضوع روش چندربعی از میان خانواده توابع پایه شعاعی انتخاب شد. همچنین چون روش المان محدود پرکاربردترین روش باشبکه در آنالیز سدها و مبنای نرم‌افزارهای تجاری مانند Ansys و Abaqus است و قبلاً دقت و سرعت بالاتر روش چندربعی نسبت به آن به اثبات رسیده است [۱۴]، روش چندربعی در این مقاله به عنوان یک رقیب برای روش المان محدود در آنالیز سدها در نظر گرفته شد و برای اولین بار توسعه آن با حل مسئله انتشار امواج هیدرودینامیک در مخازن سدهای صلب آغاز گردید. به این منظور آنالیز مختلط در حوزه فرکانس انجام خواهد شد، چراکه شرایط مرزی مربوطه مختلط هستند. در این راستا معادلات و شرایط مرزی حاکم در حالت کلی با تابع چندربعی بازتولید و روند حل آن‌ها بیان خواهد شد. در این روند،



شکل ۲. نمایش مراکز محاسباتی یک میدان دلخواه در روش چندربعی
Fig. 2. Illustration of computational nodes of MQ method in an arbitrary domain

شرط مرزی سطح آزاد مخزن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\omega^2}{g} \phi \quad (5)$$

در این رابطه g شتاب گرانش زمین است. نشان داده شده است که اثرات امواج سطحی بر توزیع فشار هیدرودینامیک روی بدنه سدها ناچیز است، لذا در محاسبات قابل صرف نظر می باشد و می توان به جای رابطه (۵) رابطه $\phi = 0$ را در نظر گرفت.

۳- روش چندربعی

در روش چندربعی در میدان محاسباتی تعداد N مرکز محاسباتی^۲ در نظر گرفته می شود که هم در درون میدان و هم روی مرزها قرار می گیرند (شکل ۲). این نقاط برخلاف روش های با شبکه نیاز به ارتباط اولیه با یکدیگر ندارند لذا کاربرد روش نامبرده در هندسه های پیچیده و مسائل سه بعدی بسیار ساده است و دیگر هزینه های پیش پردازش شبکه بندی را ندارد.

توزیع نقاط محاسباتی، بسته به نوع هندسه و پدیده مورد بررسی، می تواند به صورت یکنواخت یا غیریکنواخت باشد. در این پژوهش توزیع یکنواخت مدنظر قرار گرفته است.

در روش چندربعی، جواب معادله دیفرانسیل پاره ای به همراه شرایط مرزی حاکم بر مسائل دوبعدی با تابع زیر تقریب زده می شود:

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c^2} \quad (6)$$

در رابطه (۶)، (x_j, y_j) مؤلفه های نقاط محاسباتی هستند و c

الف) شرط مرزی بالادست (دوردست) (S_1): با ارتعاش سد امواج فشاری در مخزن ایجاد شده و به سمت دوردست منتشر می شوند و انرژی را از محیط دور می کنند. در این صورت در مرز بالادست تنها موج پیشرو خواهیم داشت که رابطه زیر برای شبیه سازی آن در نظر گرفته می شود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{i\omega}{C} \phi \quad (2)$$

در این رابطه، n بردار یکه عمود بر مرز و $i = \sqrt{-1}$ می باشد. تعبیر فیزیکی رابطه (۲) این است که یک گروه مستهلک کننده برای امواج فشاری در مرز بالادست مخزن ایجاد شده است.

ب) شرط مرزی کف مخزن (S_2): فرض می شود که کف مخزن افقی و صلب باشد. وجود لایه هایی از مواد رسوبی که به مرور زمان در کف مخزن انباشته شده اند، می تواند نقش عمده ای در جذب انرژی سیستم از طریق انکسار امواج فشاری به داخل پی داشته باشد. اگر از مؤلفه ی قائم شتاب زمین صرف نظر کنیم و تنها مؤلفه افقی زمین مدنظر باشد، رابطه ی زیر به عنوان شرط مرزی کف مخزن در نظر گرفته می شود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{i\omega}{\beta C} \phi \quad (3)$$

در این رابطه β نسبت امپدانس آکوستیکی^۱ محیط پی به محیط سیال است و به صورت $\beta = (1 + \alpha)(1 - \alpha)$ تعریف می شود که در آن α نسبت دامنه امواج منعکس شده از کف مخزن به دامنه امواج معمولی می باشد و ضریب بازتاب نام دارد.

پ) شرط مرزی مشترک سد و مخزن (S_3): سرعت سیال و سد در مرز مشترک آن ها و در جهت عمود بر مرز یکسان است. به این منظور، شرط مرزی سینماتیکی به شکل زیر بیان می گردد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\hat{a}_{ms}}{i\omega} \quad (4)$$

که در آن \hat{a}_{ms} دامنه شتاب عمود بر وجه بالادست سد در اثر امواج هارمونیک زمین با فرکانس ω است.

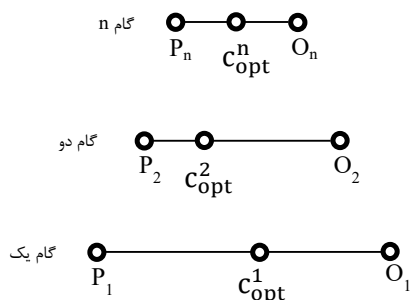
ت) شرط مرزی سطح آزاد مخزن (S_4): تحت ارتعاش سد، امواجی در سطح مخزن به وجود می آیند و آن را متلاطم می سازند. با فرض جریان غیر چرخشی و صرف نظر کردن از مؤلفه افقی سرعت و فشار هیدرواستاتیک،

2 Computational nodes

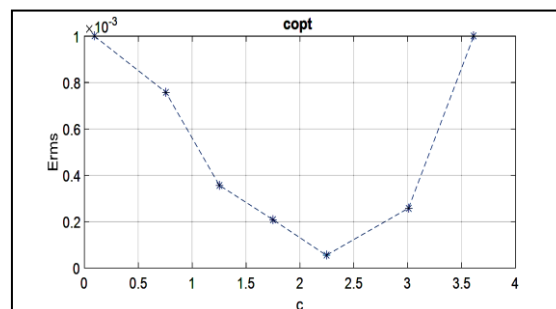
1 Acoustic Impedance

جدول ۱. روابط پارامتر شکل متغیر
Table 1. Variable shape parameter relations

رابطه	نام روش [شماره مرجع]
$c_j = \left[c_{\min}^2 \left(\frac{c_{\max}^2}{c_{\min}^2} \right)^{(j-1)(N-1)} \right]^{0.5}; j = 1, \dots, N$	[۲۵] ESP
$c_j = c_{\min} + \left(\frac{c_{\max} - c_{\min}}{N-1} \right) \times j; j = 1, \dots, N$	[۲۶] ILSP
$c_j = c_{\max} + \left(\frac{c_{\min} - c_{\max}}{N-1} \right) \times j; j = 1, \dots, N$	[۲۶] DLSP
$c_j = c_{\min} + (c_{\max} - c_{\min}) \times \text{rand}(1, N); j = 1, \dots, N$	[۲۷] RSP
$c_j = c_{\min} + (c_{\max} - c_{\min}) \times \sin\left((j-1) \frac{\pi}{2(N-1)} \right); j = 1, \dots, N$	[۲۸] TSP
$c_j = \begin{cases} \text{TSP}_j \\ \text{DLSP}_j \\ \text{ESP}_j \end{cases}; j = 1, \dots, N$	[۲۹] HSP
$c_j = \begin{cases} c_{\min} & ; j \text{ be odd} \\ c_{\max} & ; j \text{ be even} \end{cases}$	[۲۹] BSP



