



## Hybrid Boundary-Finite Element Method for Modeling Artificial Freezing in Soil Environment Including Rock Type Inhomogeneities

Bahman Ansari\*, Alireza Firoozfar

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

**ABSTRACT:** This research proposes a hybrid numerical method, for modeling the development of artificial ground freezing in soil containing subsurface inhomogeneities. In this approach, by combining the Boundary Element Method (BEM) and employing time-independent fundamental solutions, appropriate boundary integral equations are developed. The volume integrals arising from the presence of dynamic terms are incorporated into the equations using the Finite Element Method (FEM). For this purpose, a type of boundary-finite element, combining a quadratic boundary element with a three-node triangular finite element, was developed, and the solvable forms of the final equations were presented. Subsequently, by implementing the hybrid method into a computational algorithm, its accuracy and efficiency was evaluated and validated by solving several benchmark examples. Finally, in a parametric study, the application of the hybrid method for modeling the development of artificial freezing in saturated soil containing an inhomogeneities in the form of an unsaturated rock mass is described. The effects of varying the cross-sectional area of the inhomogeneities and its distance from the freeze pipe were evaluated. The results of the parametric study indicate that the presence of the inhomogeneities reduces the volume of the freeze bulb by up to 20%. Furthermore, inhomogeneities with a circular cross-section were more limited the development of freezing compared to a square shape.

### Review History:

Received: Sep. 18, 2025

Revised: Feb. 07, 2026

Accepted: Feb. 21, 2026

Available Online: Mar. 02, 2026

### Keywords:

Artificial Ground Freezing

Numerical Modeling

Hybrid Method

Circular and Square Inhomogeneities

Boundary-Finite Element Method

### 1- Introduction

Generally, freezing in soil and rock environments can be classified into two main domains: natural freezing and artificial freezing [1]. Natural freezing occurs due to climatic changes and the formation of successive freeze-thaw cycles, particularly during the cold season. This process mainly involves the surface layers of the soil and, except in polar regions, rarely penetrates more than 10 meters below the ground surface. However, secondary effects of freezing, such as contraction-expansion cycles and soil volume changes of up to 9% are among the factors that highlight the importance of this phenomenon in various geographical regions, especially during cold seasons [2]. On the other hand, artificial freezing is human-made, achieved using temperature-lowering equipment in the soil. The primary objective of this type of freezing is the temporary improvement and strengthening of weak and low-bearing capacity sections of the soil, such that by freezing and creating stronger bonds between soil particles, the soil mass can exhibit greater resistance to applied loads [1, 2]. Zhou et al. (2014) described the use of the finite element method in modeling heat diffusion equations and developed a three-phase model consisting of soil, water, and ice lenses [3]. Alzoubi et al. (2020) presented a review study introducing

various modeling methods for artificial freezing propagation. According to their findings, studies on freezing phenomena modeling in soils are very limited, and existing models are not capable of accounting for all the complex conditions governing freezing processes [4]. One important issue in soil freezing propagation is the formation of ice lenses. This phenomenon alters the thermodynamic properties of soil. Ren et al. (2023) used a machine learning-based model to assess and predict the formation of ice lenses in soil and compared their results with available laboratory and field data [5].

A review of the technical literature on modeling methods for freezing propagation in soil reveals that the heat diffusion equation is one of the most fundamental governing equations for modeling this phenomenon. In this research, a hybrid method is proposed to solve this equation. In this process, by simultaneously employing the boundary element method to close distant boundaries and the finite element method for meshing regions related to artificial freezing the accuracy and speed of numerical modeling are improved. Subsequently, using these equations, a heterogeneous soil environment under artificial freezing is modeled, and the effects of cross-sectional geometry and spacing of subsurface inhomogeneities on the propagation of freezing in the soil are assessed. The

\*Corresponding author's email: Ansari.Bahman@znu.ac.ir



results of this research demonstrate that the hybrid method is an accurate approach for modeling freezing in semi-infinite soil environments and can be optimally utilized for modeling problems with complex geometries and conditions.

