نشریه مهندسی عمران امیرکبیر

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، دوره ۵۲ شماره ۲، سال ۱۳۹۹، صفحات ۴۶۹ تا ۴۹۴
DOI: 10.22060/ceej.2018.14498.5673

تحلیل رشد ترک هیدرولیکی در مقیاس سختی با در نظر گرفتن اثر اندرکنش فراسنج های ماند و گرانروی: ترم های مرتبۀ بالاتر

علی عسگری[۱*]، علی اکبر گلشنی[۲]

[۱] دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران
[۲] دانشکده مهندسی عمران و محیطزیست، دانشگاه تربیت‌مدرس، تهران، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۷-۰۳-۰۶
بازنگری: ۱۳۹۷-۰۵-۳۱
پذیرش: ۱۳۹۷-۰۶-۲۷
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷-۰۹-۲۴

کلمات کلیدی:
شکست هیدرولیکی
چقرمگی
مقیاس سختی
اندرکنش ماند و گرانروی
روش اغتشاش اصلاح‌شده

خلاصه: در فرآیند شکست هیدرولیکی معمولاً فراسنج‌های مختلف مانند گرانروی، جرم مخصوص سیال و چقرمگی محیط اثرات مشابه و یکسانی بر چگونگی رشد ندارند و ممکن است یک یا چند تا از فراسنج‌ها اهمیت بیشتری داشته‌باشند؛ در نتیجه منجر به یک یا چند رژیم خاص خواهدشد. رژیم‌ها بر اساس روند هدر رفت انرژی نام‌گذاری می‌شوند که مهم‌ترین آن ها عبارتند از: اول) رژیم سختی که بیشترین انرژی تزریق سیال از طریق شکافتن سنگ به‌دلیل چقرمگی اتلاف می‌شود دوم) رژیم گرانروی که بیشترین اتلاف توان ورودی سیال ناشی از حرکت سیال لزج در ترک است. در این نوشتار به بررسی رشد ترک هیدرولیکی دو بعدی، در حالت کرنش صفحه‌ای در یک محیط کشسان پرداخته می‌شود. سیال به‌صورت غیرقابل تراکم و نیوتنی فرض می‌شود و هم‌چنین رشد ترک در قالب مکانیک شکست خطی کشسان بررسی می‌شود. هدف از این پژوهش، دستیابی به اثرات انواع فراسنج‌ها ازقبیل چقرمگی، گرانروی، جرم مخصوص سیال و هم‌چنین اثربخشی اندرکنش بین برخی از فراسنج‌ها به‌طور خاص اثرات توام گرانروی و جرم مخصوص سیال برای یک ترک دو بعدی در رژیم سختی است. برای ارزیابی اندرکنش بین فراسنج‌های اشاره شده یک روش اصلاح‌شده–روش اغتشاش- ارائه شده است. این روش قابلیت تحلیل مسائل مشابه با دیگر هندسه و رژیم را دارد. نتایج نشان می دهد که درنظرگرفتن ترم اندرکنشی باعث برآورد کمتری از طول ترک خواهد شد و طول ترک با افزایش گرانروی کاهش می یابد و روند کاهشی با افزایش فراسنج جرم مخصوص (ماند) شدت می یابد. از طرف دیگر، اثرات گرانروی سیال در فرآیند تزریق شکست هیدرولیکی بیشتر از اثرات فراسنج ماند با فرض جریان آرام می باشد. مسلما، در نظرنگرفتن اثرات ماند می تواند خطای چشم‌گیری را وارد کند. این خطاها با افزایش فراسنج ماند، افزایش می یابد و ممکن است به ۳۰۰٪ نیز برسد. به‌طور کلی نتایج با مستندات موجود مقایسه شده‌است که روند منطقی در آن‌ها را تصدیق می‌کند.

۱- مقدمه

محیط‌های سنگی متخلخل زیرزمینی، مخزن سیالات ارزشمندی هم‌چون آب‌های زیرزمینی، نفت، گاز مایع و گاز طبیعی می‌باشند. دسترسی به این مخازن از طریق حفر چاه صورت می‌گیرد. به منظور افزایش استخراج نفت و گاز در اکثر موارد از روش شکست هیدرولیکی استفاده می‌شود. در عملیات شکست هیدرولیکی، یکی از روش‌های پرکاربرد و ویژه در مهندسی ژئومکانیک، سیال خاصی با فشار به داخل قسمت محصورشده از چاه پمپ می‌شود؛ این فشار تا زمان ایجاد شکستگی‌های جدید و یا باز شدن آن‌ها افزایش خواهدیافت. فشار سیال مورد نیاز جهت گسترش شکستگی و مدت زمان ادامه یافتن ترک‌ها، به تنش حاکم برجا، دبی جریان، گرانروی و ماند سیال، اختلاف فشار بین مخزن وچاه، چقرمگی و نفوذپذیری محیط و غیره بستگی دارد. به‌طور کلی سیالاتی که برای شکست هیدرولیکی به کار گرفته می‌شوند ترکیبی از مواد شیمیایی و مصالح ویژه‌ای هستند که بسته به مراحل انجام شکست، این ترکیبات و مصالح از لحاظ خصوصیات شیمیایی و فیزیکی تغییر می‌کنند و گرانروی این سیال‌ها ممکن است تا ۱۰۰۰ برابر آب برسد [۱].

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: a.asgari@umz.ac.ir

در شرایط عملی، تحت فرآیند شکست هیدرولیکی فراسنج‌هایی از قبیل تنش‌های برجا در سنگ، خصوصیات محیط سنگی، عملکرد سیال تزریق و غیره به‌طور گسترده‌ای تغییر می‌کنند و هیچ یک از فراسنج‌های هندسی ترک چندان در میدان قابل اندازه‌گیری نیستند. بنابراین طراحی و کنترل فرآیند شکست هیدرولیکی تکیه بر الگوهای ریاضی و عددی پیچیده خواهد بود.

پرسش‌ها و مسائل مهمی که در این پژوهش مطرح می‌شود عبارتند از: شکست هیدرولیکی تا چه طولی رشد می‌کند؛ چگونه می‌توان موجب امتداد یافتن آن تا منابع مورد نظر شد؛ چه رابطه‌ای بین ارتفاع و بازشدگی و طول ترک آن وجود دارد؛ فشار در سطوح ترک چگونه تغییر خواهد کرد؛ چه فراسنج‌هایی تاثیرات بیشتری می‌گذارد تا باعث افزایش بهره‌برداری شود. سوالات زیاد دیگری می‌توان مطرح شود که در این نوشتار به برخی از آن‌ها پاسخ داده خواهد شد. مسلما با توجه به هزینه‌های بالای انجام شکست هیدرولیکی ارائه پاسخ به برخی از پرسش‌ها و مسائل مطرح شده به اقتصادی شدن طرح کمک می‌کند.

۲- پیشینه پژوهش

بهترین مراجع برای مهارت های فنی و پیشینه عملی شکست هیدرولیکی در زمینه صنایع نفت و گاز توسط گدلی [۲] و اکونومدز و همکارانش [۱] تهیه شده‌است.

جای تعجب نیست اگر گفته شود طی دهه های اخیر، پژوهشگران تلاش های فراوانی بر روی الگو سازی فرآیند شکست هیدرولیکی انجام داده اند. در این بخش به برخی از این تلاش ها و مطالعات در زمینه های الگو سازی های تحلیلی و عددی اشاره می شود. بخش مهمی از این پژوهش ها مختص به گسترش روش های تحلیلی و یا شبه‌تحلیلی[1] است، که اغلب به منظور پیش بینی رشد ترک های هیدرولیکی در شرایط ژئولوژیک متغیر و پیچیده که تحت آن عملیات استخراج نفت صورت می گیرد، استفاده می شوند [۷-۳]، اگرچه، بررسی با روش های تحلیلی و یا نیمه‌تحلیلی بر روی یک شکست با هندسه ساده (صفحه ای یا دیسک شکل) در یک سنگ هموژن با تنش برجای یکنواخت بسیار پیچیده است که به طبیعت الگو سازی ریاضی مسئله برمی گردد [۸] و ممکن است برای دستیابی به چنین حل هایی، نیاز به ایده آل سازی و فرض کردن رشد شکست هیدرولیکی در یک رژیم خاص باشد. با وجود این محدودیت ها، الگو های ایده آل‌سازی شده از دو جهت اهمیت دارند: اول اینکه، آن‌ها معیاری[2] برای مقایسه با شبیه سازی ها و روش های عددی هستند و دوم اینکه یک ابزار برای بررسی اثرات فراسنج های مختلف در یک رژیم خاص هستند. مسلما در یک مساله فیزیکی همه فراسنج ها موثر معمولا دارای اهمیت یکسان نیستند. وقتی برخی از فراسنج ها از اهمیت بیشتری نسبت به بقیه برخوردار باشند منجر به رژیم خاصی می شوند. توضیح بیشتر اینکه در فرآیند شکست هیدرولیکی معمولا فراسنج های مختلف مانند گرانروی و ماند سیال و چقرمگی محیط اثرات مشابه و یکسانی بر خروجی ها ندارد و ممکن است یک یا چند تا از فراسنج ها اهمیت بیشتری داشته‌باشند؛ در نتیجه منجر به یک یا چند رژیم خاص خواهد شد و در نهایت بر میزان رشد ترک و بازشدگی آن اثر متفاوت داشته‌باشند. هدف از این پژوهش، مطالعه و بررسی فرآیند گسترش ترک های هیدرولیکی با در نظرگرفتن اثرات فراسنج‌های: گرانروی سیال[3]، ماند سیال[4]، چقرمگی جسم[5]، بر گسترش ترک ها می باشد. ویژگی خاص و مهمی که در این تحقیق اضافه شده، وارد کردن اثر اندرکنش بین فراسنج های ماند و گرانروی می باشد. الگو هایی که پیش از این ارائه شدند با این فرض هستند که یا اثر ماند را در یک مسئله در نظر نگرفتند و یا اثر گرانروی. برای حل مسئله با در نظرگیری اثرات اندرکنشی بین فراسنج های گرانروی و ماند در مقیاس سختی، روش اغتشاش اصلاح‌شده ارائه می شود.

پژوهش های زیادی بر روی چگونگی تاثیر فراسنج های مختلف شکست هیدرولیکی در رژیم های مختلف با روش های تحلیلی و عددی انجام شده‌است که در ادامه، به توضیح برخی از آن‌ها پرداخته می شود [۱ و ۲۷-۹].

در میان الگو های تحلیلی یا نیمه‌تحلیلی، ذکر کارهای اولیه انجام شده در مراجع [۳۳-۲۸] از اهمیت خاصی برخوردار است. این پژوهشگران، یکی از الگو های ساده را موردتوجه قرار دادند، اما فرضیات بسیار ساده کننده ای را در مورد متغیرهای مساله بالاخص بازشدگی ترک و فشار سیال استفاده کردند. مجموعه برخی از این

1 Semi-analytical method

2 Benchmark
3 Fluid viscosity
4 Fluid inertia
5 Solid toughness

الگو ها را در نوشته های مراجع [۳۶-۳۴] نیز می‌توان پیدا کرد.

اسپنس و شارپ [۱۲] یک راه حل خودمتشابه[1] برای بررسی گسترش ترک KGD[2] در یک محیط کشسان نفوذناپذیر با چقرمگی محدود[3] ارائه کردند. آن‌ها با تعیین معادله‌های همبسته بین معادله جریان سیال ویسکوز و تراکم‌ناپذیر در ترک با استفاده از نگره روانسازی، معادله کشسانی در حالت کرنش مسطح برای الگوسازی بازشدگی ترک تحت توزیع فشار مشخص، رابطه رشد ترک با استفاده از حد ریشه دوم در نوک[4] برای بازشدگی ترک، و معیار رشد ترک[5] با استفاده از فاکتور شدت تنش[6]، مساله را تحلیل کردند.

بایوت و همکارانش [۳۷] به بررسی فرآیند شکست هیدرولیکی با استفاده از معادله‌های لاگرانژ از مکانیک کلاسیک پرداختند. تحلیل آن‌ها بر روی یک ترک بیضوی شکل با سیال نیوتنی متمرکز شد. آن‌ها فشار سیال، بازشدگی و طول ترک را با کمک راه حل خود متشابه، با شرط جریان ورودی ثابت تعیین کردند.

نیلسون [۳۸] راه حل مربوط به ترک در حالت کرنش مسطح (KGD) را توسعه داد. ایشان شکل ساده تری از معادله پیوستگی در ناحیه راس ترک را به کار بست. معادله‌های به روش متغیر متشابه[7] با مختصات مکانی مقیاس شده و طول ترک واقعی، تحلیل شد. هم‌چنین در دهانه ترک[8] فشار ثابت فرض شد و چقرمگی محیط به دو صورت در نظر گرفته‌شد. در حالت چقرمگی صفر[9]، حل نیلسون، راس ترک را با شکل نوک تیز، و هم‌چنین فاصله ای بین جلوی سیال و نوک ترک (پس‌افتادگی سیال) پیش بینی کرد. در حالت چقرمگی محدود، هیچ فاصله ای را بین جلوی سیال و نوک ترک درنظر نگرفت و شکل نوک ترک گرد شده و فشار سیال محدود می شود (ناسازگار با معادله روانسازی).

به دنبال روش اسپنس و شارپ [۱۲]، کاربونل [۳۹] راه حل خودمتشابه برای حالت مجانبی با چقرمگی صفر معرفی کرد. این حل بر اساس روشی است که حل مجانب‌شونده در محل نوک ترک SCR,[10] [۴۰] نامیده می شود. در این روش رفتار مجانبی بازشدگی و فشار در نزدیکی نوک ترک تشریح شده‌است.

اگرچه یک روش عددی توسط اسپنس و شارپ [۱۲] برای حل مسئله در یک رژیم مابین سختی و گرانروی ارائه و بعدها توسط آداچی [۱۹] بازبینی شد ولی بسیاری از پژوهشگران برای ساده تر شدن تحلیل مسئله، آن را به صورت یکی از رژیمی های سختی (هدررفت انرژی ناشی از چقرمگی یا سختی بالای سنگ) [۸] یا گرانروی (هدررفت انرژی ناشی از گرانروی بالای سیال) [۹ و ۱۲ و ۱۷] در نظر گرفتند.

هوانگ و همکارانش [۴۱]، رشد ترک هیدرولیکی را به صورت کرنش مسطح و با صرف نظر از گرانروی سیال بررسی کردند. آن‌ها از حل خودمتشابه [۴۲] با فرض غالب بودن نیروی ماند سیال در مقایسه نیروی گرانروی سیال استفاده کردند. برخی دیگر از پژوهشگران از اثر ماند سیال بر رشد ترک هیدرولیکی صرف نظر کردند [۹ و ۱۲] که در این شرایط می توان جریان سیال را با نگره لزجت بچلر [۴۳] مدل کرد.

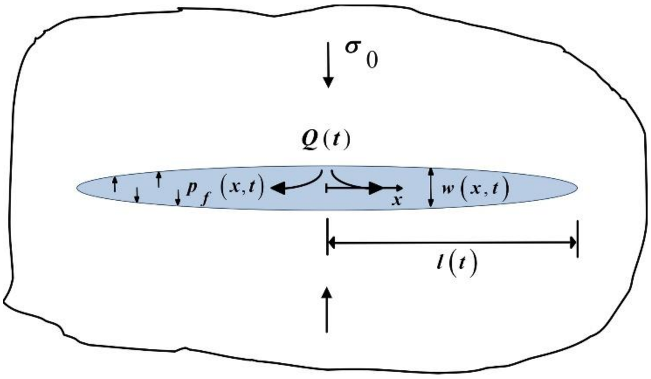
گاراگاش [۴۴] به مطالعه فرآیند رشد ترک هیدرولیکی نزدیکی نوک آن در یک محیط کشسان با چقرمگی دلخواه پرداخت. در حالت خاص، ایشان با در نظرگیری پس افتادگی سیال، به جستجوی حل آن متمرکز شدند. نقطه شروع تحلیل او به‌دست آوردن حل برای ترک پیش رونده توسط سیال در محیط نیمه بی نهایت[11] بود.

گاراگاش [۴۵] یک راه حل خودمتشابه مجانب شونده[12] را برای گسترش ترک صفحه ای KGD در محیط کشسان نفوذناپذیر و با فرض چقرمگی بالا[13] و ثابت بودن نرخ تزریق سیال (سیال نیوتنی) ارائه کرد. در این راه حل بازشدگی ترک با استفاده از حد ریشه دوم[14] و فشار در نوک از تابع تکینگی لگاریتمی[15] به‌صورت همبسته با دیگر معادله‌های حاکم تعیین گردید.