شکل ۴. نمایش شماتیک روند پرسرعت انتخاب پارامتر شکل بهینه
Fig. 4. Illustration of high-speed procedure of shape parameter selection



شکل ۳. تغییرات خطای جذر میانگین مربعات برحسب پارامتر شکل
Fig. 3. Erms variations vs shape parameter

به این منظور مشتقات جزئی تابع فوق که در معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله وجود دارند، به ترتیب زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{x - x_j}{\sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c^2}} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{c^2 + y^2 - 2yy_j + y_j^2}{\left((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + c^2 \right)^{3/2}} \quad (8)$$

پژوهش‌های متعدد گذشته دقت بالای روش چندربعی را تأیید می‌کنند و این دقت را کاملاً وابسته به پارامتر شکل می‌دانند. این مهم در زیر بخش بعد مورد بحث قرار گرفته است. پس از یافتن پارامتر شکل بهینه و ضرایب مجهول، پاسخ مسئله با استفاده از رابطه (۶) در

پارامتر شکل است. λ_j ها نیز ضرایب مجهولی هستند که برای به دست آوردن آنها باید تعداد N نقطه برهم‌نهی در میدان محاسباتی در نظر گرفته شود. دو روش برهم‌نهی^۱ و حداقل مربعات^۲ برای انتخاب نقاط برهم‌نهی در میدان محاسباتی وجود دارد. در روش برهم‌نهی، نقاط انتخابی منطبق بر نقاط محاسباتی هستند ولی در روش حداقل مربعات این‌گونه نخواهد بود. در این پژوهش از روش اول استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که این نقاط به دو بخش نقاط روی مرز و داخل میدان محاسباتی تقسیم می‌شوند، نقاط روی مرز برای اعمال شرایط مرزی مسئله و نقاط داخل میدان هم برای ارضاء معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر میدان محاسباتی در نظر گرفته می‌شوند.

1 Collocation
2 Least squares

با هر دو پارامتر شکل متوالی به دست می‌آید. هر C که خطای متناظر آن کمینه باشد، به‌عنوان پارامتر شکل بهینه انتخاب می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، آن پارامتر شکلی بهینه است که تغییرات جواب مسئله نسبت به آن کمینه شود. این موضوع در شکل (۳) نمایش داده شده است. در این نمودار نقطه $۲,۲۵$ با کم‌ترین خطای معیار، پارامتر شکل بهینه است.

در ادامه، بازه‌ای جدید که کران پایین و بالای آن به ترتیب برابر میانگین پارامتر شکل بهینه و کران پایین و بالای بازه قبلی است (روش نصف کردن)، انتخاب می‌شود. این گزاره را می‌توان به شکل ریاضی زیر یا مطابق شکل (۴) نشان داد:

$$P^{m+1} = 0.5 \times (P^m + c_{opt}^m) \quad (11)$$

$$O^{m+1} = 0.5 \times (O^m + c_{opt}^m) \quad (12)$$

به‌طوری‌که m گام حاضر و $m+1$ گام بعدی، P و O به ترتیب کران پایین و بالای بازه انتخابی جدید پارامتر شکل هستند. در این گام جدید با تقسیم بازه به دست‌آمده به قسمت‌های کوچک‌تری نسبت به بازه قبل، عددی به‌عنوان پارامتر شکل بهینه به دست می‌آید، این فرآیند تا رسیدن به دقت لازم ادامه می‌یابد. دقت لازم بسته به حدود جواب‌های مسئله تعیین می‌شود.

واضح است که به دلیل نصف شدن بازه انتخابی در هر تلاش، سرعت رسیدن به مقدار پارامتر شکل بهینه خیلی بالا خواهد بود لذا هزینه‌های محاسباتی به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

۴- باز تولید معادلات حاکم و شرایط مرزی با تابع چندربعی

معادله هلمهولتز یا رابطه (۱) بر اساس فرم اصلی تابع چندربعی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \left(\frac{2c^2 + y_j^2 - 2y_j y_j + y_j^2 + x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2}{((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2)^{3/2}} + \right) \quad (13)$$

$$\omega^2 \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2} = 0 \quad ; i=1,2,\dots,n_1$$

در این رابطه n_1 تعداد مراکز برهم‌نهی درون مخزن می‌باشد. روابط (۲) تا (۵) نیز با فرض مستطیلی بودن مخزن به فرم‌های روابط (۱۴) تا (۱۷) بازنویسی می‌شوند:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \left(\frac{x_i - x_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2}} + \right) \quad (14)$$

$$\frac{i\omega}{C} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2} = 0 \quad ; i=1,2,\dots,n_2$$

هر نقطه دلخواه از میدان محاسباتی به دست می‌آید.

چنانچه برای آنالیز مسائل مختلط دقت فرم اصلی تابع چندربعی (رابطه ۶) قابل‌قبول نباشد، می‌توان از فرم مختلط آن به شکل زیر استفاده کرد:

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + c_r^2} + \sum_{i=1}^N \lambda_{ij} \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + c_i^2} \quad (9)$$

در رابطه فوق، λ_I و λ_R ضرایب مجهول و c_I و c_R پارامترهای شکل قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع مختلط چندربعی هستند.

۳-۱ پارامتر شکل بهینه

تاکنون تلاش‌های متعددی برای انتخاب مقدار بهینه پارامتر شکل صورت گرفته است که هرکدام از آن‌ها دارای نقاط ضعف و قوتی هستند. هاردی رابطه $c = \frac{1}{0.815d}$ را برای پارامتر شکل بهینه ارائه داد که در آن $d = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i$ ، N تعداد مراکز محاسباتی و d_i فاصله هر مرکز محاسباتی تا نزدیک‌ترین مرکز مجاورش است [۲۲]. پس از وی فرانک رابطه $c = \frac{\sqrt{N}}{1.25D}$ را ارائه داد که در آن D قطر کوچک‌ترین دایره‌ای است که همه مراکز محاسباتی را پوشش می‌دهد [۲۳]. فاس‌هاور نیز رابطه $c = \frac{2}{\sqrt{N}}$ را با کاربرد در تخمین برخی توابع و حل بعضی معادلات دیفرانسیل پیشنهاد کرد [۲۴]. همان‌طور که مشخص است، روابط فوق یک پارامتر شکل ثابت برای همه مراکز محاسباتی ارائه می‌دهند. برخلاف این ایده، محققین روش‌های دیگری نیز برای پارامتر شکل متغیر و مختص هر یک از مراکز محاسباتی پیشنهاد داده‌اند که در جدول (۱) آمده است. در روابط این جدول مقادیر بیشینه و کمینه پارامتر شکل به ترتیب برابر $c_{max} = \frac{3}{\sqrt{N}}$; $c_{min} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ هستند.