### 2- Methodology

The heat diffusion equation in an infinite rod was first developed by Fourier [1, 2]. By extending this equation to a two-dimensional environment, following equation is can be presented [1]:

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = \sigma\rho \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

Where  $k$ ,  $\sigma$ , and  $\rho$  represent the thermal conductivity, specific heat capacity, and density of the medium, respectively. Moreover, in this equation,  $T$  denotes the temperature variation per unit area as a function of time  $t$ . defining the boundary-volume element using the combined three-node triangle element and quadratic boundary element along with the use of time-independent fundamental solutions, Equation (1) is ultimately transformed into the following solvable form:

$$c^i T^i + \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} q^* \cdot f \cdot d\Gamma_j [T] - \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} T^* \cdot f \cdot d\Gamma_j [q] = \frac{\sigma\rho}{k} \sum_{j=1}^{NI} \int_{\Omega_j} T^* \cdot f \cdot d\Omega_j [T] \tag{2}$$

where  $T^*$  and  $q^*$  are the time-independent fundamental solutions related to temperature and flux respectively [6] and  $T$  and  $q$  are the temperature and flux in domain,  $\Omega$  bounded by  $\Gamma$ .  $c^i$  is the constant value that can be calculated based on the smaller angle between two adjacent boundary elements. Also, in Eq.2, NE represents the number of boundary elements and NI denotes the number of internal triangle elements. In all integrals  $f$  is the shape function. The compact matrix form of the Eq.2 can be represented as follows:

$$[H]\{T\} + [G]\{q\} = [I]\{T\} \tag{3}$$

In above equation,  $[H]$ ,  $[G]$  and  $[I]$  are the coefficient matrixes. Base on figure (1), Eq.3 can be applied to the soil model with internal inhomogeneities. In this regard the domain is divided to two distinct models: first model includes the soil environment with a cavity instead of inhomogeneity and second model is the domain of inhomogeneity itself. By applying Eq.3 for each model and combining the resultant equations considering continuity of temperature and flux at interface boundaries, the final solvable form of the equations can be presented as follows:

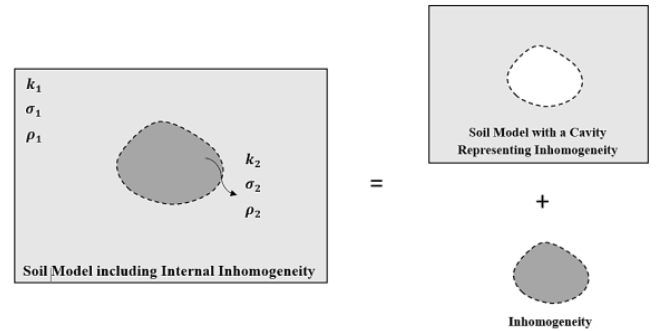


Fig. 1. Soil model including inhomogeneity divided to two distinct models.

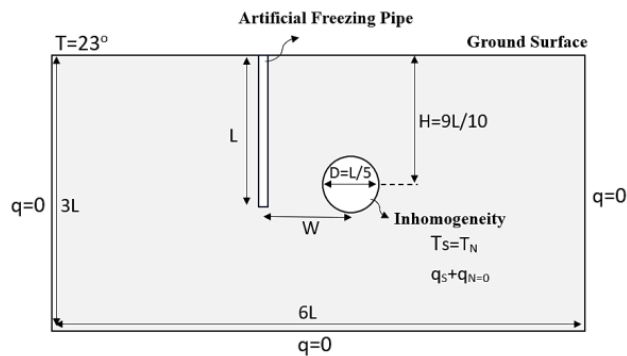
$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ 0 & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{22} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ 0 & -G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \end{Bmatrix} \tag{4}$$

where, all element with index 11 are related to first model and all elements with index 22 are for second (inhomogeneity) model. In Eq.4 index 12 and 21 are the values that are related to interface boundaries.