هم‌چنین گاراگاش در سال ۲۰۰۶ [۴۶] یک راه حل صریح برای انتشار ترک هیدرولیکی KGD در رژیم سختی ارائه داد. گاراگاش فرض کرد که فراسنج گرانروی در مقابل چقرمگی سنگ کوچک باشد

1 Self-similar solution
2 Khristianovic and Zheltov; Geertsma and de Klerk (KGD or KZGD))
3 Finite toughness
4 Square-root tip asymptote
5 Propagation condition
6 Stress intensity factor
7 Similarity variable
8 Crack inlet
9 Zero toughness

10 Tip asymptote
11 Semi-infinite fluid-driven crack
12 Asymptotic self-similar solution
13 Large toughness
14 Square-root asymptote
15 Logarithmic singularity



شکل ۱. الگوی شکست هیدرولیکی در حالت کرنش صفحه‌ای
Fig. 1. Sketch of a plane-strain fluid-driven fracture.

(مقیاس سختی) و اثرات فراسنج ماند را در آن در نظر نگرفت. آنچه مسلم است در فرآیند شکست هیدرولیکی هر دو فراسنج گرانروی و ماند بر روی طول، فشار و بازشدگی ترک موثر است؛ بنابراین در این پژوهش، با ارائه الگوی جدیدی به بررسی تاثیر این دو پارامتر در کنار هم پرداخته‌شد. این موضوع در پژوهش های گذشته بررسی نشد و به‌عنوان نوآوری در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفت. در ادامه، برای حل این مسئله از روش اغتشاش (به‌کارگرفته شده توسط گاراگاش) استفاده شد. برای به کار گرفتن این روش در مسئله جدید، نیاز به بازبینی دارد. در این پژوهش، اصلاحی بر روی روش اغتشاش نیز انجام شد که می توان از نوآوری های این پژوهش برشمرد.

عسگری و همکارانش در سال ۲۰۱۶ [۲۶] به کمک روش سری هموتوپی اثرات دو فراسنج گرانروی و ماند بر روی رشد ترک را بررسی کردند. در آن پژوهش برای حل معادله‌های انتگرالی پی در پی، از روش عددی نیوتن-کاتس استفاده شد. حل این معادله‌های در ترم های بالاتر بسیار پیچیده و گاها غیرقابل حل است. بنابراین در این پژوهش با تغییر اساسی در روش حل کلی مسئله و روش حل معادله‌های انتگرالی تا حد زیادی باعث بهبود تحلیل گردید.

از لحاظ عملی، استخراج گرما از مخازن زمین گرمایی توسط تزریق سیال با گرانروی کم انجام می شود [۴۶]. هم‌چنین در شرایط آزمایشگاهی، رژیم حاکم همواره سختی محیط خواهد بود حتی اگر یک سیال بسیار گرانرو به کار گرفته‌شود [۴۷]. بنابراین این کاربردها، نیاز به تحلیل شکست هیدرولیکی در رژیم سختی را ضروری می سازد.

۳- فرمول‌بندی ریاضی و حل آن

۳-۱- تعریف مسئله

مطابق با شکل ۱، ترک هیدرولیکی بطول $2\ell(t)$ در یک محیط سنگی شکننده با مدول یانگ E، ضریب پواسون υ و چقرمگی K_{IC} در نظر گرفته می شود. بدلیل تقارن این ترک، نیمی از الگو در تحلیل منظور می گردد. سیال با گرانروی μ و با دبی $Q(t)$ تزریق می شود. تزریق این سیال باعث فشار داخلی $P_f(x,t)$ در سطوح ترک می شود. با توجه به اینکه محیط تحت تنش محدودکننده σ_0 قرار دارد؛ در نتیجه فشار خالص در داخل ترک برابر با $P(x,t)=P_f(x,t)-\sigma_0$ است. نگره مکانیک شکست کشسان خطی (LEFM) برای تعیین بازشدگی ترک $w(x,t)$ ، فشار خالص $P(x,t)$ و رشد ترک $\ell(t)$ بر حسب زمان t و مختصات محلی x به‌کار گرفته می شود.

مفروضات اصلی برای الگوی در نظر گرفته در این پژوهش، به صورت زیر خلاصه می شود:

- الگوی ترک به صورت دو بعدی KGD، فرض شده‌است.
- ترک در تمام لحظات کاملا از سیال پر شده‌است و هیچ گونه پس افتادگی[۱] بین سیال و نوک ترک وجود ندارد.
- محیط به‌صورت کشسان و همگن فرض می شود و هم‌چنین فرض می شود محیط نفوذناپذیر است و اتلاف سیال در فرآیند تزریق ناشی از نشت وجود ندارد.
- به‌دلیل وجود فشار هیدرولیکی سیال در سطوح ترک و ناچیز بودن تنش برشی در آن سطوح مود شکست کششی فرض شده‌است.
- فشار سیال در طول ترک ثابت نیست. در واقع، فشار با یک

1 lag

معادله کشسانی انتگرالی به میزان جابجایی منوط می شود. بنابراین تحلیل همبسته است و مسئله به‌صورت هیدرومکانیکی است.

- انتشار ترک در قالب مکانیک شکست خطی[1] توصیف می شود. در این صورت معیار رشد ترک با برابر قرار دادن چقرمگی محیط با فاکتور شدت تنش در نوک ترک، مشخص می شود. در فرض LEFM از تغییر شکل های غیرکشسان در ناحیه مستعد جلوی ترک[2] صرف‌نظر می شود چرا که در محیط شکننده این ناحیه بسیار کوچک است. این نکته قابل ذکر است که در نظرگرفتن پس افتادگی سیال و ناحیه مستعد جلوی ترک عملکرد مشابهی دارند. به‌طور کلی معمولا اثرات این ناحیه بر رشد ترک بدلیل کوچک بودن ابعاد آن در مقایسه با مقادیر گسترش ترک و بزرگی تنش برجا در نظرگرفته نمی شود و یا اثرات آن به‌صورت سختی موثر اعمال می شود [۴۸].
- فرض می شود که نسبت بازشدگی ترک به طول ترک بسیار کوچک است در نتیجه می توان جریان سیال را یک‌بعدی در نظرگرفت. هم‌چنین با توجه به عدد رینولدز کم و یا بسیار بزرگ، جریان سیال آرام فرض می شود.
- هیچ گونه تغییرحالتی در سیال رخ نمی دهد و سیال همواره نیوتنی و تراکم‌ناپذیر فرض شده‌است.
- به‌دلیل کوچک بودن شعاع چاه نسبت به طول ترک از اثرات آن صرف‌نظر می شود.
- رشد ترک در جهت تنش بیشینه و امتداد چاه موازی با تنش کمینه است.

دیگر فرضیات مسئله و شرایط مرزی آن مطابق مقاله گاراگاش [۴۶] نظرگرفته می شود.

۳-۲- معادله‌های حاکم

معادله‌های حاکم در الگوی شکست هیدرولیکی شامل معیار رشد ترک، معادله الاستیسیته و معادله حرکت سیال است. این معادله‌های بر حسب طول نیم ترک ℓ، بازشدگی ترک w، سرعت متوسط سیال v، و فشار خالص سیال P، با در نظرگرفتن شکل متقارن الگوی ترک KGD بیان می شوند.

۳-۲-۱- پیوستگی و بقای جرم

جریان سیال در ترک با قانون بقای جرم و اندازه حرکت مدل می شود. در این حالت حجم سیال ورودی یا تزریقی ($V(t)$) برابر است با حجم بازشده ترک:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_x^{\ell} w dx = wv, \quad \int_0^{\ell} w dx = \frac{1}{2}V(t), \qquad V(t) = \int_0^t Q dt. \tag{۱}$$

۳-۲-۲- معادله حرکت سیال

فرض می شود که حرکت سیال در جهت رشد ترک امتداد می یابد و جریان سیال در ترک آرام و سیال غیرقابل‌تراکم است [۹ و ۴۹].

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu' v}{w^2}\right) \tag{۲}$$

با صرفنظر کردن از ترم سمت چپ و یا ناچیز فرض کردن اثر ماند ($\rho = 0$) معادله روانسازی[3]، رابطه ۲ به معادله پویزنی[4] به‌صورت زیر در می آید [۴۳]:

$$v = -\frac{w^2}{\mu'}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{۳}$$

لازم به ذکر است که در ادامه این پژوهش از معادله ی کلی ۲ استفاده شده‌است که در کارهای گذشته از معادله ۳ و یا از رابطه ۲ با فرض گرانروی صفر استفاده شده‌است.

۳-۲-۳- معادله کشسانی

معادله کشسانی، یک رابطه انتگرالی است که بازشدگی ترک را با فشار خالص سیال داخل ترک مربوط می سازد. رابطه انتگرالی به شکل رابطه ۴ و به صورت یک معادله انتگرالی منفرد است. فرض رابطه این است که ترک به شکل شبه‌استاتیکی رشد می‌کند [۵۰].

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{4}{\pi E'}\int_0^{\ell} G\left(\frac{x}{\ell}, \frac{x'}{\ell}\right) P(x',t)dx', \\ G(\xi,\xi') &= \ln\left|\frac{\sqrt{1-\xi^2}+\sqrt{1-\xi'^2}}{\sqrt{1-\xi^2}-\sqrt{1-\xi'^2}}\right|. \end{aligned} \tag{۴}$$

۳-۲-۴- معیار انتشار ترک

مطابق با مکانیک شکست کشسان خطی برای مود شکست اول، $K_I = K_{IC}$، بازشدگی ترک در نوک با عبارت حدی ریشه دوم بیان می شود [۵۱]:

1 Linear elastic fracture mechanics (LEFM)
2 Process zone
3 Lubrication approximation
4 Poiseuille equation

$$w = \frac{K'}{E'}(\ell - x)^{1/2} \quad \ell - x << \ell. \tag{۵}$$

که در روابط بالا، E' ،μ' و K' به‌صورت زیر است:

$$E' = \frac{E}{1-\upsilon^2},\ \mu' = 12\mu,\ K' = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} K_{IC}. \tag{۶}$$

۳-۳- فرمول‌های بی‌بعد

برای ساده سازی حل دسته معادله‌هایمعادله‌های ۱ تا ۵ یک سری تغییر متغیرهایی به صورت زیر به کارگرفته می شوند. این تغییر متغیرها معادله‌های را بی بعد و مقیاس می کنند که نتیجتا حل مسئله ساده تر می شود [۹, ۱۲, ۴۶, ۵۲ و ۵۳].

$$\begin{aligned} & w(x,t) = \varepsilon(t)L(t)\Omega(\xi,t),\ P(x,t) = \varepsilon(t)E'\Pi(\xi,t),\ \ell(t) = L(t)\gamma(t), \\ & \varepsilon(t) = L^{-2}(t)V(t),\quad v(x,t) = t^{-1}L(t)\vartheta(\xi,t), \\ & \bar{\Omega}(\xi,t) = \Omega(\xi,t)/\gamma(t),\ \bar{\vartheta}(\xi,t) = \vartheta(\xi,t)/\gamma(t). \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن $\xi = x/\ell(t) \in [0,1]$، $\Omega(\xi,t)$، $\Pi(\xi,t)$ و $\gamma(t)$ به ترتیب مختصات مکانی، بازشدگی ترک، فشار خالص و ضریب نیم طول مقیاس شده ترک می باشد. این نکته قابل ذکر است که "علامت بار" نشانه مقیاس سازی مجدد آن کمیت است.

با به کارگیری تغییر متغیرهای فوق، معادله‌های ۱ تا ۵ به صورت زیر در می آیند:

- معادله بقای جرم

$$\begin{aligned} & \frac{t\dot{V}}{V}\int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}\,\mathrm{d}\xi + \frac{t\dot{L}}{L}\xi\bar{\Omega} + \Psi_T = \bar{\Omega}\bar{\vartheta},\quad \int_{0}^{1}\bar{\Omega}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\gamma^2}, \\ & \Psi_T = t\int_{\xi}^{1}\left[\dot{\bar{\Omega}} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\left(\bar{\Omega} - \xi\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\xi}\right)\right]\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{۸}$$

- معادله حرکت

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} = \mathrm{G}_{\tilde{\mathrm{n}}}\gamma^2\bar{\vartheta}\left[\frac{t\dot{L}}{L}\left(1 - \frac{\xi}{\bar{\vartheta}}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\xi}\right) - 1 + \frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\xi} + \Phi_T\right] + \mathrm{G}_{\mathrm{m}}\frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\Omega}^2}, \\ & \Phi_T = \frac{t\dot{\gamma}}{\gamma}\left(1 - \frac{\xi}{\bar{\vartheta}}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\xi}\right) + \frac{t\dot{\bar{\vartheta}}}{\bar{\vartheta}}. \end{aligned} \tag{۹}$$

- معادله ی کشسانی و معیار انتشار ترک

$$\begin{aligned} & \bar{\Omega}(\xi,t) = \mathrm{L}^{-1}\{\Pi\}(\xi,t) = \frac{4}{\pi}\int_{\xi}^{1} G(\xi,\xi')\Pi(\xi',t)\,\mathrm{d}\xi', \\ & \lim_{\xi\to 1}(1-\xi)^{-1/2}\bar{\Omega} = \mathrm{G}_{\mathrm{k}}\gamma^{-1/2}. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

که در آن Φ_T و Ψ_T ترم های گذرا بخش معادله پیوستگی ۸ و اندازه حرکت ۹ هستند.

هم‌چنین G_{k}، G_{μ} و G_{ρ} در معادله‌های ۹ و ۱۰ به‌صورت زیر بیان می شوند:

$$\mathrm{G}_{\mathrm{k}} = \frac{K'}{E'}\frac{L^{3/2}}{V},\ \mathrm{G}_{\mu} = \frac{\mu'}{E'}\frac{L^6}{tV^3},\ \mathrm{G}_{\rho} = \frac{\rho}{E'}\frac{L^4}{t^2V}. \tag{۱۱}$$

این فراسنج ها بی بعد هستند و به آن فراسنج های مقیاس شده می گویند. برای توضیحات بیشتر این فراسنج ها و روابط بین آن‌ها می توانید به مرجع [۸] رجوع کنید.

در صورتی که مقیاس سختی مدنظر باشد آنگاه $\mathrm{G}_{\mathrm{k}} = 1$ و اگر مقیاس گرانروی و یا ماند ملاک باشد آنگاه به‌ترتیب $\mathrm{G}_{\mu} = 1$ و $\mathrm{G}_{\rho} = 1$ درنظرگرفته می شود.

در نهایت $t\dot{V}/V$ و $t\dot{L}/L$ در معادله‌های ۸ و ۹ را می توان با عملگر زمان مطابق با به کارگیری رابطه زیر جایگزین کرد.

$$t\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{t\,\dot{\mathrm{G}}_{\mathrm{k}}}{\mathrm{G}_{\mathrm{k}}}\right)\mathrm{G}_{\mathrm{k}}\frac{\partial}{\partial\mathrm{G}_{\mathrm{k}}} + \left(\frac{t\,\dot{\mathrm{G}}_{\mu}}{\mathrm{G}_{\mu}}\right)\mathrm{G}_{\mu}\frac{\partial}{\partial\mathrm{G}_{\mu}} + \left(\frac{t\,\dot{\mathrm{G}}_{\rho}}{\mathrm{G}_{\rho}}\right)\mathrm{G}_{\rho}\frac{\partial}{\partial\mathrm{G}_{\rho}} \tag{۱۲}$$

که در آن علامت نقطه در بالای فراسنج های مقیاسی به منظور مشتق آن نسبت به زمان t است. جدول ۱، روابط بین کمیت های مقیاس شده با فراسنج های اصلی مسئله را در سه رژیم گرانروی، سختی و ماند نشان می دهد. تمام حالت های مقیاس شده در رژیم های مختلف باهم رابطه دارند که در بخش بعدی به تفسیر راجع آن پرداخته خواهد شد.