در پژوهش پیش رو نشان داده می‌شود که روش‌های نامبرده برای آنالیز فشار هیدرودینامیک در مخزن سدهای وزنی مناسب نیستند و از یک الگوریتم جدید برای تعیین پارامتر شکل بهینه ثابت بر اساس خطای جذر میانگین مربعات^۱ (رابطه ۱۰) به شرح ذیل استفاده می‌شود [۳۳]:

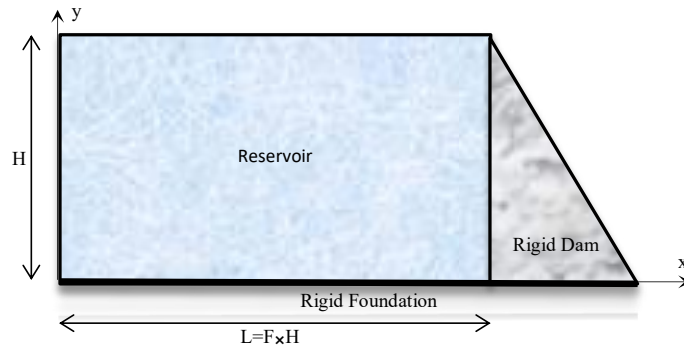
$$E_{rms}^j = \sqrt{(1/N) \sum_{i=1}^N (f(x_i, C^{j+1}) - f(x_i, C^j))^2} \quad j=1,2,\dots \quad (10)$$

ابتدا یک بازه اولیه متناسب با کمینه و بیشینه فاصله مراکز محاسباتی برای پارامتر شکل انتخاب و به چند قسمت مساوی نسبتاً بزرگ تقسیم می‌شود، سپس خطای ریشه میانگین مربعات دو جواب از مسئله متناظر

1 Root mean square error (Erms)

جدول ۲. میانگین درصد خطا در روابط تعیین پارامتر شکل ثابت و متغیر
Table 2. Mean error percent in constant and variable shape parameter relations

(21×21)	(21×11)	(11×11)	تعداد مراکز محاسبات
میانگین درصد خطا برای پارامتر شکل ثابت			رابطه پارامتر شکل
0.4944e+06	0.1341e+04	0.7051e+06	ESP
1.4267e+06	0.3115e+04	0.3326e+06	TSP
1.7199e+06	0.3644e+04	0.3227e+06	ILSP
2.4860e+06	0.4867e+04	0.2605e+06	DLSP
0.7436e+06	0.4247e+04	0.2802e+06	RSP
0.7717e+06	0.4426e+04	0.2577e+06	Hardy
7.9076e+06	2.1188e+04	1.9080e+06	Franke
1.9960e+06	0.4111e+04	0.3199e+06	Fasshauer
1.7223e+06	0.5023e+04	0.2539e+06	HSP
0.4021e+06	0.5162e+04	0.4362e+06	BSP
(51×51)	(41×41)	(41×21)	تعداد مراکز محاسبات
میانگین درصد خطا برای پارامتر شکل ثابت			رابطه پارامتر شکل
0.2823e+05	0.0337e+06	0.4210e+03	ESP
2.8580e+05	0.6280e+06	0.9676e+03	TSP
3.3062e+05	1.1051e+06	1.0185e+03	ILSP
5.0458e+05	0.9230e+06	2.0950e+03	DLSP
1.0736e+05	0.0640e+06	1.3576e+03	RSP
0.0884e+05	0.0233e+06	0.2857e+03	Hardy
0.7543e+05	0.2770e+06	1.922e+03	Franke
3.3215e+05	0.6216e+06	1.6529e+03	Fasshauer
1.5140e+05	0.0137e+06	0.8526e+03	HSP
0.6636e+05	0.1082e+06	1.9483e+03	BSP



شکل ۵. هندسه مخزن آنالیز شده در مثال‌های عددی
Fig. 5. Storage geometry of analyzed numerical examples

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \left(\frac{x_i - x_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2}} + \frac{\hat{a}_{ns}}{i\omega} \right) = 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, n_4 \quad (16)$$

همچنین n_4 تعداد مراکز برهم‌نهی واقع بر مرز مشترک سد و مخزن می‌باشد.

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \left(\frac{y_i - y_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2}} + \right. \quad (17)$$

$$\left. \frac{\omega^2}{g} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2} \right) = 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, n_5$$

که n_2 تعداد مراکز برهم‌نهی واقع بر مرز دوردست می‌باشد.

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \left(\frac{y_i - y_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2}} + \frac{i\omega}{\beta C} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + c^2} \right) = 0 \quad ; i = 1, 2, \dots, n_3 \quad (15)$$

که در آن n_3 تعداد مراکز برهم‌نهی در مرز کف مخزن است.

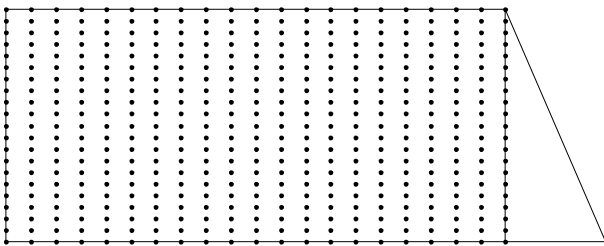
همچنین بار زلزله به صورت $\ddot{u}_g = \hat{a}e^{i\omega t}$ است.

۵-۱-مثال یک: مخزن بدون رسوب کف

در این مثال، توانایی رویکرد حاضر برای محاسبه توزیع فشار هیدرودینامیکی بر روی بدنه یک سد وزنی صلب با ارتفاع $H = 100 \text{ m}$ مورد ارزیابی قرار گرفته است. طول مخزن پر از آب این سد ۴ برابر ارتفاع آن ($F = 4$)، سرعت انتشار امواج در محیط مخزن 1437 m/s ، دامنه شتاب هارمونیک افقی زمین 1 m/s^2 و چگالی سیال 1000 Kg/m^3 می باشد. فرض می شود کف مخزن از یک سنگ سالم و یکپارچه تشکیل شده یا به عبارت دیگر عاری از رسوب است. در این شرایط $\alpha = 1$ و شرط مرزی رابطه (۳) به صورت $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ خواهد بود. همچنین نتایج حاصل با حل دقیق ارائه شده توسط چوپرا مقایسه شده است [۳۶].

برای حل این مسئله ابتدا برای تعیین پارامتر شکل بهینه از ده رابطه ارائه شده در بخش ۳ استفاده شد و توزیع فشار هیدرودینامیک در ۲۱ نقطه با فاصله مساوی بر روی وجه بالادست سد به دست آمد. سپس مقدار میانگین درصد خطا نسبت به حل دقیق با استفاده از تعداد مختلفی از مراکز محاسباتی در نسبت فرکانسی $\eta = \omega / \varpi = 0.3544$ محاسبه شد (جدول ۲).