### 3- Model

Given the application of the hybrid model in analyzing various types of soil environments with inhomogeneities this section focuses on a soil medium containing a subsurface inhomogeneity in the form of an unsaturated rock mass. The soil medium is subjected to artificial ground freezing using a freezing pipe under thermal shock down to 0°C. According to Figure (5), the geometric specifications and governing boundary conditions of this environment are presented. As shown in the figure, the ground surface boundary is at a normal temperature of 23°C due to heat exchange with the environment. The boundaries of the freezing pipe are also modeled as a constant temperature of 0°C. It should be noted that at the start of the computation, all nodes and points of the problem are in equilibrium at a normal temperature of 23°C. After the analysis begins, the temperature of the freezing pipe is reduced at its boundaries using an exponential function of the form  $T(t) = A(e^{-1/st} - 1)$ , where A is the reduction amplitude equal to 23°C, and s is the reduction rate equivalent to 2000 units per second.

For this model it is assumed that soil is a type of compacted sand and inhomogeneity is an unsaturated rock. Table (1) presents the thermodynamic properties of the unsaturated rock and sand soil used in this study.



**Fig. 2. Geometric specifications and boundary conditions of the artificial ground freezing model, including a subsurface inhomogeneity and a freezing pipe of length  $L$ .**

**4- Results and Discussion**

Figure (3) presents temperature variations over time along the centerline of the freezing pipe. In this figure, temperature variations as a function of distance from the freezing pipe are shown for evaluation points at distances of 0.1 to 9 meters from the pipe (denoted as  $R=0$  to  $R=9$ ) for the case where subsurface inhomogeneity is not considered. Alongside, results for the case where a square-shaped inhomogeneity is embedded in the soil layer are displayed using symbols  $RR=0$  to  $RR=9$  for evaluation points at 0.1 to 9 meters from the freezing pipe. Figures (3-a) to (3-c) illustrate the effect of varying the inhomogeneity distance on the temperature. As clearly observed in these figures, the square-shaped inhomogeneity significantly influences the temperature propagation around the freezing pipe. For instance, in Figure (3-a), when the inhomogeneity is at its closest distance to the freezing pipe ( $W=0.12L$ ), the temperature near the pipe ( $RR=0$ ) decreases at a slower rate in the initial steps compared to the case without inhomogeneity, with final freezing temperatures reaching up to  $2.5^{\circ}\text{C}$ . In contrast, in the absence of inhomogeneity, the temperature drop in these points approaches near  $0^{\circ}\text{C}$ , indicating the adverse effect of inhomogeneity on freezing near the pipe when heterogeneity is present. The primary cause of this can be attributed to the lower thermal conductivity of the inhomogeneity mass compared to the surrounding soil, meaning that at a given time, the inhomogeneity allows freezing to develop beyond its region at a slower rate. At a distance of 3 meters from the freezing pipe ( $RR=3$ ), the temperature variations match those of the no- inhomogeneity case up to time step 300. However, beyond this step, the presence of inhomogeneity causes the temperature to converge to a constant value of approximately  $5^{\circ}\text{C}$ . Without inhomogeneity, the temperature drop is more optimal, with values even below  $5^{\circ}\text{C}$ . This is justifiable because subsurface inhomogeneity, due to its lower thermal conductivity, requires a longer time than the surrounding soil to reach freezing temperature. Therefore, during the same period that the freezing radius is developing in the soil, the