۳-۳-۱- ارتباط مقیاس‌ها

سه مقیاس اشاره شده در بخش قبل شکل های خاصی از بیان یک دسته و یک نوع معادله‌های یکسان است. در واقع مقیاسی برای حل مسئله به کار گرفته می شود که اثر فراسنج مربوط به آن مقیاس غالب باشد. مقیاس کردن چیزی جزء ارتباط دادن بین فراسنج‌های اساسی مسئله نیست بنابراین دور از انتظار نیست که فراسنج های بی بعد و مقیاس شده مطابق با روابط زیر در رژیم‌های مختلف باهم ارتباط داشته‌باشند.

$$\mathcal{K}_{\tilde{\mathrm{m}}} = \mathcal{M}_{\mathrm{k}\,\tilde{\mathrm{n}}}^{-1/4},\ \mathcal{R}_{\mathrm{k}} = \mathcal{M}_{\mathrm{k}}^{2/3}\mathcal{R}_{\mathrm{m}},\ \mathcal{M} = \mathcal{M}\,\mathcal{K}^4 \tag{۱۳}$$

هم‌چنین می توان ارتباطی بین مقیاس های مختلف طولی و فراسنج های کوچک در رژیم های متعدد یافت.

$$\frac{L_{\mathrm{m}}}{L_{\tilde{\mathrm{n}}}} = \mathcal{K}_{\tilde{\mathrm{m}}}^{2/3} = \mathcal{M}_{\mathrm{k}\ \mathrm{m}}^{-1/6},\ \frac{L_{\mathrm{k}}}{L}_{\tilde{\mathrm{n}}} = \mathcal{K}^{-2/3},\ \frac{L_{\tilde{\mathrm{n}}}}{L} = \mathcal{M}^{1/6} \tag{۱۴}$$

$$\frac{\varepsilon_{\mathrm{m}}}{\varepsilon_{\tilde{\mathrm{n}}}} = \mathcal{K}_{\tilde{\mathrm{m}}}^{-4/3} = \mathcal{M}_{\mathrm{k}\ \mathrm{m}}^{1/3},\ \frac{\varepsilon_{\mathrm{k}}}{\varepsilon}_{\tilde{\mathrm{n}}} = \mathcal{K}^{4/3},\ \frac{\varepsilon_{\tilde{\mathrm{n}}}}{\varepsilon} = \mathcal{M}^{-1/3} \tag{۱۵}$$

جدول ۱. کمیت ها در مقیاس های مختلف سختی، گرانروی و ماند

Table 1. Quantities corresponding to toughness, viscosity and inertia scalings

نوع مفیاس و رژیم	سختی،k	گرانروی، m	ماند، ρ
فراسنج کوچک ε	$\varepsilon_k=\left(\frac{K'^4}{E'^4V}\right)^{1/3}$	$\varepsilon_m=\left(\frac{\mu'}{E't}\right)^{1/3}$	$\varepsilon_\rho=\frac{\rho^{1/2}V^{1/2}}{E'^{1/2}t}$
طول مقیاس شده L	$L_k=\left(\frac{E'V}{K'}\right)^{2/3}$	$L_m=\left(\frac{E'V^3t}{\mu'}\right)^{1/6}$	$L_\rho=\left(\frac{E'Vt^2}{\rho}\right)^{1/4}$
کمیت سختی G_k	۱	$\mathcal{K}_m=\frac{K'}{E'}\left(\frac{E't}{\mu'V}\right)^{1/4}$	$\mathcal{K}_\rho=\frac{K'}{E'}\left(\frac{E't^2}{\rho V^{5/3}}\right)^{3/8}$
کمیت گرانروی G_m	$\mathcal{M}_k=\frac{\mu'V}{E't}\left(\frac{E'}{K'}\right)^4$	۱	$\mathcal{M}_\rho=\frac{\mu'E'^{1/2}t^2}{\rho^{3/2}V^{3/2}}$
کمیت ماند G_ρ	$\mathcal{R}_k=\frac{\rho E'^{5/3}V^{5/3}}{K'^{8/3}t^2}$	$\mathcal{R}_m=\frac{\rho V}{\mu'^{2/3}E'^{1/3}t^{4/3}}\left(\frac{E'}{V}\right)^{1/4}$	۱

ارتباط بین فاکتورهای مقیاسی ε's و L's و فراسنج های گسترشی[۱] $\mathcal{M}$'s، $\mathcal{K}$'s و $\mathcal{R}$'s را نیز می توان با مقیاسی زمانی نیز در نظرگرفت. با یک بررسی بر روی گروه های مقیاس شده می توان نشان داد که به‌ازای هر یک از گروه ها می توان یک مقیاس زمانی تعریف کرد. این نکته قابل‌ذکر است که در اینجا فرض می شود که حجم ورودی سیال تابع خطی نسبت به زمان است و به عبارت دیگر دبی ورودی همواره مقداری ثابت و برابر Q_0 است.

$$t_m=\frac{\mu'}{E'},\ t_k=\frac{K'^4}{E'^4Q_0},\ t_\rho=\frac{\rho Q_0}{E'} \tag{۱۶}$$

با این سه مقیاس زمان می توان فاکتورهای مقیاسی را به‌دست آورد.

$$\varepsilon_m=\left(\frac{t_m}{t}\right)^{1/3},\ \varepsilon_k=\left(\frac{t_k}{t}\right)^{1/3},\ \varepsilon_\rho=\left(\frac{t_\rho}{t}\right)^{1/2} \tag{۱۷}$$

$$L_m=\left(\frac{t_m}{t}\right)^{-2/3}\bar{L}_m,\ L_k=\left(\frac{t_k}{t}\right)^{-2/3}\bar{L}_k,\ L_\rho=\left(\frac{t_\rho}{t}\right)^{-3/4}\bar{L}_\rho \tag{۱۸}$$

که در آن $\bar{L}_m$، $\bar{L}_k$ و $\bar{L}_\rho$ مقیاس طول ثابت هستند که از رابطه زیر حاصل می شود:

$$\bar{L}_m=\left(\frac{\mu'Q_0}{E'}\right)^{1/2},\ \bar{L}_k=\left(\frac{K'}{E'}\right)^2,\ \bar{L}_\rho=\left(\frac{\rho Q_0^2}{E'}\right)^{1/2} \tag{۱۹}$$

۳-۴- ایده و روش حل

در این پژوهش، از روش اغتشاش اصلاح‌شده[۲] برای یافتن جواب تقریبی انتشار صفحه ای ترک هیدرولیکی استفاده می‌شود. این روش در این پژوهش برای حل معادله‌های همبسته و غیرخطی با وجود چند فراسنج پیشنهاد می شود. روش اغتشاش کلاسیک برای حل معادله‌های غیرخطی موقعی به کار می رود که در آن معادله‌های یک فراسنج کوچک وجود داشته‌باشد [۵۴]. بنابراین، با توجه به فراسنج های بی بعد G_k، G_i و $G_ñ$، می توان فرض کرد:

$$f(\xi,G_i)=f_0(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{i_1\ge i_2\ge\ldots\ge i_n\\ i_{1,2,\ldots,n}=1,2,3\text{ or }k,\mu,\rho}}\left(G_{i_1}G_{i_2}\ldots G_{i_n}f^{(i_1i_2\ldots i_n)}(\xi)\right)$$
$$f(\xi,G_i)=\{\bar{\Omega}(\xi,G_i),\Pi(\xi,G_i),\bar{\vartheta}(\xi,G_i),\gamma(G_i)\},\ i=k,\mu,\rho \tag{۲۰}$$

که در آن $f(\xi,G_i)$ تابع مجهولات مسئله است.

۳-۵- حل در مقیاس سختی

همان‌طور که اشاره شد، در مقیاس سختی، $G_k=1$ است و متعاقبا حل در مقیاس سختی، با استفاده از روش اغتشاش به دو فراسنج گرانروی $\mathcal{M}_k$ و ماند $\mathcal{R}_k$ بستگی دارد که برای راحتی کار اندیس k را از دو فراسنج حذف می کنیم . بنابراین رابطه ۲۰ در حل مقیاس سختی به‌صورت زیر کاهش می‌یابد:

1 evolution parameters

2 Enhanced Perturbation Method (EPM)

$$f\left(\xi,\mathcal{M},\mathcal{R}\right)=\sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty}\sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty}\mathcal{M}^{\mathrm{m}}\mathcal{R}^{\mathrm{n}}\, f_{[\mathrm{m,n}]}(\xi) \tag{۲۱}$$

که‌در آن $\left\{f_{[0,0]}, f_{[\mathrm{m},0]}, f_{[0,\mathrm{n}]}, f_{[\mathrm{m,n}]}\right\}\rightarrow \forall\, \mathrm{m}\wedge \mathrm{n}\in\left\langle \mathrm{N}=\{1,2,3,...\}\right\rangle$ به‌ترتیب از چپ به راست، ترم گرانروی- ماند صفر ، ترم mام از گرانروی کوچک و ماند صفر، ترم nام از گرانروی صفر و ماند کوچک و ترم اندرکنش[1] از مرتبه $[\mathrm{m,n}]$ هستند.

با به کارگیری معادله ۱۲، معادله‌های ۸ تا ۱۰ در مقیاس سختی به صورت زیر به‌دست می آیند:

$$\begin{gathered}\int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}\,\mathrm{d}\xi+\frac{2}{3}\xi\,\bar{\Omega}+\Psi_{T}=\bar{\Omega}\,\bar{\vartheta},\ \int_{0}^{1}\bar{\Omega}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\gamma^{2}},\\ \Psi_{T}=-\frac{1}{3}\int_{\xi}^{1}\left[\mathcal{R}\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\mathcal{R}}+\frac{\mathcal{R}}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\mathcal{R}}\left(\bar{\Omega}-\xi\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\xi}\right)\right]\mathrm{d}\xi.\end{gathered} \tag{۲۲}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}=\frac{1}{3}\mathcal{R}\gamma^{2}\bar{\vartheta}\left[1+\frac{\mathcal{R}}{\gamma\bar{\vartheta}}\frac{\partial\left(\gamma\bar{\vartheta}\right)}{\partial\mathcal{R}}+\left(\left[2-\frac{\mathcal{R}}{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial\mathcal{R}}\right]\frac{\xi}{\bar{\vartheta}}-3\right)\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\xi}-\mathcal{M}\frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\Omega}^{2}}\right]. \tag{۲۳}$$

$$\bar{\Omega}(\xi,t)=\mathrm{L}^{-1}\{\Pi\}(\xi,t),\ \lim_{\xi\to1}(1-\xi)^{-1/2}\,\bar{\Omega}=\gamma^{-1/2}. \tag{۲۴}$$

با جایگذاری رابطه ۲۱ در معادله‌های ۲۲ تا ۲۴ و مرتب کردن آن‌ها بر اساس ضرایب ۱، $\mathcal{M}$، و $\mathcal{MR}$ در مقیاس سختی ($\mathrm{G_k}=1$) داریم:

ترم گرانروی-ماند صفر $f_{[0,0]}(\xi)$:

$$\begin{gathered}1:\quad \int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}_{[0,0]}\,\mathrm{d}\xi+\frac{2}{3}\xi\,\bar{\Omega}_{[0,0]}-\bar{\Omega}_{[0,0]}\bar{\vartheta}_{[0,0]}=0,\quad \gamma_{[0,0]}^{-2}=2\int_{0}^{1}\bar{\Omega}_{[0,0]}\,\mathrm{d}\xi,\ \frac{\partial\Pi_{[0,0]}}{\partial\xi}=0,\\ \bar{\Omega}_{[0,0]}(\xi)=\mathrm{L}^{-1}\left\{\Pi_{[0,0]}\right\}(\xi),\ \lim_{\xi\to1}(1-\xi)^{-1/2}\,\bar{\Omega}_{[0,0]}=\gamma_{[0,0]}^{-1/2}.\end{gathered} \tag{۲۵}$$

ترم اول گرانروی کوچک و ماند صفر $f_{[1,0]}(\xi)$:

$$\begin{gathered}\mathcal{M}:\quad \int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}_{[1,0]}\,\mathrm{d}\xi+\frac{2}{3}\xi\,\bar{\Omega}_{[1,0]}=\bar{\Omega}_{[1,0]}\bar{\vartheta}_{[0,0]}+\bar{\Omega}_{[0,0]}\bar{\vartheta}_{[1,0]},\\ \gamma_{[1,0]}=-\gamma_{[0,0]}^{3}\int_{0}^{1}\bar{\Omega}_{[1,0]}\,\mathrm{d}\xi,\qquad \frac{\partial\Pi_{[1,0]}}{\partial\xi}=\frac{\bar{\vartheta}_{[0,0]}}{\bar{\Omega}_{[0,0]}^{2}},\\ \bar{\Omega}_{[1,0]}(\xi)=\mathrm{L}^{-1}\left\{\Pi_{[1,0]}\right\}(\xi),\qquad \lim_{\xi\to1}(1-\xi)^{-1/2}\,\bar{\Omega}_{[1,0]}=-\frac{1}{2}\gamma_{[1,0]}\gamma_{[0,0]}^{-3/2}.\end{gathered} \tag{۲۶}$$

ترم اول گرانروی صفر و ماند کوچک $f_{[0,1]}(\xi)$:

$$\begin{gathered}\mathcal{R}:\quad -\frac{\gamma_{[0,1]}}{3\gamma_{[0,0]}}\left(2\int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}_{[0,0]}\mathrm{d}\xi+\xi\bar{\Omega}_{[0,0]}\right)+\frac{2}{3}\int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}_{[0,1]}\mathrm{d}\xi-\bar{\vartheta}_{[0,1]}\bar{\Omega}_{[0,0]}+\left(\frac{2}{3}\xi-3\bar{\vartheta}_{[0,0]}\right)\bar{\Omega}_{[0,1]}\\ \gamma_{[0,1]}=-\gamma_{[0,0]}^{3}\int_{0}^{1}\bar{\Omega}_{[0,1]}\,\mathrm{d}\xi,\qquad \frac{\partial\Pi_{[0,1]}}{\partial\xi}=\frac{1}{3}\gamma_{[0,0]}^{2}\bar{\vartheta}_{[0,0]}\left[1+\left(2\frac{\xi}{\bar{\vartheta}_{[0,0]}}-3\right)\frac{\partial\bar{\vartheta}_{[0,0]}}{\partial\xi}\right]\\ \bar{\Omega}_{[0,1]}(\xi)=\mathrm{L}^{-1}\left\{\Pi_{[0,1]}\right\}(\xi),\qquad \lim_{\xi\to1}(1-\xi)^{-1/2}\,\bar{\Omega}_{[0,1]}=-\frac{1}{2}\gamma_{[0,1]}\gamma_{[0,0]}^{-3/2}.\end{gathered} \tag{۲۷}$$

ترم اندرکنش مرتبه ی اول $f_{[1,1]}(\xi)$:

$$\begin{gathered}\mathcal{MR}:\\ \frac{1}{3\gamma_{[0,0]}^{2}}\left(2\int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}_{[0,0]}\mathrm{d}\xi+\xi\bar{\Omega}_{[0,0]}\right)\left(\gamma_{[1,1]}\gamma_{[0,0]}-\gamma_{[0,1]}\gamma_{[1,0]}\right)\\ +\frac{\gamma_{[0,1]}}{3\gamma_{[0,0]}}\left(2\int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}_{[1,0]}\mathrm{d}\xi+\xi\bar{\Omega}_{[1,0]}\right)-\frac{2}{3}\int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}_{[1,1]}\mathrm{d}\xi-\frac{2}{3}\xi\bar{\Omega}_{[1,1]}\\ +\bar{\vartheta}_{[1,1]}\bar{\Omega}_{[0,0]}+\bar{\vartheta}_{[0,0]}\bar{\Omega}_{[1,1]}+\bar{\vartheta}_{[1,0]}\bar{\Omega}_{[1,0]}+\bar{\vartheta}_{[0,1]}\bar{\Omega}_{[0,1]}=0\end{gathered} \tag{۲۸}$$

$$\begin{gathered}\gamma_{[1,1]}=\frac{3\gamma_{[1,0]}\gamma_{[0,1]}}{\gamma_{[0,0]}}-\gamma_{[0,0]}^{3}\int_{0}^{1}\bar{\Omega}_{[1,1]}\,\mathrm{d}\xi,\\ \frac{\partial\Pi_{[1,1]}}{\partial\xi}=\frac{1}{\bar{\Omega}_{[0,0]}^{3}}\left(-\bar{\vartheta}_{[0,1]}\bar{\Omega}_{[0,0]}+2\bar{\vartheta}_{[0,0]}\bar{\Omega}_{[0,1]}+\frac{\gamma_{[0,0]}^{2}}{3}\left[\frac{\partial\bar{\vartheta}_{[1,0]}}{\partial\xi}\left(2\xi-3\bar{\vartheta}_{[0,0]}\right)+\left(1-3\frac{\partial\bar{\vartheta}_{[0,0]}}{\partial\xi}\right)\bar{\vartheta}_{[1,0]}\right]\right)\\ +\frac{2}{3}\gamma_{[0,0]}\gamma_{[1,0]}\left(\frac{\partial\bar{\vartheta}_{[0,0]}}{\partial\xi}\left(2\xi-3\bar{\vartheta}_{[0,0]}\right)+\bar{\vartheta}_{[0,0]}\right).\\ \bar{\Omega}_{[1,1]}(\xi)=\mathrm{L}^{-1}\left\{\Pi_{[1,1]}\right\}(\xi),\qquad \lim_{\xi\to1}(1-\xi)^{-1/2}\,\bar{\Omega}_{[1,1]}=\frac{3}{4}\gamma_{[1,0]}\gamma_{[0,1]}\gamma_{[0,0]}^{-5/2}-\frac{1}{2}\gamma_{[1,1]}\gamma_{[0,0]}^{-3/2}.\end{gathered}$$