همان طور که مشاهده می شود، خطای روابط عنوان شده به منظور تعیین پارامتر شکل بهینه برای آنالیز فشار هیدرودینامیک در مخازن سدهای بتنی بسیار زیاد و کاملاً غیرقابل قبول است لذا می توان نتیجه گرفت که روابط مذکور برای معادلات، هندسه و شرایط مرزی خاصی قابل کاربرد هستند و عمومیت ندارند. لازم به ذکر است که این مقادیر خطا برای سایر نسبت های فرکانسی هم محاسبه گردید و تفاوت چندانی با مقادیر جدول (۲) مشاهده نشد.



شکل ۶. آرایش مراکز محاسباتی در مثال ۵-۱

Fig. 6. Computational nodes arrangement in example 5-1

در رابطه (۱۷) تعداد مراکز برهم نهی واقع بر مرز سطح آزاد مخزن است. واضح است که:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 \quad (18)$$

یعنی از روابط (۱۳) تا (۱۷) تعداد N معادله جبری یا یک دستگاه معادلات جبری $N \times N$ به صورت زیر حاصل می شود:

$$[A][\lambda] = [B] \quad (19)$$

که با حل آن مقادیر λ_r به دست می آید. با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۶) تابع پتانسیل سرعت حاصل می شود که با استفاده از آن می توان مقدار پتانسیل سرعت در هر نقطه از میدان محاسباتی را مستقیماً و بدون درون باری محاسبه نمود. همچنین مقادیر فشار هیدرودینامیک به کمک رابطه زیر حاصل می شوند:

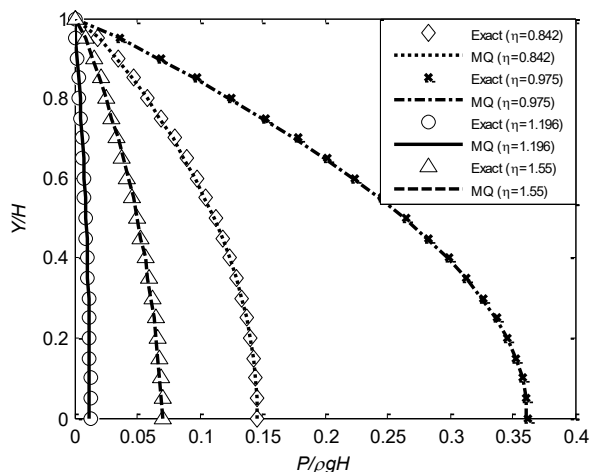
$$p = -\rho i \omega \phi \quad (20)$$

که در آن ρ چگالی آب مخزن می باشد.

چنانچه برای بازتولید معادلات و شرایط مرزی حاکم از تابع مختلط چندربعی استفاده شود، واضح است که می بایست تعداد $2N$ معادله جبری یا یک دستگاه معادلات جبری $2N \times 2N$ حل شود. در پژوهش حاضر برای آنالیز پدیده فیزیکی نامبرده دیده می شود که تابع اصلی چندربعی فقط برای فرکانس های بارگذاری کمتر از فرکانس طبیعی مخزن ($\varpi = \pi C / 2H$) از دقت قابل قبولی برخوردار است. دلیل این امر به دو رفتار متفاوت معادله هلمهولتز در دو حالت $k < \pi / 2H$ و $k > \pi / 2H$ برمی گردد. لذا برای فرکانس های بیشتر از فرکانس طبیعی از فرم مختلط آن مطابق رابطه (۹) استفاده می شود. واضح است که در این حالت هزینه محاسبات بالاتر است و برای حالت قبل توصیه نمی شود.

۵- مثال های عددی

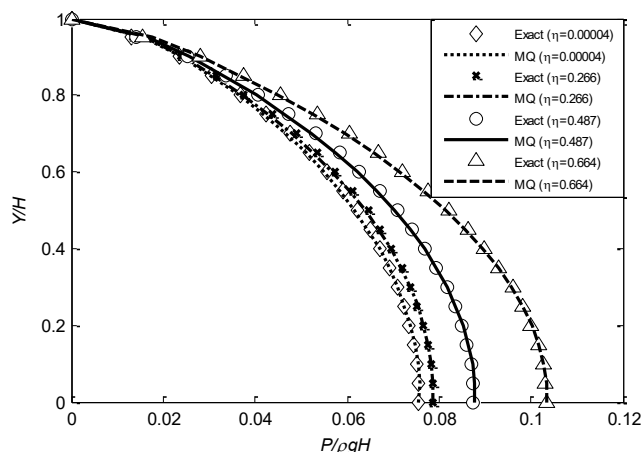
به منظور ارزیابی رویکرد پیشنهادی، توزیع فشار هیدرودینامیک در مخازن، دو سد وزنی صلب با بالادست قائم محاسبه خواهد شد. این سدها به لحاظ حجم محاسباتی به موارد واقعی اجرا شده در ایران مانند سدهای گله رود (کپرگه) و زیردان به ترتیب با ارتفاع ۸۰ و ۶۵ متر نزدیک هستند. هر دو مثال با فرض مستطیلی بودن مخزن، دارای حل تحلیلی هستند (شکل ۵). برخلاف مورد اول، در مثال دوم اثر استهلاك امواج توسط رسوبات کف مخزن در نظر گرفته شده است.



شکل ۸. توزیع فشار هیدرودینامیک روی بدنه سد با نسبتهای فرکانسی

در مثال ۵-۱ $\eta = 0.842, 0.975, 1.196, 1.5$

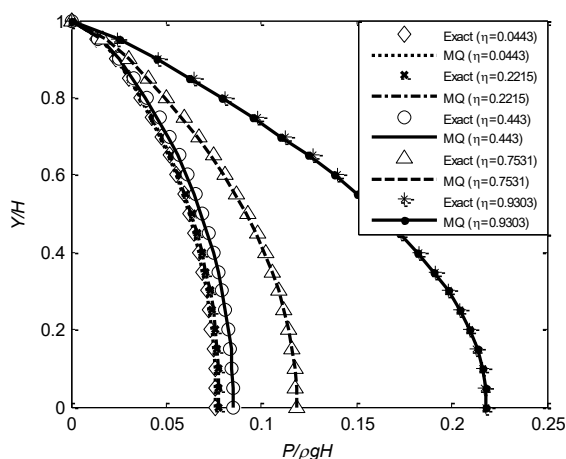
Fig. 8. Hydrodynamic pressure distribution on dam body for $\eta = 0.842, 0.975, 1.196, 1.5$ frequency ratios in example 5-1



شکل ۷. توزیع فشار هیدرودینامیک روی بدنه سد با نسبتهای فرکانسی

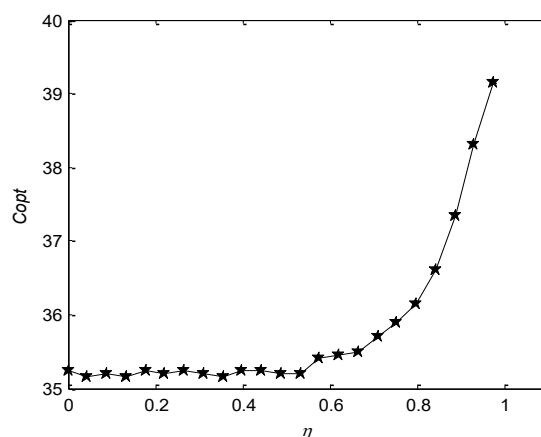
در مثال ۵-۱ $\eta = 0.00004, 0.266, 0.487, 0.664$

Fig. 7. Hydrodynamic pressure distribution on dam body for $\eta = 0.00004, 0.266, 0.487, 0.664$ frequency ratios in example 5-1



شکل ۱۰. توزیع فشار هیدرودینامیک روی بدنه سد با رابطه (۲۱) در مثال ۵-۱

Fig. 10. Hydrodynamic pressure distribution on dam body using equation (21) in example 5-1



شکل ۹. تغییرات پارامتر شکل بهینه در برابر نسبتهای فرکانسی در مثال ۵-۱

Fig. 9. Shape parameter variations vs frequency ratios

بهینه نسبت به حل دقیق برای آنالیز فشار هیدرودینامیکی در مخازن سدهای بتنی از دقت بالایی برخوردار است.