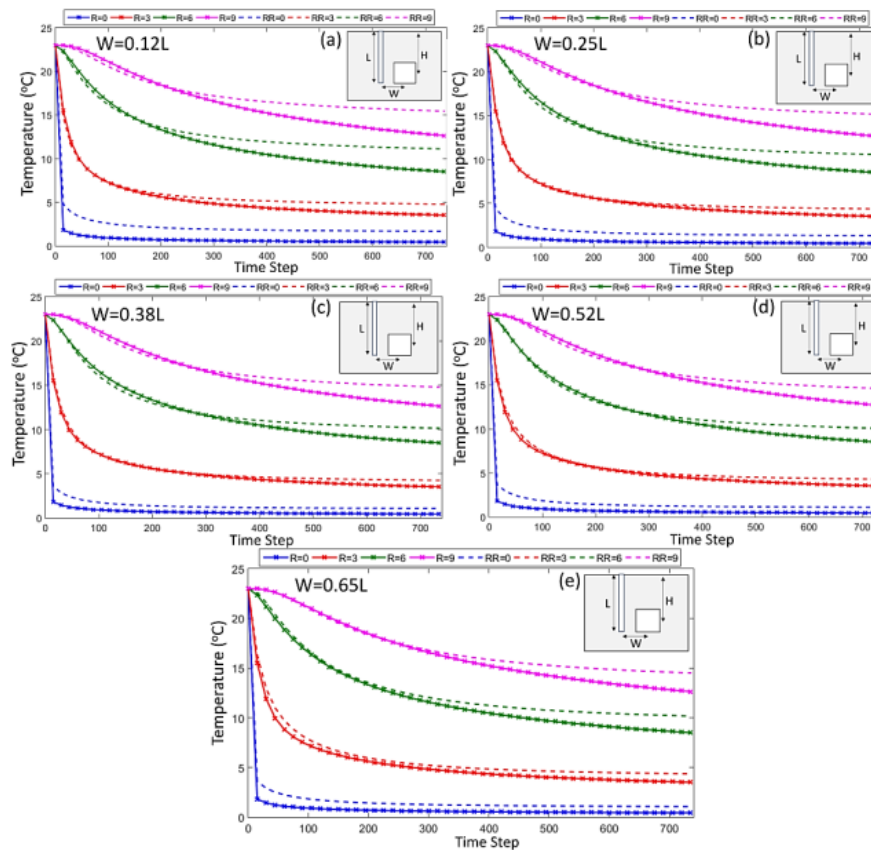
**Table 1. The geometric specifications of the soil environment and inhomogeneity [7].**

Model	Dr(%)	Temp( $^{\circ}\text{C}$ )	$\rho$	k	$\sigma$
Soil	80	23	2148	2.5	1350
Rock	-	23	2568	0.034	1532

inhomogeneity remains at higher temperatures, and heat flux flows from the inhomogeneity toward the surrounding soil, which is now at a lower temperature. This effect is more pronounced at a distance of 6 meters from the freezing pipe ( $RR=6$ ), where conditions are identical only up to time step 200. With the inhomogeneity distance increased to  $W=0.25L$  in Figure (3-b), near the freezing pipe ( $RR=0$ ), the effects of inhomogeneity are reduced by 10% compared to the previous case, and the presence of inhomogeneity shows a lesser impact on the final freezing value. This effect is also noticeable at evaluation points 3 meters ( $RR=3$ ) and 6 meters ( $RR=6$ ) away.

Figure (4) presents temperature variations along the centerline of the freezing pipe at distances of 0.1, 3, 6, and 9 meters from the freezing pipe in the presence of a circular subsurface inhomogeneity. Figure (4-a) shows the variation results for the case where the distance of the inhomogeneity from the freezing pipe is set to  $W=0.12L$ . According to this figure, at points close to the freezing pipe ( $RR=0$ ), the circular inhomogeneity causes the final temperature to converge to higher values around  $4^{\circ}\text{C}$ , whereas in the absence of inhomogeneity, the temperature in these points approaches near  $0^{\circ}\text{C}$ . Compared to the square-shaped, it can be observed that the circular shape has a more adverse effect on freezing development, as in the square inhomogeneity case, the temperature reaches lower values around  $2.5^{\circ}\text{C}$ , which is approximately 40% lower than the final temperature with a circular cross-section inhomogeneity. This behavior is also observable at other evaluation points at distances of 3, 6, and 9 meters. The more adverse effect of circular inhomogeneity compared to square shape on freezing development can be justified by the fact that the second-order geometry of a circle distributes temperature uniformly in all directions. At a given time, as the freezing zone radius develops around the freezing pipe, due to its lower thermal conductivity, the inhomogeneity acts as a heat source, and its circular shape distributes heat uniformly to the surrounding areas.