به‌دلیل حجیم بودن معادله‌های ترم های بالاتر از آوردن آن در اینجا خوداری شده‌است. دسته معادله‌های انتگرالی-دیفرانسیلی فوق به‌صورت متوالی از رابطه ۲۵ تا ۲۸ حل می شوند. برای مختصرسازی در اینجا مجددا از آوردن جزئیات و روند حل آن‌ها نیز صرف نظر شده‌است.

$$\bar{\Omega}_{[0,0]}=\frac{1}{2}\pi^{1/3}\sqrt{1-\xi^{2}},\qquad \Pi_{[0,0]}=\frac{\pi^{1/3}}{8},\ \ \bar{\vartheta}_{[0,0]}=\frac{1}{6}\xi+\frac{1}{2}\frac{\cos^{-1}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^{2}}},\ \ \gamma_{[0,0]}=\frac{2}{\pi^{2/3}}. \tag{۲۹}$$

$$\begin{gathered}\Pi_{[1,0]}=\frac{8}{3\pi^{2/3}}\left(\frac{1}{24}+\ln\left(4\sqrt{1-\xi^{2}}\right)-\frac{3}{4}\frac{\xi\cos^{-1}\xi}{\sqrt{1-\xi^{2}}}\right),\\ \bar{\Omega}_{[1,0]}=\frac{8}{3\pi^{2/3}}\left(2\pi-4\xi\sin^{-1}\xi-\left(\frac{5}{6}-\ln2\right)\sqrt{1-\xi^{2}}-\frac{3}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\xi^{2}}^{\,1+\sqrt{1-\xi^{2}}}}{1-\sqrt{1-\xi^{2}}^{\,1-\sqrt{1-\xi^{2}}}}\right)\right),\\ \gamma_{[1,0]}=-\frac{32\left(1+6\ln2\right)}{9\pi^{5/3}}\end{gathered} \tag{۳۰}$$

$$\begin{gathered}\Pi_{[0,1]}=\frac{1}{6\pi^{4/3}}\left(\frac{\pi^{2}}{4}+\frac{5\xi^{2}}{3}+\frac{6\xi\cos^{-1}\xi}{\sqrt{1-\xi^{2}}}-\frac{\left(1+2\xi^{2}\right)\left(\cos^{-1}\xi\right)^{2}}{1-\xi^{2}}-\frac{21\pi^{2}-13}{36}\right)\\ \gamma_{[0,1]}=\frac{24\pi^{2}-172}{27\pi^{7/3}}\end{gathered} \tag{۳۱}$$

ترم های $f_{[0,0]}(\xi)$، $f_{[1,0]}(\xi)$ و $f_{[0,1]}(\xi)$ به‌ترتیب ترم گرانروی-ماند صفر، ترم گرانروی کوچک و ماند صفر و ترم گرانروی صفر و ماند کوچک هستند که در مرجع [8] به تفسیر در مورد حل آن‌ها بحث و بررسی شده‌است. برای تعیین ضرایب ترم های بالاتر از بسط ۲۱، به‌طور مثال برای مقادیر $\mathrm{m,n}\geq2$ و $f_{[1,1]}(\xi)$، محاسبه این ترم ها به‌دلیل برخورد با انتگرال های تکینه، به روش تحلیلی بسیار پیچیده و غیرممکن به نظر می رسد؛ بنابراین در اینجا این انتگرال ها به روش عددی با کمک کد نوشته شده با نرم‌افزار Mathematica محاسبه

1 Fluid Viscosity And Inertia Interaction (FVII)

جدول ۲. ضرایب محاسبه شده از ترم $O(\mathcal{M}^m,\mathcal{R}^n)$، $m,n\to\{0,1,\ldots,5\}$ در معادله ۲۱ از نیمه طول مقیاس شده $\gamma_{[m,n]}$.

Table 2. Numerical values of coefficients of the $O(\mathcal{M}^m,\mathcal{R}^n)$ terms ($m,n\to\{0,1,\ldots,5\}$) in the expansion [Eq. (21)] of crack half-length $\gamma_{[m,n]}$

$\gamma_{[m,n]}$ n↓ m→	۰*	۱	۲	۳	۴	۵
۰*	۰.۹۳۲۳۸۸	-۲.۷۲۱۹۴۹	۳۷.۰۰۰۴۲۴	-۶۷۱.۹۷۸۳	۱۴۰۰۳.۹۰۱۴	-۳۱۶۱۶۱.۶۱
۱	۰.۱۶۶۲۱۴	-۳.۷۶۲۴۵۶	۹۶.۳۰۵۳۵۰	-۲۵۶۸.۹۳۰۹	۷۰۱۰۶.۲۸۶	
۲	۰.۱۵۴۰۲۸	-۶.۷۵۴۰۶۹	۲۴۴.۶۶۴۵۹۷	-۸۲۹۹.۶۳۷۵		
۳	۰.۲۰۰۶۶۰۵	-۱۳.۰۰۱۰۶۹	۶۰۵.۴۴۴۰۲۳	-۲۴۶۹۵.۸۷۵		
۴	۰.۳۰۵۲۹۹۷	-۲۵.۹۲۴۰۵۷				
۵	۰.۵۰۲۸۳۴۱					

* این مقادیر در مرجع [۸] محاسبه شده‌است.

خواهند شد و سپس برای تعیین تابع حاصل از انتگرال از تکنیک درون‌یابی[۱] استفاده می شود. درنهایت با تعیین این ترم ها، میزان بازشدگی، طول رشد و فشار بر روی ترک تعیین می شود. به‌طور مثال بازشدگی مقیاس شده از رابطه زیر تعیین می شود:

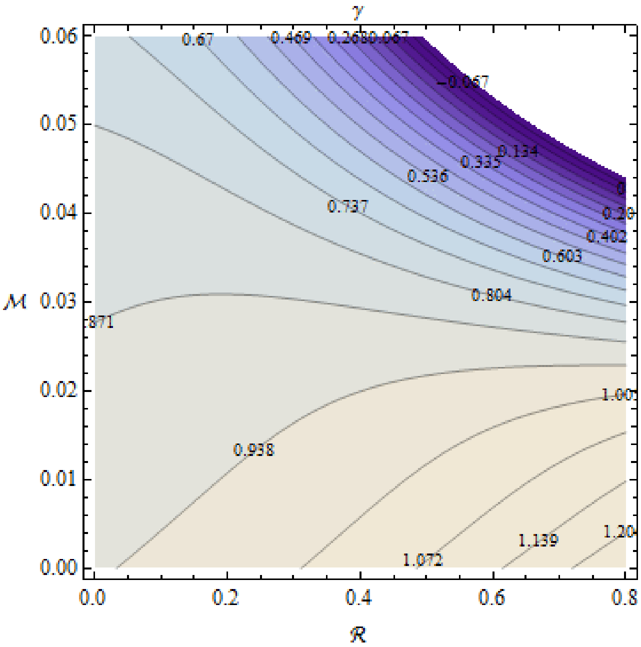
$$\Omega(\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{M}^m\mathcal{R}^n\,\bar{\Omega}_{[m,n]}(\xi)\times\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{M}^m\mathcal{R}^n\,\gamma_{[m,n]}\qquad(۳۲)$$

۴- نتایج و بحث

در این پژوهش، راه حل کلی مسئله با در نظرگرفتن اندرکنش بین فراسنج های ماند و گرانروی در مقیاس سختی ارائه‌شد؛ بنابراین اگر یکی از فراسنج های ماند و یا گرانروی صفر در نظر گرفته شود؛ آنگاه هیچ اندرکنشی بین فراسنج ها وجود ندارد و راه حل مسئله در این تحقیق منجر به حل ارائه شده در مرجع گاراگاش [۴۶] می شود. نتایج تفسیری این پژوهش به شرح زیر است:

۴-۱- ضریب طول نیم ترک مقیاس شده

نتایج برحسب ترم های مختلفی از مقادیر n و m برای ضریب طول نیم ترک مقیاس شده در جدول ۲ آورده شده‌است. هم‌چنین شکل ۲ کنتور طول مقیاس شده بر حسب مقادیر مختلف فراسنج های گرانروی و ماند را نشان می دهد. از این شکل می توان

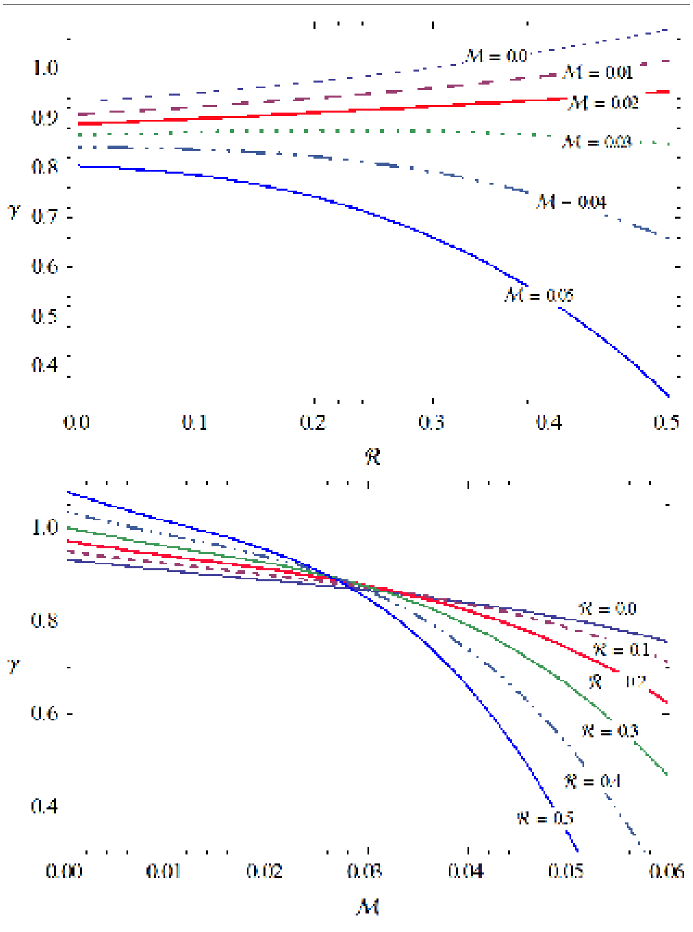


شکل ۲. کنتور طول ترک مقیاس شده بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانروی و ماند

Fig. 2. contour of the crack half-length in terms of different values of viscosity and inertia parameters

نتیجه گرفت که میزان طول ترک در مقادیر کوچک‌تری از فراسنج گرانروی با افزایش فراسنج ماند با شرط $\mathcal{R}\ll 1$ افزایش می‌یابد و برای $\mathcal{M}\simeq 0.0275$ تقریبا تغییرات ناچیز است. برای حالت مقادیر بزرگتر $\mathcal{M}> 0.0275$ با افزایش فراسنج ماند میزان طول ترک

1 interpolation



شکل ۳. روند تغییرات ضریب طول نیم ترک مقیاس شده، γ، بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج ها گرانروی ، $\mathcal{M}$، و ماند ، $\mathcal{R}$، با در نظرگیری اثر اندرکنشی

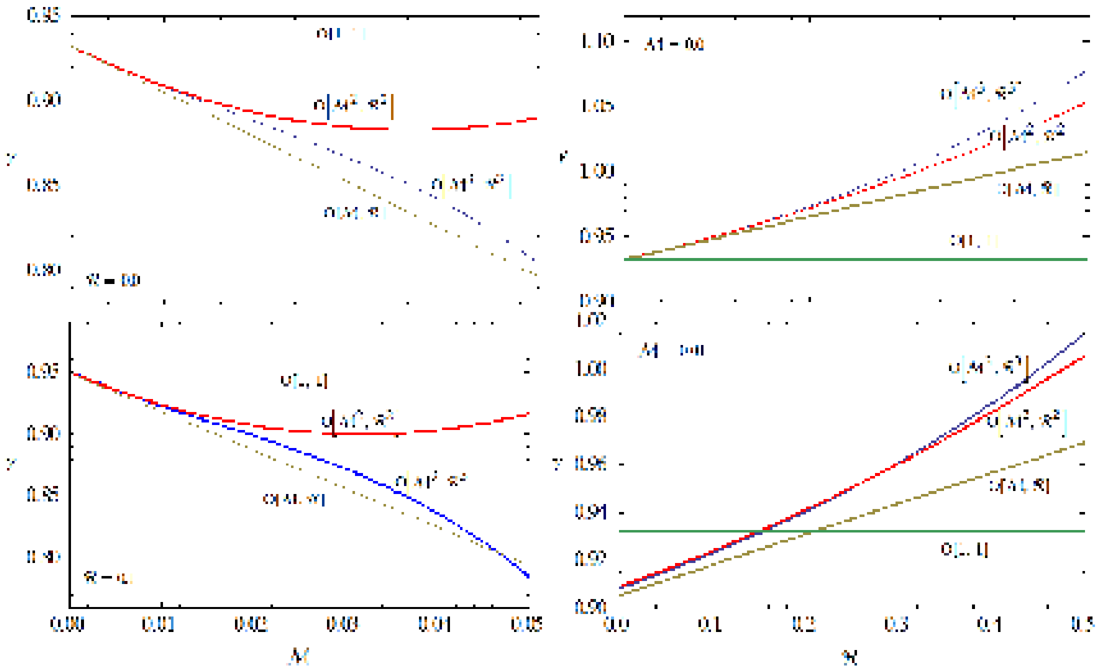
Fig. 3. Variation of dimensionless crack half-length, γ, versus dimensionless viscosity, $\mathcal{M}$ and inertia parameter, $\mathcal{R}$,considering cross term.

حالت کاهشی دارد.

شکل ۳، روند تغییرات ضریب طول نیم ترک، γ، بر حسب مقادیر مختلفی از گرانروی، $\mathcal{M} = \{0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$، و ماند، $\mathcal{R} = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$، با در نظرگرفتن اثر اندرکنش بین فراسنج های ذکرشده را نشان می دهد. با توجه به این شکل، طول نیم ترک مقیاس شده با افزایش گرانروی کاهش می یابد و روند کاهشی با افزایش فراسنج ماند شدت می یابد. به عبارت دیگر با افزایش $\mathcal{R}$ شیب تغییرات نمودار $\gamma - \mathcal{M}$ افزایش می یابد. در مقادیر بزرگتری از گرانروی، افزایش فراسنج ماند منجر به کاهش طول نیم ترک مقیاس شده می شود. از طرف دیگر، اثر کاهنده فراسنج گرانروی بیشتر از اثر افزاینده ماند است؛ بنابراین می توان نتیجه گرفت که اثرات گرانروی سیال در فرآیند تزریق شکست هیدرولیکی بیشتر از اثرات فراسنج ماند با فرض جریان آرام می باشد. اگرچه نادیده گرفتن اثرات ماند حتی می تواند در شرایط خاصی خطایی معادل ۳۰۰٪ به تحلیل مسئله وارد کند.