در شکل (۹) تغییرات پارامتر شکل بهینه (c_{opt}) در مقابل نسبتهای فرکانسی کوچکتر از یک با استفاده از فرم اصلی تابع چندربعی (رابطه ۶) رسم شده است. روشن است که اولویت ارجح در طراحی سدها محدوده فرکانس های کوچکتر یا مساوی فرکانس مد اول مخزن می باشد زیرا بیشترین نیروی هیدرودینامیک وارده بر سد در این محدوده فرکانسی به وجود می آید.

چنانکه ملاحظه می شود تغییرات پارامتر شکل بهینه در برابر

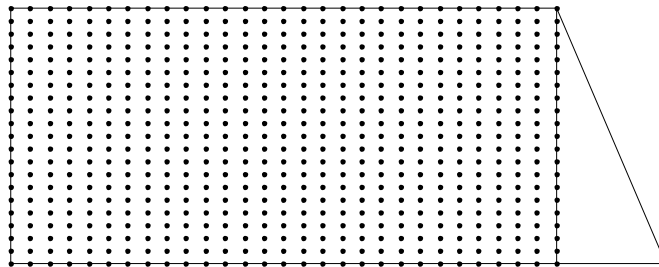
در ادامه برای تعیین پارامتر شکل بهینه از الگوریتم جدید بیان شده در بخش ۳ استفاده گردید و تعداد 21×21 مرکز محاسبه مطابق شکل (۶) در نظر گرفته شد. نتایج حل مسئله یا همان توزیع فشار هیدرودینامیک بر روی بدنه سد برای نسبتهای مختلف فرکانسی در شکل های (۷) و (۸) ارائه شده است. نسبت های فرکانسی به صورت دلخواه به گونه ای انتخاب شده اند که فرکانس های بارگذاری کوچکتر و بزرگتر از فرکانس طبیعی مخزن لحاظ شوند و پاسخ ها در این محدوده بررسی گردند. همان طور که ملاحظه می شود، نتایج روش چندربعی تحت الگوریتم عنوان شده برای تعیین پارامتر شکل

جدول ۳. مقادیر پارامتر شکل بهینه به همراه نسبت‌های فرکانسی متناظر
Table 3. Optimum shape parameter values with corresponding frequency ratios

۰٫۳۹۸۷	۰٫۲۶۵۸	۰٫۱۳۲۹	۰٫۰۰۰۰۴	نسبت فرکانسی
۳۵٫۲۵	۳۵٫۲۵	۳۵٫۱۵	۳۵٫۲۵	پارامتر شکل بهینه
۰٫۹۳۰۳	۰٫۷۹۷۴	۰٫۶۶۴۵	۰٫۵۳۱۶	نسبت فرکانسی
۳۸٫۳	۳۶٫۱۵	۳۵٫۵	۳۵٫۲۰	پارامتر شکل بهینه

جدول ۴. مقادیر خطا، پارامتر شکل بهینه و تعداد نقاط در مثال ۱-۵
Table 4. Error and optimum shape parameter values and node numbers in example 5-1

۰٫۹۳۰۳	۰٫۷۵۳۱	۰٫۴۴۳	۰٫۲۲۱۵	۰٫۴۴۳	نسبت فرکانسی
۳۸٫۲۸۷	۳۵٫۸۳۵	۳۵٫۲۵۵	۳۵٫۲۰۳	۳۵٫۱۷۶	پارامتر شکل بهینه



شکل ۱۱. آرایش مراکز محاسباتی در مثال ۲-۵
Fig. 11. Computational nodes arrangement in example 5-2

در ادامه با استفاده از این رابطه مقادیر پارامتر شکل بهینه برای نسبت‌های فرکانسی دلخواه موجود در جدول (۴) به دست آمد. و در نهایت با استفاده از مقادیر جدول (۴)، توزیع فشار هیدرودینامیک بر روی بدنه سد مطابق شکل (۱۰) محاسبه شد. شکل (۱۰) نشان می‌دهد که هرگاه از رابطه (۲۱) برای محاسبه پارامتر شکل بهینه استفاده شود، پاسخ‌ها همچنان در مقایسه با حل تحلیلی از دقت بالایی برخوردار خواهند بود.

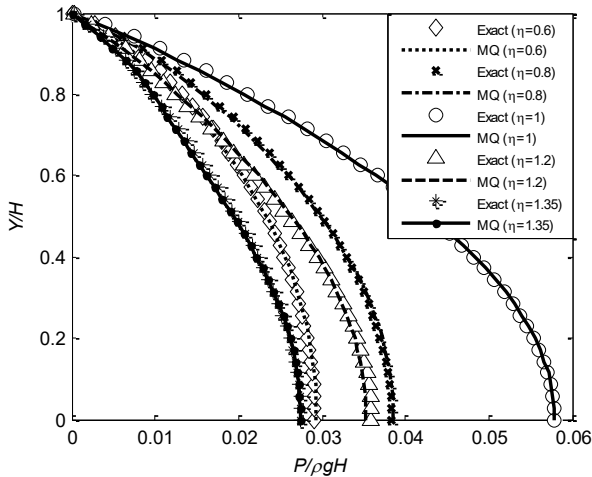
۲-۵-مثال دو: مخزن با رسوب کف

در این مثال، یک مخزن پر با ارتفاع $H=70\text{ m}$ و طول $L=4H$ مدنظر قرار گرفته است. همچنین سرعت امواج فشاری در محیط سیال، چگالی آن و دامنه شتاب هارمونیک زمین به ترتیب برابر 1440 m/s ، 1000 kg/m^3 و 0.3048 m/s^2 هستند.