In contrast, in sharp corner geometries, heat distribution is maximal at the centers of the sides and minimal at the corners. Therefore, heat distributes more effectively around rounded-corner inhomogeneity, further reducing the quality of artificial ground freezing. By increasing the inhomogeneity distance to  $W=0.25L$  in Figure (4-b), it can be seen that the effect of inhomogeneity on temperature variations at points 0.1 and 3 meters away is reduced. In Figures (4-c) to (4-e), it



**Fig. 3. Comparison of temperature variations along the freezing pipe axis at different distances when a square inhomogeneity is located at distances of: a)  $W=0.12L$ , b)  $W=0.25L$ , c)  $W=0.38L$ , d)  $W=0.52L$ , and e)  $W=0.65L$  from the freezing pipe. In this figure, the curves labeled R=0 to R=9 correspond to temperature variations in the absence of heterogeneity, while the curves labeled RR=0 to RR=9 correspond to temperature variations in the presence of inhomogeneity.**

can be observed that the effects of inhomogeneity persist even when its distance from the freezing pipe reaches  $W=0.65L$ , affecting the results at distances of 3 to 9 meters, with its intensity decreasing at a slow rate.

### 5- Conclusions

The results of this research indicate that the hybrid method provides an optimal approach for modeling the artificial ground freezing phenomenon in soil and is capable of being applied to solve various problems involving complex geometries and subsurface heterogeneities. Ultimately, the findings of parametric studies can be summarized as follows:

The geometry of artificial ground freezing development takes the form of a bubble, which narrows at the top due to heat exchange with the ground surface boundary, while having the greatest volumetric influence at the center. This observation aligns well with results from previous laboratory studies and numerical modeling.

The presence of subsurface inhomogeneity, in the form of an unsaturated rock mass, reduces the effective radius of artificial ground freezing in the soil. This can be justified

because the low thermal conductivity of the unsaturated rock mass creates a region with positive heat flux from the rock mass toward the surrounding soil, thereby reducing the freezing zone radius.

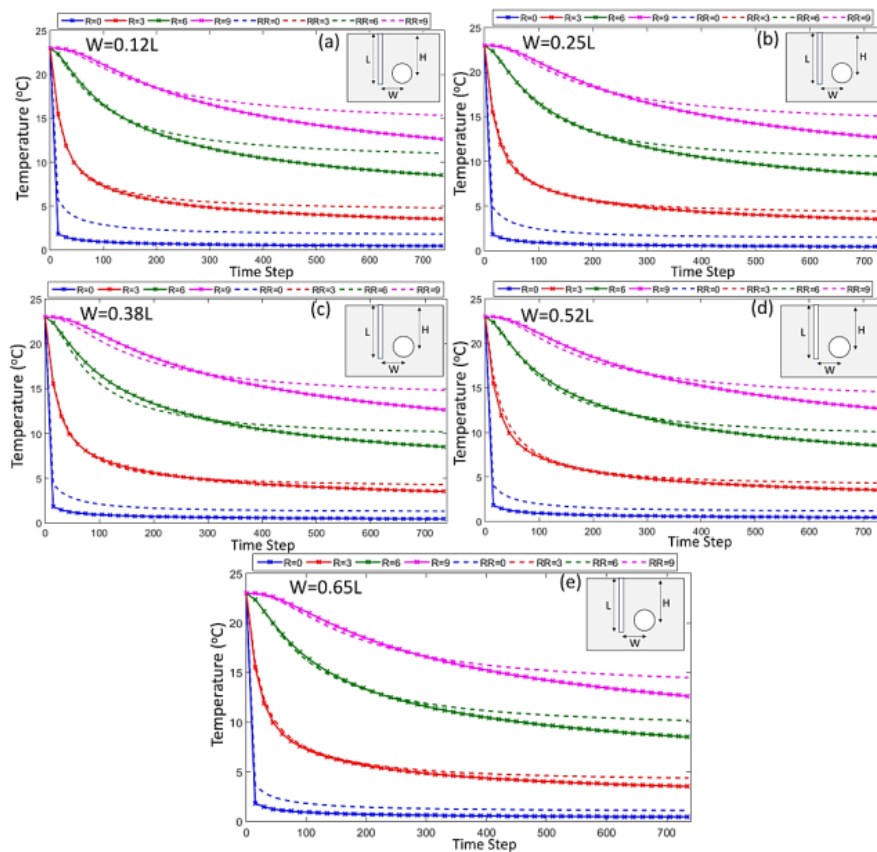
In the presence of square-shaped inhomogeneity, the influence radius decreases by an average of 15%, while for circular-shaped inhomogeneity, it decreases by up to 20%.