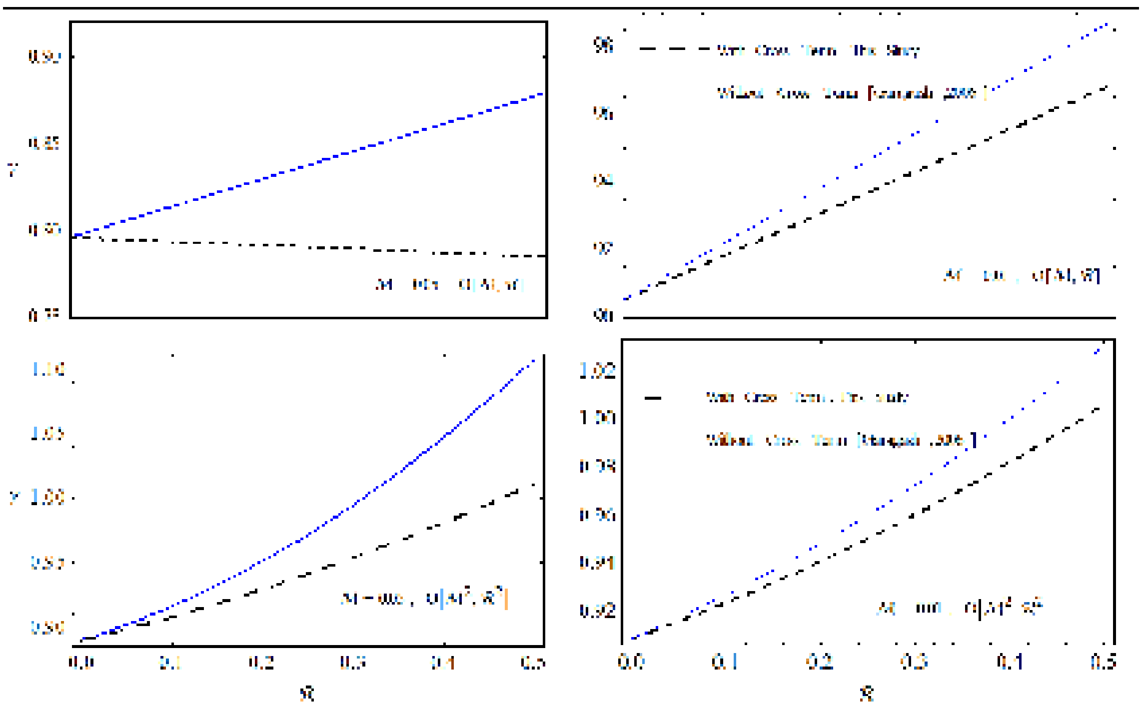
شکل ۴، ضریب طول نیم ترک مقیاس شده، γ، بر حسب فراسنج ماند با درجه تقریب مختلف $O(\mathcal{M}^m, \mathcal{R}^n)$، $m, n \to \{0,1,\ldots,3\}$، در مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانروی و ماند را نشان می دهد. همان طور که می بیند، ضریب طول نیم ترک مقیاس شده در تقریب مرتبه صفر به صورت ثابت است و فراسنج ها هیچ‌گونه اثری بر روی میزان رشد نخواهد گذاشت. ترم‌های بالاتر اثرات این فراسنج ها را در نظر می گیرند.

شکل ۵، مقایسه ای بین ضریب طول مقیاس شده، γ، با در نظرگرفتن اثر ترم اندرکنشی (این پژوهش) و بدون این اثر [۸] در



شکل ۴. ضریب طول نیم ترک مقیاس شده ، γ، بر حسب فراسنج ماند با درجه تقریب مختلف $O(\mathcal{M}^m,\mathcal{R}^n)$، $m,n\to\{0,1,...,3\}$، در مقادیر مختلفی از فراسنج‌های گرانروی و ماند اشاره شده در گراف

Fig. 4. Variation of dimensionless crack half-length, γ, versus inertia parameter, $\mathcal{R}$, and dimensionless viscosity, $\mathcal{M}$ with various order approximation of $O(\mathcal{M}^m,\mathcal{R}^n)$, $m,n\to\{0,1,...,3\}$.



شکل ۵. مقایسه طول نیم ترک مقیاس شده ، γ، با در نظر گرفتن اثر اندرکنش بین فراسنج‌های گرانروی و ماند (این تحقیق) و بدون اثر اندرکنشی [۸] در درجه تقریب مختلف.

Fig. 5. Comparison of dimensionless crack half-length, γ, considering the effect of interaction between viscosity and inertia parameters (this study) and without interaction effect[8] in various order approximation.

جدول ۳. ضرایب محاسبه شده از ترم $O(\mathcal{M}^m,\mathcal{R}^n)$، $m,n \to \{0,1,...,5\}$،در معادله۲۱ از فشار خالص مقیاس شده در محل تزریق سیال $\Pi_{0[m,n]}$

Table 3. Numerical values of coefficients of the $O(\mathcal{M}^m,\mathcal{R}^n)$ terms ($m,n \to \{0,1,...,5\}$) in the expansion [Eq. (21)] of net pressure $\Pi_{0[m,n]}$ at the inlet.

$\Pi_{0[m,n]}$ n↓ m→	۰*	۱	۲	۳	۴	۵
۰*	۰.۱۸۳۰۷۴	۱.۷۷۵۲۱۹	-۱۸.۹۴۰۴۰۰	۳۱۴.۹۴۵۷۶۳	-۶۳۱۱.۳۵۱۴	۱۳۹۴۰۶.۹۸۰
۱	-۰.۱۹۵۴۶۴	۲.۴۴۴۳۶۷	-۵۳.۴۵۷۳۲۹	۱۳۳۲.۳۶۱۹۰		
۲	-۰.۱۴۴۱۸۱۶	۵.۰۵۰۹۳۲	-۱۶۲.۳۲۰۵۹	۵۱۴۹.۰۳۳۲۴		
۳	-۰.۲۰۵۱۱۹	۱۱.۶۱۷۹۳۵	-۴۹۵.۶۰۷۶۱	۱۹۰۷۷.۱۲۳۹		
۴	-۰.۳۸۱۵۵۱۹					
۵	-۰.۸۱۶۷۵۳					

* این مقادیر در مرجع [۸] محاسبه شده‌است.

درجه تقریب های مختلف را نشان می دهد. در این شکل به خوبی قابل‌مشاهده است که اختلافات بین دو پژوهش با افزایش یکی از فراسنج‌های ماند و یا گرانروی افزایش می یابد. با توجه به شکل اشاره شده، در نظرگرفتن ترم مضروبی باعث برآورد کمتری از طول ترک خواهد شد. هم‌چنین از این شکل قابل استنباط است که با افزایش درجه تقریب این اختلافات تا اندازه ای کاهش می یابد.

۴-۲- فشار خالص مقیاس‌شده سیال بر روی سطوح ترک

مقادیر فشار خالص سیال در نقطه محل تزریق ترک، $\Pi_{0[m,n]}$ ، برحسب ترم های مختلفی از مقادیر n و m در جدول ۳ آورده شده‌است. اگرچه این جدول، یک افزایش در مقادیر فشار، با افزایش درجه n و m نشان می دهد ولی بدلیل فرض کوچک ماندن فراسنج های گرانروی و ماند، توان مرتبه n و یا m آن‌ها بسیار کوچک هستند و اثرات ترم های بالاتر به تناسب کاهش می یابد.

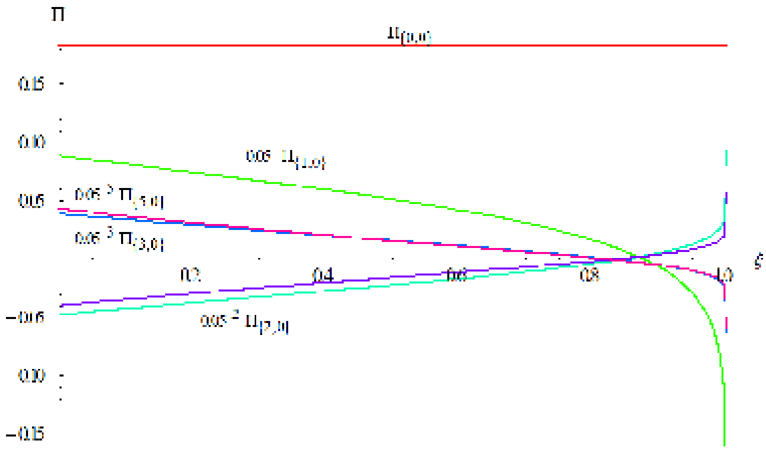
شکل‌های ۶ تا ۹ به‌ترتیب، ترم های مرتبه صفر، ترم های اندرکنشی از مرتبه اول تا سوم فشار خالص سیال داخل ترک، Π، را نشان می دهد.

محاسبه ضرایب ترم های بالاتر به‌دلیل پیچیدگی دسته معادله‌های مربوط به ترم های اندرکنشی و برخورد با انتگرال های تکینه به روش تحلیلی غیرممکن است بنابراین در اینجا این انتگرال ها به روش عددی محاسبه خواهند شد. ذکر این نکته ضروری است که در روش اغتشاش برای تعیین ترم های بالاتر نیاز به داشتن تابعی از ترم های پایین تر جواب ها است، بنابراین برای تعیین تابع حاصل از حل عددی انتگرال از تکنیک درونیابی استفاده می شود و با این روش تابع مراتب پایین تر را با درجه ای از تقریب تعیین می کنیم.

شکل ۱۰ تغییرات فشار خالص سیال داخل ترک ، Π، در محل تزریق بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانروی ، $\mathcal{M}$، و ماند ، $\mathcal{R}$ را نشان می دهد. در یک مقدار ثابت از فراسنج ماند $\mathcal{R}$، با افزایش فراسنج گرانروی $\mathcal{M}$، میزان فشار خالص در محل تزریق افزایش می یابد. سیر صعودی با افزایش فراسنج ماند و گرانروی شدت می یابد.

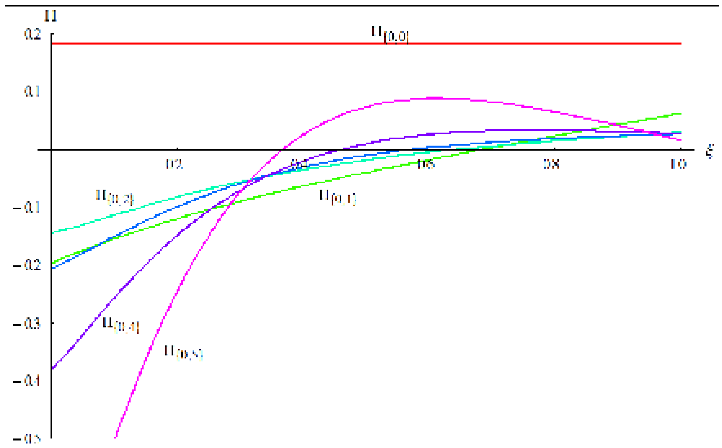
هم‌چنین از شکل ۱۰ می توان نتیجه گرفت که در یک مقدار ثابت از فراسنج گرانروی، با افزایش فراسنج ماند، مقادیر فشار در محل تزریق هم به صورت افزایشی و هم به‌صورت کاهشی است. افزایش یا کاهش بسته به مقدار فراسنج ها دارد. یعنی در مقادیر بزرگتری از این فراسنج ها سیر افزایشی است و برعکس.

شکل‌های ۱۱ و ۱۲به‌ترتیب فشار خالص مقیاس شده‌ی سیال بر روی سطوح ترک، Π، از حل مرتبه سه با فراسنج ماند صفر و گرانروی مختلف $\mathcal{M} = \{0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$ و فراسنج گرانروی صفر و ماند مختلف $\mathcal{R} = \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$، را نشان می دهد.



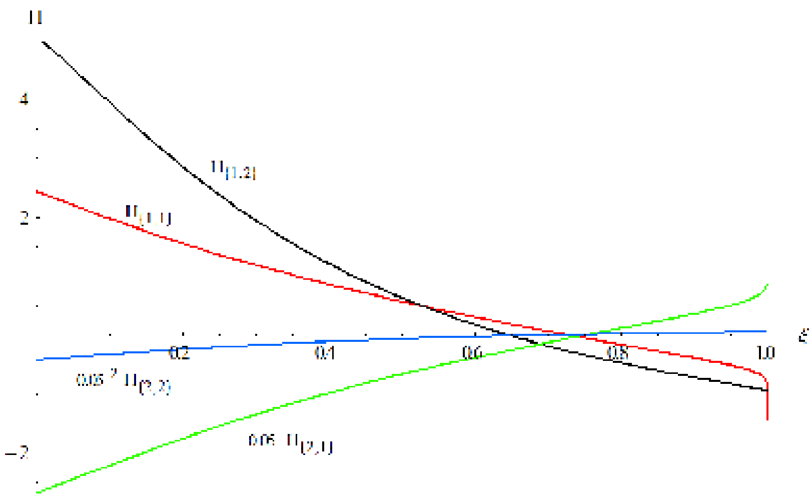
شکل ۶. ترم های مرتبه صفرو بدون ماند مرتبه های اول تا پنجم فشار خالص سیال داخل ترک، Π.

Fig. 6. Zero- to the fifth-order terms of net-pressure, Π, the inside of crack for zero- inertia



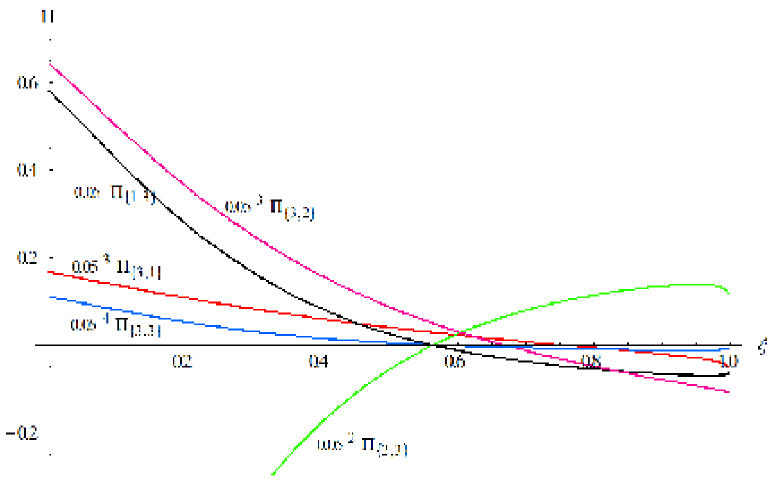
شکل ۷. ترم های مرتبه صفرو بدون گرانروی مرتبه های اول تا پنجم فشار خالص سیال داخل ترک، Π.

Fig. 7. Zero- to the fifth-order (zero-viscosity) terms of net-pressure, Π, the inside of crack



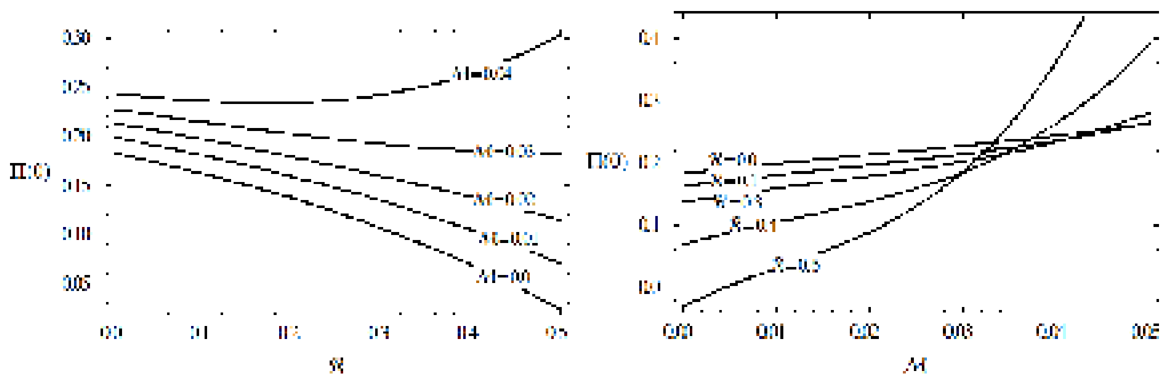
شکل ۸. ترم های اندرکنشی مرتبه اول و دوم فشار خالص سیال داخل ترک، Π.

Fig. 8. First and second order Cross terms of net-pressure, Π, the inside of crack



شکل ۹. ترم های اندرکنشی مرتبه سوم فشار خالص سیال داخل ترک، Π.

Fig. 9. Third order Cross terms of net-pressure, Π, the inside of crack



شکل ۱۰. تغییرات فشار خالص سیال داخل ترک ، Π، در محل تزریق بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج‌های گرانروی ، $\mathcal{M}$، و ماند ، $\mathcal{R}$.