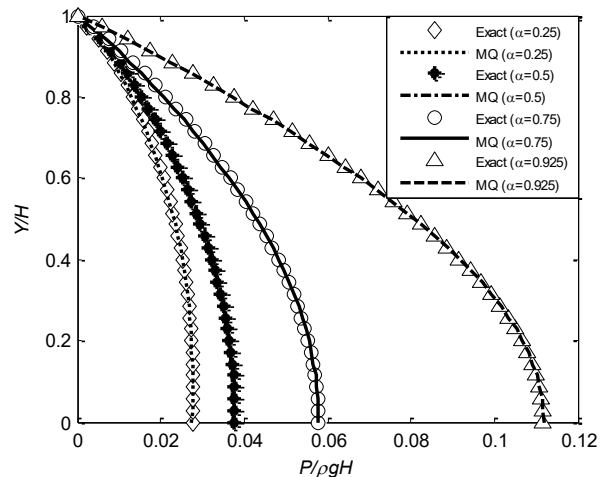
این مسئله نیز دارای حل دقیق می‌باشد و برای صحت‌سنجی

نسبت‌های فرکانسی قابل فرمول‌بندی است. به این ترتیب می‌توان مسئله را برای تعداد محدودی از نسبت‌های فرکانسی حل کرد و با استفاده از آن‌ها یک رابطه برای پارامتر شکل بهینه به دست آورد. با استفاده از رابطه به دست آمده می‌توان پارامتر شکل بهینه را برای نسبت‌های فرکانسی دلخواه محاسبه کرد. این امر موجب می‌شود که نیاز به بهینه‌سازی پارامتر شکل در هر فرکانس بارگذاری از بین برود و هزینه‌های محاسباتی روش چندربعی برای آنالیز فشار هیدرودینامیکی در مخازن سدهای بتنی به‌طور قابل‌توجهی کاهش یابد. به‌عنوان مثال پارامتر شکل بهینه برای هشت نسبت فرکانسی محاسبه شد (جدول ۳) و به عنوان نمونه یک چندجمله‌ای از درجه چهار برای برازش آن استخراج گردید (رابطه ۲۱). لازم به ذکر است که می‌توان چندجمله‌ای‌های دیگری غیر از درجه چهار، منحنی نمایی یا ... را نیز به شرط دقت برای برازش بر داده‌های مذکور استفاده کرد.

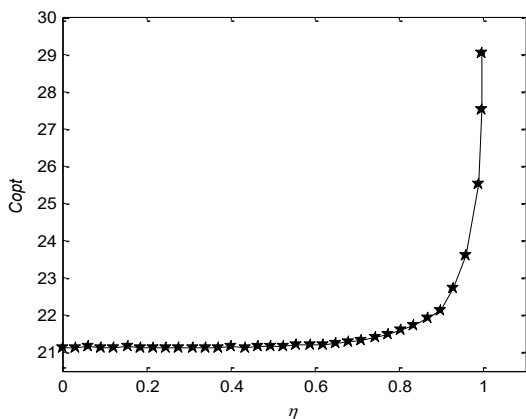
$$Copt(\omega) = 0.00011\omega^4 - 0.0034\omega^3 + 0.0331\omega^2 - 0.1043\omega + 35.251 \quad (21)$$



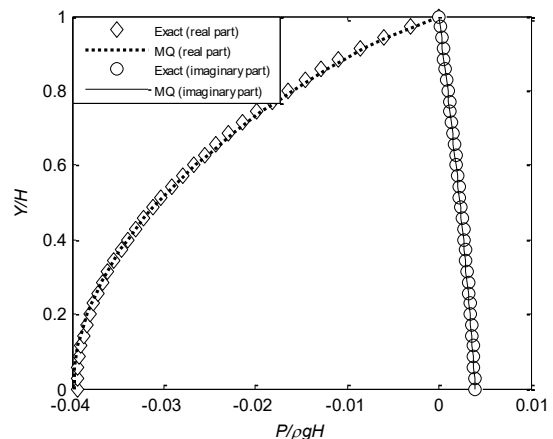
شکل ۱۳. توزیع فشار هیدرودینامیک روی بدنه سد با نسب‌های فرکانسی مختلف و ضریب بازتاب $\alpha=0.75$ در مثال ۲-۵
Fig. 13. Hydrodynamic pressure distribution on dam body with different frequency ratios and $\alpha=0.75$ in example 5-2



شکل ۱۲. توزیع فشار هیدرودینامیک بر روی بدنه سد با ضرایب بازتاب مختلف و نسبت فرکانسی $\eta=1$ در مثال ۲-۵
Fig. 12. Hydrodynamic pressure distribution on dam body with different reflection coefficients and $\eta=1$ in example 5-2



شکل ۱۵. تغییرات پارامتر شکل بهینه در برابر نسبت‌های فرکانسی در مثال ۲-۵
Fig. 15. Shape parameter variations vs frequency ratios in example 5-2



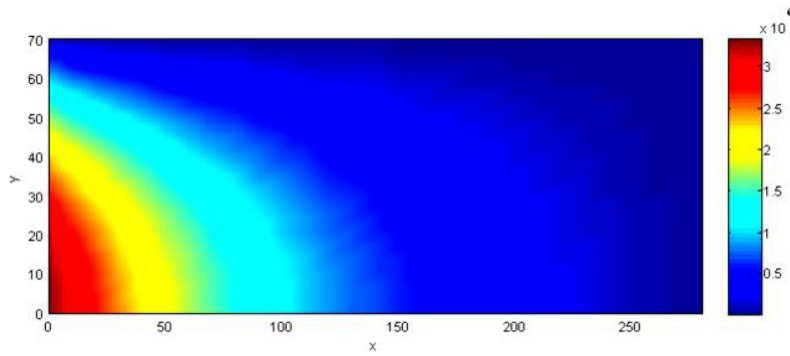
شکل ۱۴. قسمت حقیقی و موهومی فشار هیدرودینامیک وارده بر سد با ضریب بازتاب $\alpha=0.925$ و نسب فرکانسی $\eta=0.8$ در مثال ۲-۵
Fig. 14. Real and imaginary parts of hydrodynamic pressure on dam body with $\alpha=0.925$ and $\eta=0.8$ in example 5-2

شکل ۱۳ نیز تأثیر نسبت‌های مختلف فرکانسی بر دقت رویکرد پیشنهادی را در مقدار متوسط ضریب بازتاب ($\alpha=0.75$) نشان می‌دهد.

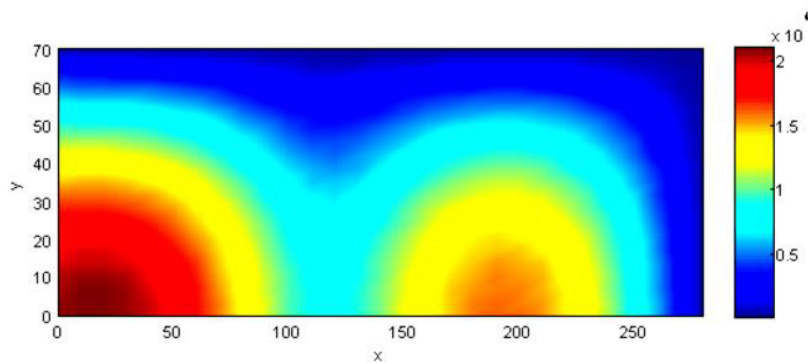
وقتی اثر جذب رسوبات کف مخزن در نظر گرفته می‌شود، روش حاضر همراه با الگوریتم معرفی شده برای بهینه‌سازی پارامتر شکل همچنان نتایج قابل‌قبولی در مقایسه با حل دقیق ارائه می‌دهد. همچنین به‌عنوان نمونه، دقت این رویکرد برای محاسبه قسمت حقیقی و موهومی فشار هیدرودینامیک با $\alpha=0.925$ و $\eta=0.8$ در شکل (۱۴) قابل‌مشاهده است.

پاسخ‌ها از آن استفاده شده است [۳۷]. برای حل با رویکرد پیشنهادی، تعداد مراکز محاسباتی؛ $N=29 \times 21$ در نظر گرفته شده‌اند (شکل ۱۱). این تعداد مراکز محاسباتی با قضاوت مهندسی انتخاب شده و برای بهینه کردن تعداد یا آرایش آن‌ها می‌توان تحقیقات بیشتری انجام داد.

توزیع فشار هیدرودینامیکی بر روی وجه بالادست سد برای نسبت فرکانسی؛ $\eta=1$ و ضرایب بازتاب؛ $\alpha=0.25, 0.5, 0.75, 0.925$ با روش بدون شبکه حاضر محاسبه شده و در شکل ۱۲ در مقایسه با حل دقیق ارائه گردیده است.



شکل ۱۶. توزیع فشار هیدرودینامیک در مخزن با ضریب بازتاب $\alpha = 0.925$ و نسب فرکانسی $\eta = 0.8683$ به روش چندربعی در مثال ۵-۲
Fig. 16. Hydrodynamic pressure distribution in storage with $\alpha = 0.925$ and $\eta = 0.8683$ using MQ method in example 5-2



شکل ۱۷. توزیع فشار هیدرودینامیک در مخزن با ضریب بازتاب $\alpha = 0.925$ و نسب فرکانسی $\eta = 1.3$ به روش چندربعی در مثال ۵-۲
Fig. 17. Hydrodynamic pressure distribution in storage with $\alpha = 0.925$ and $\eta = 1.3$ using MQ method in example 5-2

۶- بحث و نتیجه‌گیری

روش چندربعی دارای مزایای؛ ایجاد یک تابع پیوسته پاسخ در سراسر میدان محاسباتی، عدم پیوستگی و ارتباطی خاص بین نقاط محاسباتی، قابلیت بالا در شبیه‌سازی هندسه‌های نامنظم و پیچیده، استفاده از فن تجزیه دامنه برای تسهیل در شبیه‌سازی مسائلی مانند اندرکنش سد-مخزن-پی، استفاده از فرم قوی معادلات حاکم، تعمیم آسان به مسائل سه‌بعدی، کاربرد آسان در حل مسائل مختلط و ... می‌باشد لذا در پژوهش حاضر برای اولین بار به توسعه آن برای آنالیز لرزه‌ای مخازن سدهای بتنی وزنی صلب پرداخته شد. در این راستا، برای اولین بار، معادلات مشتق جزئی و شرایط مرزی مختلط حاکم بر توزیع فشار هیدرودینامیک در محیط مخزن با استفاده از تابع چندربعی بازتولید گردید و نشان داده شد که فرم اصلی و مختلط این تابع به ترتیب برای فرکانس‌های تحریک کمتر و بیشتر از فرکانس طبیعی

همان‌گونه که از شکل (۱۵) برمی‌آید، زمانی که اثر رسوبات کف مخزن در نظر گرفته می‌شود، مجدداً تغییرات پارامتر شکل بهینه در برابر نسبت‌های فرکانسی قابل فرمول‌بندی و به‌طور مشابه ویژگی بیان‌شده در مثال قبل به قوت خود باقی است.

شکل‌های (۱۶) و (۱۷) نتایج توزیع فشار هیدرودینامیک در کل مخزن سد را با روش چندربعی به ترتیب برای دو حالت نسبت فرکانسی کمتر و بیشتر از یک نشان می‌دهند. همان‌طور که انتظار می‌رود، در حالت نسبت فرکانسی بزرگ‌تر از یک، امواج فشاری از سد به سمت انتهای مخزن انتشار پیدا می‌کنند و بخش کمی از انرژی آن‌ها توسط رسوبات کف مخزن مستهلک می‌شود. به‌عبارت‌دیگر در این حالت، سراسر مخزن متأثر از نوسانات سد خواهد بود ولی در نسبت‌های فرکانسی پایین، فشار هیدرودینامیک عمدتاً در نواحی نزدیک به سد ایجاد می‌شود و در نواحی دوردست ناچیز خواهد بود.

۷- تقدیر و تشکر

به این وسیله نویسندگان از صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور (INSF) که این پژوهش را طی طرح پژوهشی شماره ۹۸۰۰۱۷۲۱ مورد حمایت قرار داده اند، سپاسگزاری می نمایند.

منابع و مراجع

- [1] H.M. Westergaard, Water pressures on dams during earthquakes, Trans. ASCE, 95 (1933) 418-433.
- [2] A.K. Chopra, Earthquake behavior of reservoir-dam systems, Journal of the Engineering Mechanics Division, 94(6) (1968) 1475-1500.
- [3] J. Humar, M. Roufaiel, Finite element analysis of reservoir vibration, Journal of Engineering Mechanics, 109(1) (1983) 215-230.
- [4] S.K. Sharan, Finite element modeling of infinite reservoirs, Journal of engineering mechanics, 111(12) (1985) 1457-1469.
- [5] B.-F. Chen, Nonlinear hydrodynamic effects on concrete dam, Engineering structures, 18(3) (1996) 201-212.
- [6] B.-F. Chen, Y.-S. Yuan, Nonlinear hydrodynamic pressures on rigid arch dams during earthquakes, reviewing, J. Hydraulic Engineering, (1999).
- [7] M. Millan, Y. Young, J. Prevost, The effects of reservoir geometry on the seismic response of gravity dams, Earthquake engineering & structural dynamics, 36(11) (2007) 1441-1459.
- [8] N. Bouaanani, P. Paultre, A new boundary condition for energy radiation in covered reservoirs using BEM, Engineering analysis with boundary elements, 29(9) (2005) 903-911.
- [9] S. Li, Diagonalization procedure for scaled boundary finite element method in modeling semi-infinite reservoir with uniform cross-section, International journal for numerical methods in engineering, 80(5) (2009) 596-608.
- [10] G. Lin, Y. Wang, Z. Hu, An efficient approach for frequency-domain and time-domain hydrodynamic analysis of dam-reservoir systems, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 41(13) (2012)