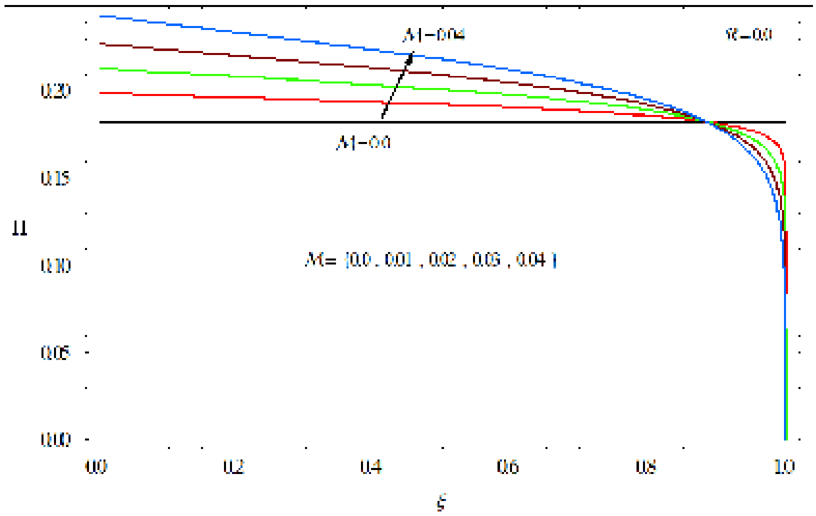
Fig. 10. Dependence of dimensionless net pressure, Π, at the inlet on the dimensionless viscosity $\mathcal{M}$, and inertia $\mathcal{R}$.

نتایج این شکل ها نیز در مرجع [۸] نیز آورده شده‌است. از آنجایی یکی از دو فراسنج صفر در نظرگرفته شد، بنابراین اندرکنشی بین فراسنج ها وجود ندارد به عبارت دیگر تمام ضرایب ترم های اندرکنش برابر با صفر است.

با توجه به شکل ۱۱، فشار خالص در جهت رشد ترک در حالت یک سیال با گرانروی ناچیز و بدون ماند، $\mathcal{R}=0$، کاهش می یابد. در صورتی که در یک سیال غیرگرانروی و با ماند پایین روند فشار خالص به صورت افزایشی خواهد بود (شکل ۱۲). این اثر مطابق با قاعده برنولی قابل‌توجیه است [۴۱].

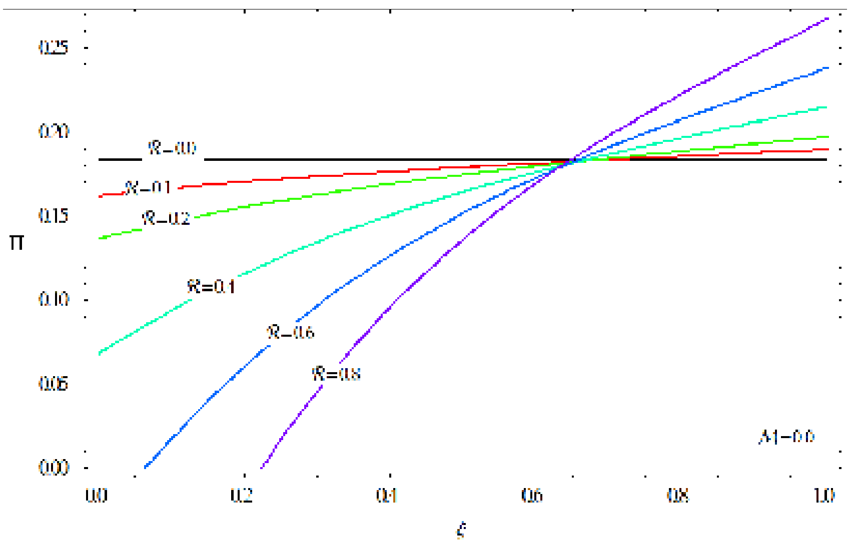
در نظرگرفتن اثر توام فراسنج های ماند و گرانروی به‌طور معمول باعث می شود که یک مقدار بیشینه در روند منحنی فشار-مکان به‌وجود بیاید (شکل‌های ۱۳و ۱۴). مطابق با شکل ۱۳، با افزایش گرانروی اختلاف بین فشار نوک و محل تزریق در یک ماند ثابت افزایش می یابد.

افزایش فراسنج ماند در مقادیر کوچک‌تری از گرانروی موجب کاهش فشار در اطراف محل تزریق و میانه ترک و افزایش فشار در اطراف نوک ترک می شود، و در نواحی گرانروی $\mathcal{M}\approx 0.03$ از روند خاصی پیروی نمی کند در حالیکه با افزایش تدریجی گرانروی مثلا در $\mathcal{M}\approx 0.04$ میزان فشار در محل تزریق افزایش و در نواحی نوک ترک کاهش می یابد. این نتایج به دلیل وجود ترم اندرکنشی $\mathcal{R}$ و



شکل ۱۱. فشار خالص سیال داخل ترک ، Π، بی ماند $\mathcal{R}=0$ بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج ها گرانروی ، $\mathcal{M}$.

Fig. 11. (Constant injection rate, zero inertia) Net-pressure, Π, the inside of crack for various values of $\mathcal{M}$.



شکل ۱۲. فشار خالص سیال داخل ترک، Π، بی گرانروی $\mathcal{M}=0$ بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج ماند ، $\mathcal{R}$.

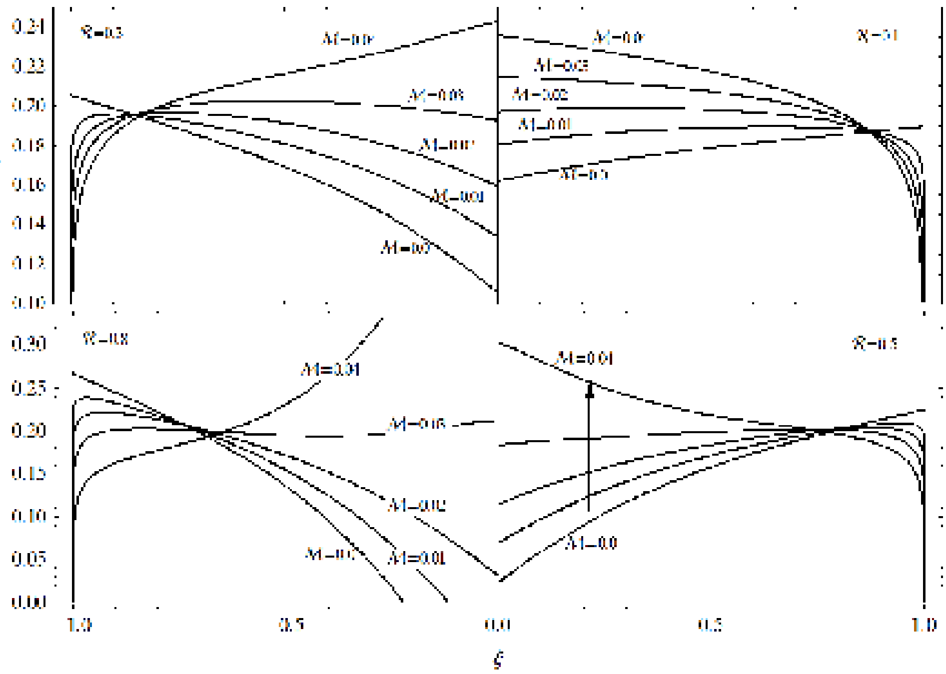
Fig. 12. (Constant injection rate, zero viscosity) Net-pressure, Π, the inside of crack for various values of $\mathcal{R}$.

$\mathcal{M}$ است که مسلما توصیف مکانیسم اندرکنش بین این دو فراسنج کار بسیار پیچیده به نظر می رسد و مستلزم پژوهش های بیشتر و انجام تست های آزمایشگاهی با این نگرش است.

۴-۳- بازشدگی مقیاس شده ترک

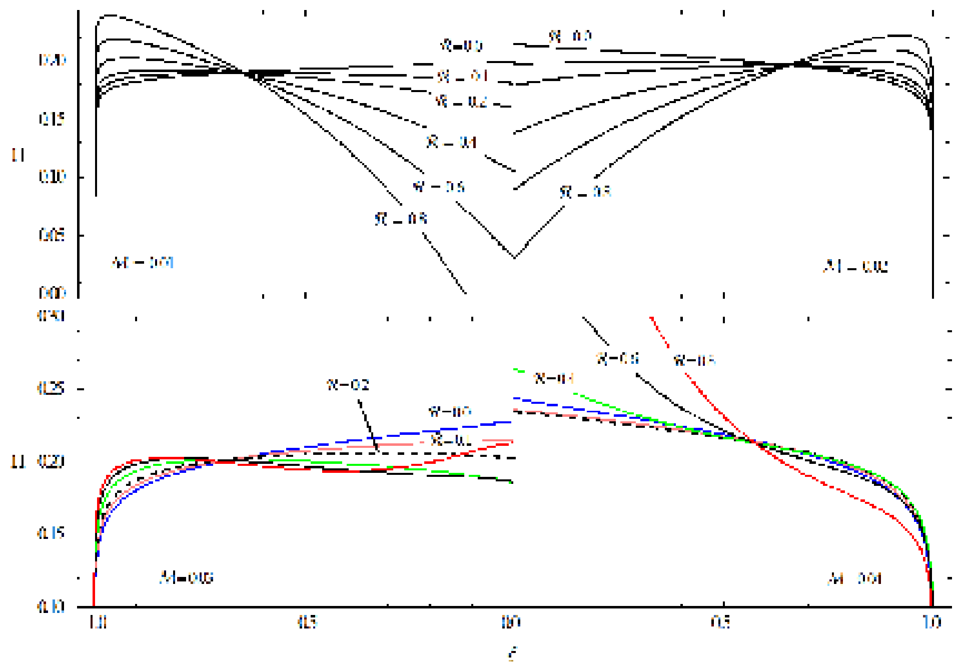
به‌طور مشابه، مقادیر بازشدگی مقیاس شده در نقطه محل تزریق ترک، $\bar{\Omega}(0)$، برحسب ترم های مختلفی از مقادیر n و m در جدول ۴ آورده شده‌است. همانطور که مشاهده می شود، فرآیند مشابه ای همانند ترم های فشار، در مقادیر بازشدگی مقیاس شده در نقطه محل تزریق ترک وجود دارد. یعنی با افزایش درجه n و m این مقادیر، $\bar{\Omega}(0)$، افزایش می یابد، ولی در نهایت اثرات ترم های بالاتر به دلیل کوچک فرض کردن فراسنج های $\mathcal{M}$ و $\mathcal{R}$ کاهش می یابد.

شکل‌های ۱۵ و ۱۶مقایسه ای بین بازشدگی مقیاس شده مجدد، $\bar{\Omega}$، و فشار خالص سیال داخل ترک ، Π، با در نظر گرفتن اثر اندرکنش بین فراسنج های گرانروی و ماند (این پژوهش) و بدون اثر اندرکنشی از مرتبه اول $O(\mathcal{M},\mathcal{R})$ [۸] را نشان می دهد. افزایش فراسنج ها منجر به افزایش اختلافات بین دو پژوهش خواهد شد. در



شکل ۱۳. روند تغییرات فشار خالص سیال داخل ترک، Π، بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج گرانروی، $\mathcal{M}$، در فراسنج ماند، $\mathcal{R}=\{0.1,0.3,0.5,0.8\}$، با در نظرگیری اثر اندرکنشی تا مرتبه $O(\mathcal{M}^3,\mathcal{R}^3)$

Fig. 13. The trend of net fluid pressure, Π, for various values of $\mathcal{M}$ and in terms of various values of the viscosity parameter, $\mathcal{R}=\{0.1,0.3,0.5,0.8\}$, with considering FVII with third order $O(\mathcal{M}^3,\mathcal{R}^3)$



شکل ۱۴. روند تغییرات فشار خالص سیال داخل ترک، Π، بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج ماند، $\mathcal{R}$، در فراسنج گرانروی، $\mathcal{M}=\{0.01,0.02,0.03,0.04\}$، با درنظرگیری اثر اندرکنشی تا مرتبه $O(\mathcal{M}^3,\mathcal{R}^3)$.

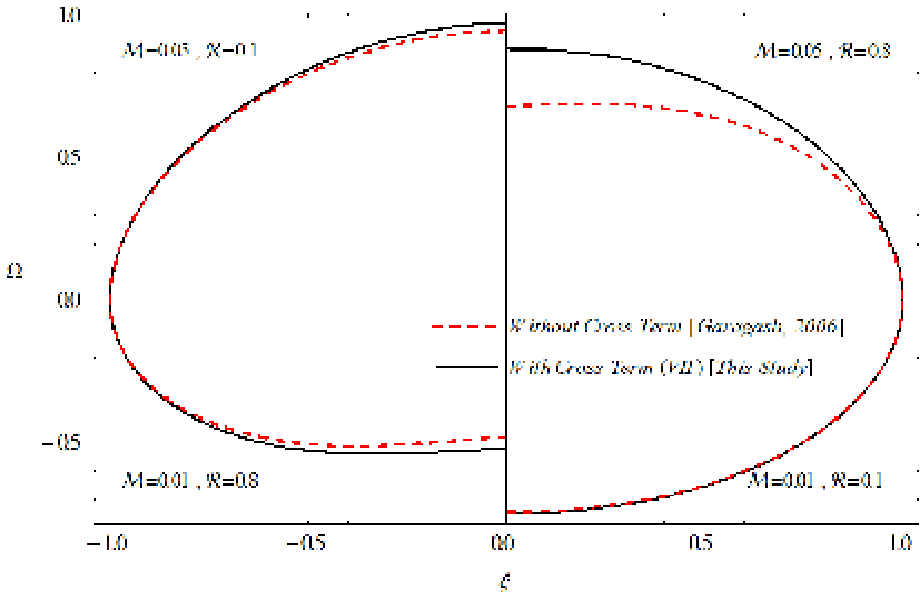
Fig. 14. The trend of net fluid pressure, Π, for various values of $\mathcal{R}$ and in terms of various values of the viscosity parameter $\mathcal{M}=\{0.01,0.02,0.03,0.04\}$, with considering FVII with third order $O(\mathcal{M}^3,\mathcal{R}^3)$

جدول ۴. ضرایب محاسبه شده از ترم $O(\mathcal{M}^m,\mathcal{R}^n)$، $m,n \rightarrow \{0,1,...,4\}$ در معادله ۲۱ از بازشدگی مقیاس شده در محل تزریق سیال $\bar{\Omega}_{0[m,n]}$

Table 4. Numerical values of coefficients of the $O(\mathcal{M}^m,\mathcal{R}^n)$ terms ($m,n \rightarrow \{0,1,...,5\}$) in the expansion [Eq. (21)] of normalized opening $\bar{\Omega}_{0[m,n]}$ at the inlet.

$\bar{\Omega}_{0[m,n]}$ n↓ m→	۰*	۱	۲	۳	۴	۵
۰*	۰.۷۳۲۲۹۶	۵.۰۵۱۷۵۱	-۴۸.۷۲۱۸۰۲	۷۷۸.۶۲۱۲۹۹	-۱۵۲۲۶.۹۸۰	۳۳۰۸۶۷.۷۰۴
۱	-۰.۳۷۶۴۶۴	۵.۰۰۹۰۰۴	-۱۱۱.۸۹۸۴۱	۲۷۸۸.۵۸۶۱۸		
۲	-۰.۲۵۹۱۴۲	۹.۱۴۳۶۰۵	-۲۹۵.۶۳۳۱۴	۹۳۸۳.۱۴۱۹۴		
۳	-۰.۳۲۴۵۲۵	۱۸.۳۴۸۸۸۳	-۷۸۱.۴۴۲۲۰	۲۹۹۹۹.۳۸۴۵		
۴	-۰.۵۱۷۱۳۲					
۵	-۰.۹۳۶۸۱۹					

* این مقادیر در مرجع [۸] محاسبه شده‌است.

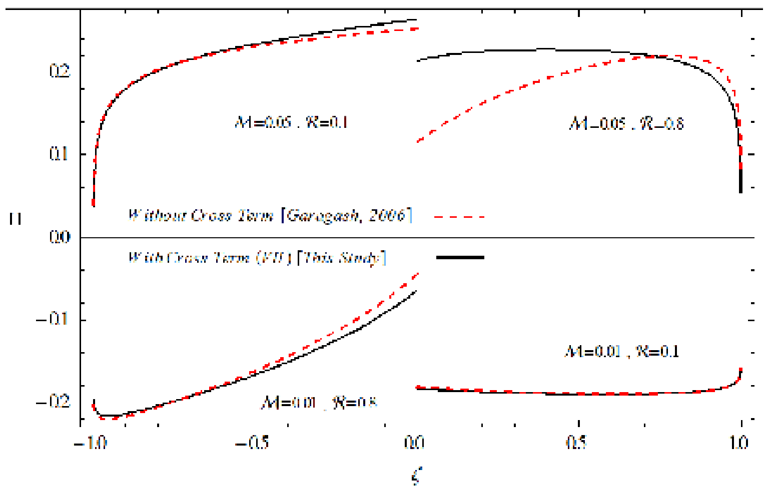


شکل ۱۵. مقایسه بازشدگی مقیاس شده مجدد، $\bar{\Omega}$، با در نظر گرفتن اثر اندرکنش بین فراسنج‌های گرانروی و ماند (این تحقیق) و بدون اثر اندرکنشی از مرتبه اول $O(\mathcal{M},\mathcal{R})$ [۸].