مخزن از لحاظ دقت و هزینه محاسبات بهینه هستند. از آنجایی که دقت روش نامبرده کاملاً به مقدار پارامتر شکل بهینه آن وابسته است، ده رابطه از دستاوردهای پژوهشگران قبلی برای محاسبه آن مورد ارزیابی قرار گرفت و مشاهده شد که این روابط حتی با افزایش تعداد مراکز محاسباتی هم برای مسئله خاص نامبرده کاربردی ندارند. این امر نشان می‌دهد که آن روابط عمومیت ندارند و فقط برای مسائل و شرایط خاصی قابل کاربرد هستند. لازم به ذکر است که الگوریتم‌های دیگری نیز برای تعیین پارامتر شکل بهینه وجود دارند که برای محاسبه فشار هیدرودینامیک در مخازن سدها نیازمند ارزیابی و پژوهش‌های آتی هستند. در این میان یک الگوریتم جدید و پرسرعت که حاصل پژوهش‌های قبلی نویسندگان این مقاله می‌باشد، بررسی شد و به‌عنوان الگوریتمی کارآمد در کنار روش چندربعی برای آنالیز لرزه‌ای مخازن سدها پیشنهاد گردید. به‌منظور صحت سنجی رویکرد پیشنهادی، دو مثال از مخازن سدهای صلب با و بدون در نظر گرفتن اثر جذب امواج به وسیله رسوبات کف آنالیز شد. نتایج حاصل نشان داد که تغییرات پارامتر شکل بهینه نسبت به فرکانس‌های مختلف بار زلزله، دارای ضابطه و قابل فرمول‌بندی است. این ویژگی باعث می‌شود که بتوان مسئله را برای تعداد کمی از فرکانس‌ها حل کرد و با استفاده از آن‌ها رابطه‌ای برای پارامتر شکل بهینه به دست آورد، سپس از آن رابطه برای به دست آوردن پارامتر شکل بهینه به ازای هر فرکانس دلخواه استفاده نمود. به‌عبارت‌دیگر، نیاز به بهینه‌سازی پارامتر شکل در همه فرکانس‌های بارگذاری از بین می‌رود و هزینه‌های محاسباتی روش چندربعی به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. همچنین پاسخ مثال‌ها با استفاده از رویکرد پیشنهادی در فرکانس‌های بارگذاری و ضرایب بازتاب متنوعی محاسبه شد و مقایسه نتایج حاصله با پاسخ‌های دقیق، توانایی و دقت رویکرد پیشنهادی را نشان داد. از نقاط ضعف این روش می‌توان به ماتریس ضرایب پر اشاره کرد که حل این مشکل نیز نیازمند تحقیقات آتی خواهد بود. همچنین به منظور ارزیابی توانایی رویکرد این پژوهش، لحاظ نمودن اثر کواویتاسیون در شبیه‌سازی پدیده فیزیکی مورد بحث، حل آن در حوزه زمان و مقایسه آن با سایر روش‌های بدون شبکه خارج از خانواده توابع پایه-شعاعی پیشنهاد می‌گردد.

- [20] S. Patel, A. Rastogi, Meshfree multiquadric solution for real field large heterogeneous aquifer system, *Water Resources Management*, 31(9) (2017) 2869-2884.
- [21] N. Li, H. Su, D. Gui, X. Feng, Multiquadric RBF-FD method for the convection-dominated diffusion problems base on Shishkin nodes, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 118 (2018) 734-745.
- [22] R.L. Hardy, Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, *Journal of geophysical research*, 76(8) (1971) 1905-1915.
- [23] R. Franke, A critical comparison of some methods for interpolation of scattered data, *NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL MONTEREY CA*, 1979.
- [24] G.E. Fasshauer, Newton iteration with multiquadrics for the solution of nonlinear PDEs, *Computers & Mathematics with Applications*, 43(3-5) (2002) 423-438.
- [25] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates, *Computers & Mathematics with applications*, 19(8-9) (1990) 127-145.
- [26] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Computers & mathematics with applications*, 19(8-9) (1990) 147-161.
- [27] S.A. Sarra, D. Sturgill, A random variable shape parameter strategy for radial basis function approximation methods, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(11) (2009) 1239-1245.
- [28] A. Golbabai, H. Rabiei, Hybrid shape parameter strategy for the RBF approximation of vibrating systems, *International Journal of Computer Mathematics*, 89(17) (2012) 2410-2427.
- [29] A. Golbabai, E. Mohebianfar, H. Rabiei, On the new variable shape parameter strategies for radial basis functions, *Computational and Applied Mathematics*, 34(2) (2015) 691-704.
- [30] J. Biazar, M. Hosami, Selection of an interval for 1725-1749.
- [11] R. Babae, N. Khaji, M.T. Ahmadi, Development of decoupled equations methods for calculating hydrodynamic pressures on concrete gravity dams, *Modares Civil Engineering journal*, 15(4) (2014) 41-52.
- [12] R. Babae, Application of decoupled equations methods for solving dam-reservoir interaction problem, MSc thesis, Tarbiyat Moderes university, Tehran, Iran, 2013.
- [13] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Computers & mathematics with applications*, 19(8-9) (1990) 147-161.
- [14] J. Li, A.H.-D. Cheng, C.-S. Chen, A comparison of efficiency and error convergence of multiquadric collocation method and finite element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27(3) (2003) 251-257.
- [15] S.A. Sarra, Integrated multiquadric radial basis function approximation methods, *Computers & Mathematics with Applications*, 51(8) (2006) 1283-1296.
- [16] E.J. Kansa, J. Geiser, Numerical solution to time-dependent 4D inviscid Burgers' equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(3) (2013) 637-645.
- [17] Z. Wu, S. Zhang, Conservative multiquadric quasi-interpolation method for Hamiltonian wave equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(7-8) (2013) 1052-1058.
- [18] C. Bustamante, H. Power, Y. Sua, W. Florez, A global meshless collocation particular solution method (integrated Radial Basis Function) for two-dimensional Stokes flow problems, *Applied Mathematical Modelling*, 37(6) (2013) 4538-4547.
- [19] G. Lin, Y. Wang, Z. Hu, An efficient approach for frequency-domain and time-domain hydrodynamic analysis of dam-reservoir systems, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 41(13) (2012) 1725-1749.

- [34] M. Kooshki, R. Babae, E. Jabbari, Application of the RBF multiquadric method for solving seepage problems using a new algorithm for optimization of the shape parameter, *Amirkabir Civil Engineering Journal* (accepted for publication) doi: 10.22060/CEEJ.2019.15155.5840.
- [35] E. Jabbari, A.R Fallah, Investigation of meshless methods in solving seepage equation, 12th Iranian Hydraulic Conference, Tehran, Iran, 2013.
- [36] A.K. Chopra, Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 93(6) (1967) 205-224.
- [37] N. Bouaanani, P. Paultre, J. Proulx, A closed-form formulation for earthquake-induced hydrodynamic pressure on gravity dams, *Journal of Sound and Vibration*, 261(3) (2003) 573-582.
- variable shape parameter in approximation by radial basis functions, *Advances in Numerical Analysis*, 2016 (2016).
- [31] W. Chen, Y. Hong, J. Lin, The sample solution approach for determination of the optimal shape parameter in the Multiquadric function of the Kansa method, *Computers & Mathematics with Applications*, 75(8) (2018) 2942-2954.
- [32] H.R. Azarboni, M. Keyanpour, M. Yaghouti, Leave-Two-Out Cross Validation to optimal shape parameter in radial basis functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 100 (2019) 204-210.
- [33] A. Fallah, E. Jabbari, R. Babae, Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization, *Computers & Mathematics with Applications*, 77(3) (2019) 815-829.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

R. Babae, E. Jabbari, M. Eskandari-Ghadi, *Application of Multiquadric Radial Basis Function method for Helmholtz equation in seismic wave analysis for reservoir of rigid dams*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 52(12) (2021) 3015-3030.

DOI: 10.22060/ceej.2019.16443.6230