Fig. 15. Comparison of normalized opening, $\bar{\Omega}$, considering the effect of interaction between viscosity and inertia parameters (this study) and without interaction effect[8].

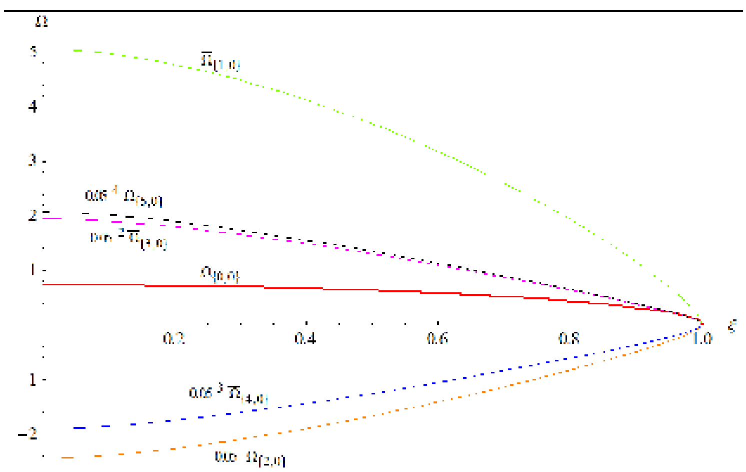
نظر گرفتن اثر توام باعث افزایش میزان بازشدگی مقیاس‌شده مجدد $\bar{\Omega}$ و کاهش طول ترک γ می شود و به عبارت دیگر ممکن است اختلافات بین نتایج در مورد بازشدگی مقیاس‌شده $\Omega = \gamma\bar{\Omega}$ کاهش یابد.

شکل‌های ۱۷ تا ۲۰ به‌ترتیب، ترم های مرتبه صفر، ترم های اندرکنشی از مرتبه اول تا سوم بازشدگی مقیاس شده مجدد ترک، $\bar{\Omega}$، را نشان می دهد. در تمام این ترم ها شرط‌مرزی در نوک ترک (میزان بازشدگی در آن نقطه برابر با صفر است) ارضا شده‌است. محاسبه ضرایب این ترم های با حل پیوسته معادله‌های حاکم در حالت مقیاس شده از روش اغتشاش اصلاح‌شده تعیین شده‌است. این نکته قابل‌ذکر است که ترم های ماند صفر و یا گرانروی صفر توسط



شکل ۱۶. مقایسه فشار خالص سیال داخل ترک ، Π، با در نظر گرفتن اثر اندرکنش بین فراسنج‌های گرانروی و ماند (این تحقیق) و بدون اثر اندرکنشی از مرتبه اول $O(\mathcal{M},\mathcal{R})$ [۸].

Fig. 16. Comparison of net fluid pressure, Π, considering the interaction effect between the viscosity and inertia parameters (this study) and without interaction term[8].



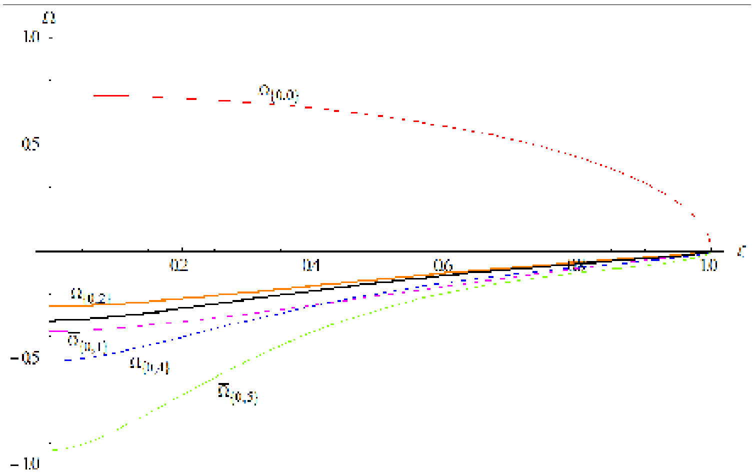
شکل ۱۷. ترم های مرتبه صفرو بدون ماند مرتبه های اول تا پنجم بازشدگی مقیاس شده مجدد، $\bar{\Omega}$،

Fig. 17. Zero- to the fifth-order terms of normalized opening, $\bar{\Omega}$, for zero- inertia

گاراگاش [۸] تعیین شده‌است. در این تحقیق ترم های اندرکنشی نیز برآورد شده‌است که در ادامه به چگونگی اثر بخشی این ترم ها بر روی میزان بازشدگی از لحاظ کیفی و کمی پرداخته می شود.

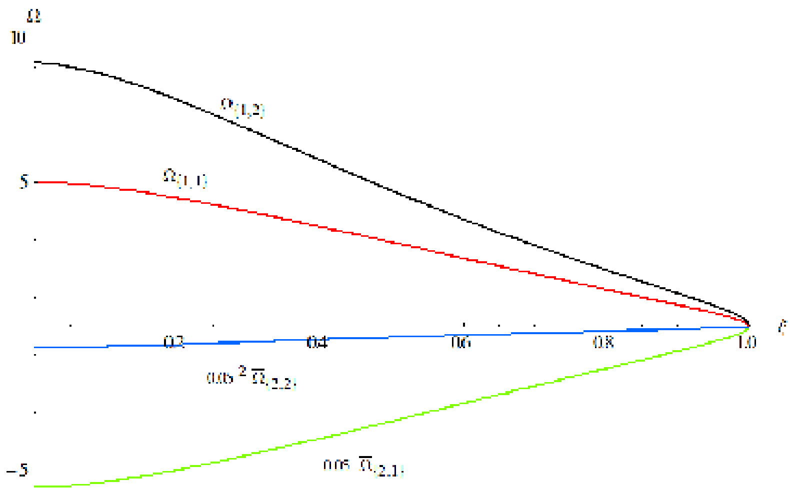
شکل ۲۱ تغییرات بازشدگی ترک، $\Omega=\gamma\bar{\Omega}$، در محل تزریق بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانروی، $\mathcal{M}$، و ماند، $\mathcal{R}$، را نشان می دهد. در یک مقدار ثابت از فراسنج گرانروی $\mathcal{M}$ ، با افزایش فراسنج ماند $\mathcal{R}$، میزان بازشدگی در محل تزریق کاهش می‌یابد. همچنین می توان نتیجه گرفت که در یک مقدار ثابت از فراسنج ماند $\mathcal{R}$، با افزایش فراسنج گرانروی $\mathcal{M}$، مقادیر بازشدگی در محل تزریق هم به‌صورت افزایشی و هم کاهشی است.

نتایج شکل‌های ۲۲ و۲۳ در مرجع [۸] آورده شده‌است. به‌طورکلی افزایش گرانروی سیال موجب افزایش بازشدگی و کاهش میزان رشد (مطابق با شکل ۳) با فرض ماند صفر خواهد شد. همان‌طور که اشاره شد، مطابق با شکل ۱۲ افزایش ماند سیال میزان فشار خالص سیال در محل تزریق کاهش و در حوالی نوک ترک افزایش می یابد. سطوح پرفشار ترک باعث افزایش بازشدگی در آن ناحیه خواهند شد. از



شکل ۱۸. ترم های مرتبه صفر و بدون گرانروی مرتبه های اول تا پنجم بازشدگی مقیاس شده مجدد، $\bar{\Omega}$.

Fig. 18. Zero- to the fifth-order terms of normalized opening, $\bar{\Omega}$, forzero- viscosity



شکل ۱۹. ترم های اندرکنشی مرتبه اول و دوم بازشدگی مقیاس شده مجدد، $\bar{\Omega}$.

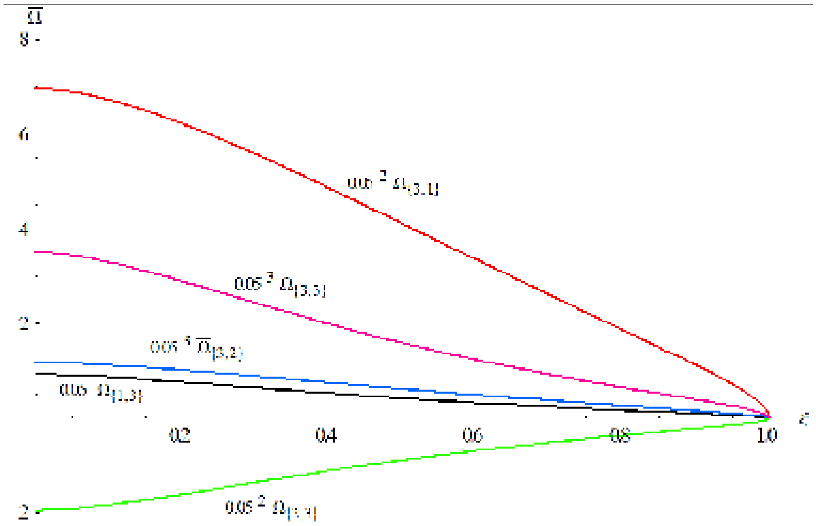
Fig. 19. First and second order cross terms of normalized opening, $\bar{\Omega}$ in expansion solution.

طرفی محدودیت شرایط مرزی در نوک ترک وجود دارد و نهایتا ترک در مقادیر بزرگتری از فراسنج ماند به‌صورت دنبلی شکل درخواهد آمد (مطابق با شکل ۲۳). مسلما، در عملیات شکست هیدرولیکی در مرحله تزریق در نظر نگرفتن اثرات ماند می تواند خطای چشم‌گیری را وارد کند. این خطاها با افزایش فراسنج ماند، افزایش می یابد.

شکل ۲۴ میزان بازشدگی مقیاس شدۀ ترک، $\Omega=\gamma\bar{\Omega}$، از حل مرتبه سه به‌ازای مقادیر مختلفی از ماند $\mathcal{R}=\{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8\}$ و گرانروی $\mathcal{M}=\{0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$، را با در نظر گرفتن اثر توام دو فراسنج نشان می دهد. همان‌طور که اشاره شد افزایش ماند در سیال بدون گرانروی باعث دنبلی شدن شکل ترک خواهد شد که با افزایش گرانروی ترک از دنبلی شکل خارج می شود.

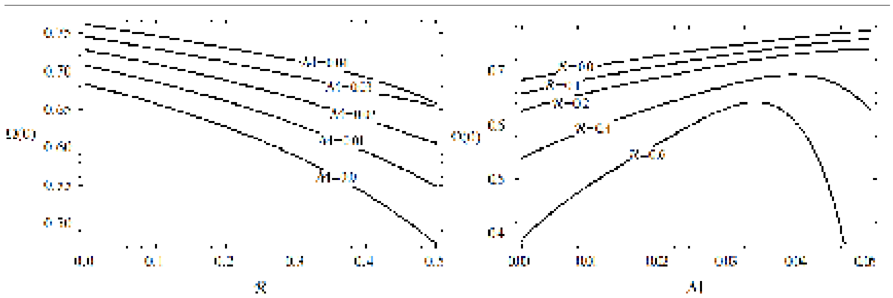
۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش اثر اندرکنش فراسنج های گرانروی و ماند در میزان انتشار، بازشدگی و فشار سیال داخلی ترک در سنگ های شکننده برای مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانروی $\mathcal{M}$ و ماند



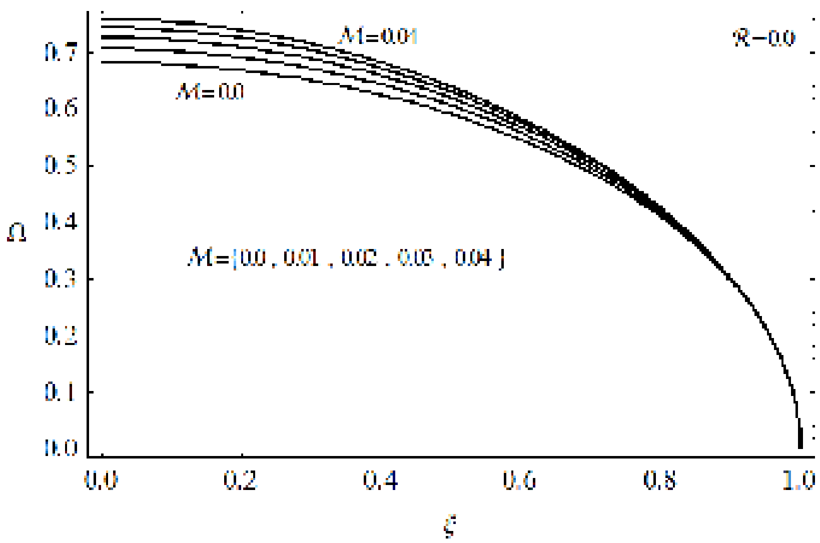
شکل ۲۰. ترم های اندرکنشی مرتبه سوم بازشدگی مقیاس شده مجدد، $\bar{\Omega}$.

Fig. 20. Third order cross terms of normalized opening, $\bar{\Omega}$ in expansion solution.



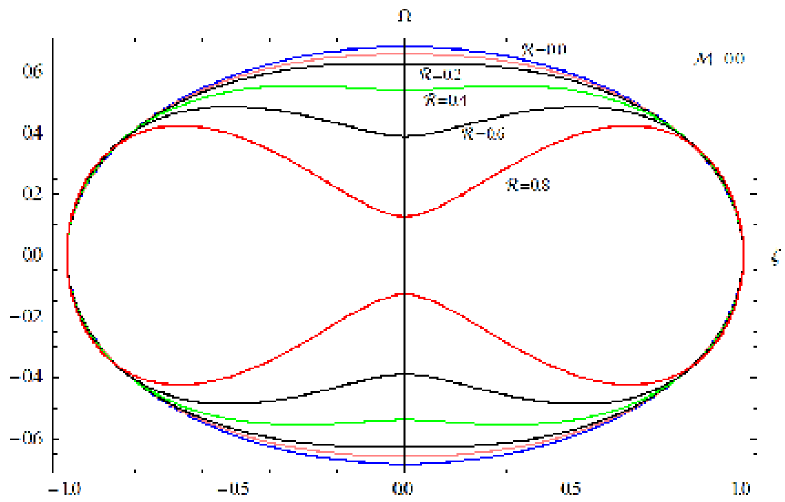
شکل ۲۱. تغییرات بازشدگی ترک، $\Omega = \gamma\bar{\Omega}$، در محل تزریق بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانروی ، $\mathcal{M}$، و ماند ، $\mathcal{R}$.

Fig. 21. Variation of opening, $\Omega = \gamma\bar{\Omega}$ at the inlet verses the dimensionless viscosity $\mathcal{M}$, and inertia $\mathcal{R}$.



شکل ۲۲. بازشدگی ترک، $\Omega = \gamma\bar{\Omega}$، بدون ماند $\mathcal{R} = 0$ بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج‌های گرانروی ، $\mathcal{M}$.

Fig. 22. Opening, $\Omega = \gamma\bar{\Omega}$, for various values of $\mathcal{M}$ with zero-inertia, $\mathcal{R} = 0$.



شکل ۲۳. بازشدگی ترک، $\Omega=\gamma\bar{\Omega}$، بی گرانروی $\mathcal{M}=0$ بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج ماند، $\mathcal{R}$.

Fig. 23. Opening, $\Omega=\gamma\bar{\Omega}$, for various values of $\mathcal{R}$, with zero-viscosity, $\mathcal{M}=0$.

$\mathcal{R}$ برای ترک دو بعدی KGD در مقیاس سختی با استفاده از روش تحلیلی اغتشاش گسترش‌یافته بررسی شد. نتایج آن به صورت زیر خلاصه می شود:

الف) ضریب طول نیم ترک با افزایش گرانروی کاهش می یابد و روند کاهشی با افزایش فراسنج ماند شدت می یابد. در مقادیر بزرگتری از گرانروی، افزایش فراسنج ماند منجر به کاهش طول نیم ترک می شود. از طرف دیگر، اثر کاهنده فراسنج گرانروی بیشتر از اثر افزاینده ماند است؛ بنابراین می توان نتیجه گرفت که اثرات گرانروی سیال در فرآیند تزریق شکست هیدرولیکی بیشتر از اثرات فراسنج ماند با فرض جریان آرام می باشد. مسلما، در نظرنگرفتن اثرات ماند می تواند خطای چشم‌گیری را وارد کند. این خطاها با افزایش فراسنج ماند، افزایش می یابد و ممکن است به ۳۰۰٪ نیز برسد. بنابراین این مورد می تواند اهمیت این پژوهش را به خوبی نشان دهد.

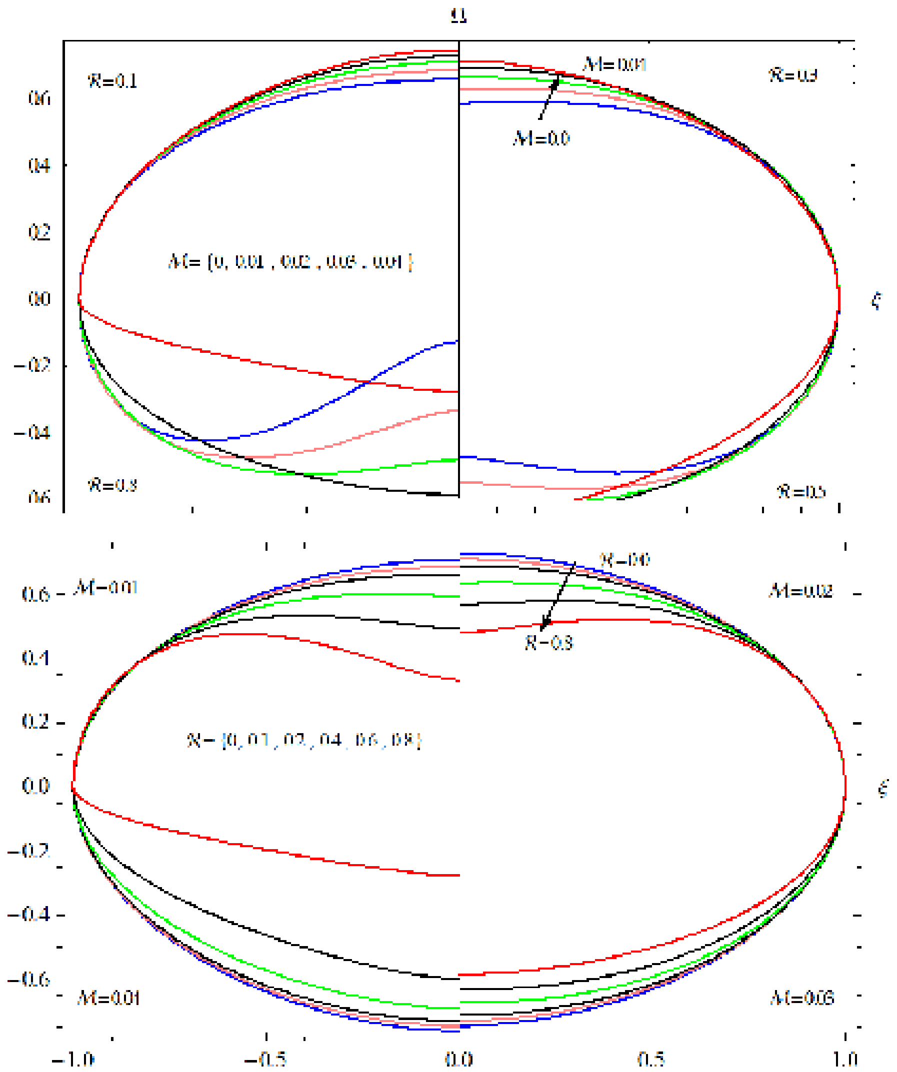
ب) در یک مقدار ثابت از فراسنج ماند $\mathcal{R}$، با افزایش فراسنج گرانروی $\mathcal{M}$، میزان فشار خالص در محل تزریق افزایش می یابد. سیر صعودی با افزایش فراسنج ماند و گرانروی شدت می یابد. همچنین می توان نتیجه گرفت که در یک مقدار ثابت از فراسنج گرانروی، با افزایش فراسنج ماند، مقادیر فشار در محل تزریق هم به صورت افزایشی و هم کاهشی است. افزایش یا کاهش بستگی به مقدار فراسنجها دارد.

ج) فشار خالص در جهت رشد ترک در حالت یک سیال با گرانروی ناچیز و بدون ماند، $\mathcal{R}=0$، کاهش می یابد. در صورتی که در یک سیال غیرگرانروی و با ماند پایین روند فشار خالص به‌صورت افزایشی خواهد بود. این اثر مطابق با قاعده برنولی قابل‌توجیه است. در نظرگرفتن اثر توام فراسنج های ماند و گرانروی به‌طور معمول باعث می شود که یک مقدار بیشینه در روند منحنی فشار-مکان بوجود بیاید. با افزایش گرانروی اختلاف بین فشار نوک و محل تزریق در یک ماند ثابت افزایش می یابد.

د) در یک مقدار ثابت از فراسنج گرانروی $\mathcal{M}$، با افزایش فراسنج ماند $\mathcal{R}$، میزان بازشدگی در محل تزریق کاهش می یابد. همچنین می توان نتیجه گرفت که در یک مقدار ثابت از فراسنج ماند $\mathcal{R}$، با افزایش فراسنج گرانروی $\mathcal{M}$، مقادیر میزان بازشدگی در محل تزریق هم به‌صورت افزایشی و هم کاهشی است.

ه) افزایش ماند سیال میزان فشار خالص سیال در محل تزریق کاهش و در حوالی نوک ترک افزایش می یابد. سطوح پرفشار ترک باعث افزایش بازشدگی در آن ناحیه خواهند شد. از طرفی محدودیت شرایط مرزی در نوک ترک وجود دارد و درنهایت ترک در مقادیر بزرگتری از فراسنج ماند به‌صورت دنبلی‌شکل درخواهد آمد. افزایش ماند در سیال بدون گرانروی باعث دنبلی شدن شکل ترک خواهد شد که با افزایش گرانروی ترک از دنبلی شکل شدن خارج می شود.

برای ادامه پژوهش در این بخش، می توان اثرات توام دیگر فراسنج ها همچون چقرمگی و ماند را در رژیم گرانروی بررسی کرد.



شکل ۲۴. روند تغییرات بازشدگی ترک، $\Omega = \gamma\bar{\Omega}$، بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانروی ، $\mathcal{M}$، و ماند ، $\mathcal{R}$، با در نظرگیری اثر اندرکنشی تا مرتبه $O(\mathcal{M}^3,\mathcal{R}^3)$.

Fig. 24. The trend of opening, $\Omega = \gamma\bar{\Omega}$, for various values of $\mathcal{M}$ and $\mathcal{R}$, with considering FVII with approximation of $O(\mathcal{M}^3,\mathcal{R}^3)$

همچنین در نظر گرفتن اثرات نشت و یا عقب افتادگی سیال از نوک در کنار اثرات اندرکنش فراسنج ها چقرمگی، گرانروی و ماند می‌تواند به عنوان یک موضوع پژوهشی مطرح شود.

۶- تقدیر و تشکر

نویسندگان از راهنمایی‌های ارزنده پروفسور دمیتری گاراگاش (Dmitry Garagash) از دانشگاه Dalhousie کانادا در دوره فرصت مطالعاتی برای واضح تر شدن روند این پژوهش سپاسگزارند.

مراجع

[1] M.J. Economides, K.G. Nolte, U. Ahmed, Reservoir stimulation, Wiley Chichester, 2000.

[2] J.L. Gidley, Recent advances in hydraulic fracturing, (1989).

[3] R.J. Clifton, A.S. Abou-Sayed, A variational approach to the prediction of the three-dimensional geometry of hydraulic fractures, in: SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symposium, Society of

Petroleum Engineers, 1981.

[4] A. Ingraffea, T. Boone, Simulation of hydraulic fracture in poroelastic rock, Numerical Methods in Geomechanics (Innsbruck 1988), Balkema, Rotterdam, (1988) 95-105.

[5] S.H. Advani, T. Lee, J. Lee, Three-dimensional modeling of hydraulic fractures in layered media: part I-finite element formulations, Journal of energy resources technology, 112(1) (1990) 1-9.

[6] J. Sousa, B. Carter, A. Ingraffea, Numerical simulation of 3D hydraulic fracture using Newtonian and power-law fluids, in: International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts, Elsevier, 1993, pp. 1265-1271.

[7] K. Shah, B. Carter, A. Ingraffea, Hydraulic fracturing simulation in parallel computing environments, in: International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts, 1997, pp. 474.

[8] D.I. Garagash, Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: Asymptotics of large toughness, Engineering Fracture Mechanics, 73(4) (2006) 456-481.

[9] R. Nilson, Gas-driven fracture propagation, J. Appl. Mech.;(United States), 48 (1981).

[10] D. Spence, D. Turcotte, Magma driven propagation of cracks, Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978-2012), 90(B1) (1985) 575-580.

[11] E. Detournay, D. Garagash, The near-tip region of a fluid-driven fracture propagating in a permeable elastic solid, Journal of Fluid Mechanics, 494 (2003) 1-32.

[12] D. Spence, P. Sharp, Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow, Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 400(1819) (1985) 289-313.

[13] J.R. Lister, Buoyancy-driven fluid fracture: the effects of material toughness and of low-viscosity precursors, J. Fluid Mech, 210 (1990) 263-280.

[14] R. Carbonell, J. Desroches, E. Detournay, A comparison between a semi-analytical and a numerical solution of a two-dimensional hydraulic fracture, International journal of solids and structures, 36(31) (1999) 4869-4888.

[15] A. Savitski, E. Detournay, Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions, International journal of solids and structures, 39(26) (2002) 6311-6337.

[16] D.I. Garagash, E. Detournay, Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: small toughness solution, Journal of Applied Mechanics, 72 (2005) 916.

[17] D. Garagash, E. Detournay, Viscosity-dominated regime of a fluid-driven fracture in an elastic medium, in: IUTAM Symposium on Analytical and Computational Fracture Mechanics of Non-Homogeneous Materials, Springer, 2002, pp. 25-29.

[18] D. Garagash, E. Detournay, An analysis of the influence of the pressurization rate on the borehole breakdown pressure, International journal of solids and structures, 34(24) (1997) 3099-3118.

[19] J.I. Adachi, Fluid-driven fracture in permeable rock, University of Minnesota, 2001.

[20] J. Adachi, E. Detournay, Self similar solution of a plane strain fracture driven by a power law fluid, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 26(6) (2002) 579-604.

[21] J.I. Adachi, E. Detournay, Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock, Engineering Fracture Mechanics, 75(16) (2008) 4666-4694.

[22] P.A. Charlez, Rock mechanics: petroleum applications, Editions Technip, 1997.

[23] D. Mendelsohn, A review of hydraulic fracture modeling-part I: general concepts, 2D models, motivation for 3D modeling, Journal of energy resources technology, 106(3) (1984) 369-376.

[24] P. Valko, M. Economides, Hydraulic Fracturing Mechanics, in, John Wiley and Sons, New York, USA, 1995.

[25] A. Asgari, A. Golshani, Hydraulic Fracture Propagation in Impermeable Elastic Rock With Large Toughness: Considering Fluid Inertia Parameter

[36] M.G. Mack, N.R. Warpinski, Mechanics of hydraulic fracturing, Reservoir stimulation, (2000) 6-1.

[37] M. Biot, L. Masse, W. Medlin, A two-dimensional theory of fracture propagation, SPE Production Engineering, 1(01) (1986) 17-30.

[38] R. Nilson, Similarity solutions for wedge-shaped hydraulic fractures driven into a permeable medium by a constant inlet pressure, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 12(5) (1988) 477-495.

[39] R.S. Carbonell, Self-similar solution of a fluid-driven fracture in a zero toughness elastic solid, Proc .Roy. Soc. London. Ser, A submitted for publication, 1996.

[40] J. Desroches, E. Detournay, B. Lenoach, P. Papanastasiou, J. Pearson, M. Thiercelin, A. Cheng, The crack tip region in hydraulic fracturing, in: Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, The Royal Society, 1994, pp. 39-48.

[41] N. Huang, A. Szewczyk, Y. Li, Self-similar solution in problems of hydraulic fracturing, Journal of Applied Mechanics, 57 (1990) 877.

[42] D. Garagash, E. Detournay, The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium, Journal of Applied Mechanics, 67(1) (2000) 183-192.

[43] G. Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics Cambridge Univ, Press, Bentley House, London, (1967).

[44] E.D. Dmitry Garagash, Similarity solution of a semi-infinite fluid-driven fracture in a linear elastic solid, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy, 326(5) (1998) 285-292.

[45] D. Garagash, Hydraulic fracture propagation in elastic rock with large toughness, in: 4th North American Rock Mechanics Symposium, American Rock Mechanics Association, 2000.

[46] D. Garagash, Transient solution for a plane-strain fracture driven by a shear-thinning, power-law fluid, International Journal for Numerical and Analytical

Sharif Journal of Civil Engineering, 31.2(3.2) (2015) 23-29.

[26] A. Asgari, A. Golshani, A. Lakirouhani, Hydraulic Fracture Propagation in Brittle Rock: Considering Interaction Term Between Fluid Inertia and Viscosity Parameters, Sharif Journal of Civil Engineering, 32.2(2.1) (2016) 59-66.

[27] A. Asgari, A. Golshani, Mathematical Modeling of Hydraulic Fracture Propagation in Elastic Medium: Viscosity-Toughness-Dominated, Sharif Journal of Civil Engineering, (Accepted In 2017).

[28] S. Khristianovic, Y. Zheltov, Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids, in: Proc. 4th world petroleum congress, Rome, 1955, pp. 579-586.

[29] G.I. Barenblatt, The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 23(3) (1959) 622-636.

[30] T. Perkins, L. Kern, Widths of hydraulic fractures, Journal of Petroleum Technology, 13(09) (1961) 937-949.

[31] J. Geertsma, F. De Klerk, A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures, Journal of Petroleum Technology, 21(12) (1969) 1571-1581.

[32] R. Nordgren, Propagation of a vertical hydraulic fracture, Society of Petroleum Engineers Journal, 12(04) (1972) 306-314.

[33] J. Geertsma, R. Haafkens, A comparison of the theories for predicting width and extent of vertical hydraulically induced fractures, Journal of energy resources technology, 101(1) (1979) 8-19.

[34] J. Geertsma, Two-dimensional fracture propagation models, in: Recent Advances in Hydraulic Fracturing, SPE Richardson, TX, 1989, pp. 81-94.

[35] K.B. Naceur, M. Economides, Production from naturally fissured reservoirs intercepted by a vertical hydraulic fracture, SPE formation evaluation, 4(04) (1989) 550-558.

Methods in Geomechanics, 30(14) (2006) 1439-1475.

[47] A.P. Bunger, E. Detournay, R.G. Jeffrey, Crack tip behavior in near-surface fluid-driven fracture experiments, Comptes Rendus Mecanique, 333(4) (2005, c) 299-304.

[48] D. Garagash, E. Detournay, Erratum:"Plane-Strain Propagation of a Fluid-Driven Fracture: Small Toughness Solution [Journal of Applied Mechanics, 2005, 72 (6), pp. 916-928], Journal of Applied Mechanics, 74(4) (2007) 832-832.

[49] R.A. Shapiro, The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow, New York: Ronald Press, 2(1) (1954).

[50] I.N. Sneddon, M. Lowengrub, P. Mathematician, Crack problems in the classical theory of elasticity, Wiley New York, 1969.

[51] J.R. Rice, Mathematical analysis in the mechanics of fracture, Fracture: an advanced treatise, 2 (1968) 191-311.

[52] A.P. Bunger, R.G. Jeffrey, E. Detournay, Toughness-dominated near-surface hydraulic fracture experiments, in: Gulf Rocks 2004, the 6th North America Rock Mechanics Symposium (NARMS), American Rock Mechanics Association, 2004.

[53] D.I. Garagash, Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: Early-time solution, International journal of solids and structures, 43(18-19) (2006) 5811-5835.

[54] M.D. Van Dyke, Perturbation methods in fluid dynamics, Stanford: Parabolic Press, 1975.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Asgari, A. Golshani, Analysis of Hydraulic Fracture Propagation in Toughness Dominant with Considering Fluid Viscosity and Inertia Parameters Interaction: Higher Order Terms, Amirkabir J. Civil Eng., 52(2) (2020) 469-494.

DOI: 10.22060/ceej.2018.14498.5673

این صفحه عمداً خالی است