According to the research findings, the minimum distance between the freezing pipe and the inhomogeneity that has the least effect on the freezing influence radius is estimated to be  $W=0.52L$  (where  $L$  is the length of the freezing pipe).

Circular-shaped inhomogeneity demonstrates more adverse effects on freezing development around the freezing pipe compared to square-shaped inhomogeneity, indicating the negative impact of rounded-corner rock masses on the quality of ground freezing.

### References

- [1] P.G. Nicholson, *Soil Improvement and Ground Modification Methods*, Elsevier, Waltham, MA, USA, 2015, ISBN: 9780124080768.



**Fig. 4. Comparison of temperature variations along the freezing pipe axis at different distances when a circular inhomogeneity is located at distances of: a)  $W=0.12L$ , b)  $W=0.25L$ , c)  $W=0.38L$ , d)  $W=0.52L$ , and e)  $W=0.65L$  from the freezing pipe. In this figure, the curves labeled  $R=0$  to  $R=9$  correspond to temperature variations in the absence of heterogeneity, while the curves labeled  $RR=0$  to  $RR=9$  correspond to temperature variations in the presence of inhomogeneity.**

- [2] O.B. Andersland, B. Ladanyi, *An Introduction to Frozen Ground Engineering*, Springer Science-Business Media Dordrecht, Chapman & Hall, 1994, ISBN: 9781475722925.
- [3] M.M. Zhou, G. Meschke, *Ground Improvement and Geosynthetics*, Chapter: Numerical Modeling of Artificial Ground Freezing: Multiphase Modeling and Strength Upscaling, American Society of Civil Engineers, (2014) 209-219.
- [4] M. Alzoubi, M. Xu, F. Hassani, S. Poncet, A.P. Sasmito, *Artificial ground freezing: A review of thermal and hydraulic aspects*, *Tunnelling and Underground Space Technology*, 104 (2020) 103534.
- [5] Zh. Ren, J. Liu, H. Jiang, E. Wang, *Experimental study and simulation for unfrozen water and compressive strength of frozen soil based on artificial freezing technology*, *Cold Regions Science and Technology*, 205 (2023) 103711.
- [6] J. Dominguez, *Boundary Element in Dynamics*, Computational Mechanics Publications, 1993, ISBN: 1562521829.
- [7] T. Carpenter, *Thermal Properties of Dry and Saturated Soils*, Master's Thesis, University of Tennessee, Knoxville, USA, 2019.



## ارائه یک مدل هیبرید مرزی-محدود جهت مدلسازی توسعه انجماد مصنوعی در محیط خاک شامل ناهمگنی سنگی

بهمن انصاری<sup>\*</sup>، علیرضا فیروزفر

گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران.

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۴/۰۶/۲۷  
بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۱۸  
پذیرش: ۱۴۰۴/۱۲/۰۲  
ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۱۲/۱۱

### کلمات کلیدی:

انجماد مصنوعی خاک  
مدلسازی عددی  
روش هیبرید  
ناهمگنی دایره‌ای و مربعی  
روش مرزی-محدود

**خلاصه:** در این تحقیق یک روش عددی موسوم به روش هیبرید مرزی-محدود برای مدلسازی فرآیند توسعه انجماد مصنوعی در خاک شامل ناهمگنی زیرسطحی پیشنهاد شده است. در این راستا با ترکیب روش اجزای مرزی و روش اجزای محدود و با استفاده از حل‌های اساسی مستقل از زمان، معادلات مرزی-حجمی منطبق بر مسئله انجماد مصنوعی توسعه داده شده است. در ادامه نوعی از المان مرزی-محدود مرکب از المان مرزی درجه دوم و المان محدود سه گره‌ای-مثلثی توسعه داده شده و روابط لازم برای بکارگیری آن در فرآیند حل شرح داده شده است. سپس با وارد کردن روابط و روش توسعه داده شده در یک کد محاسبات، با حل چندین مثال صحت‌سنجی دقت کد مزبور مورد ارزیابی قرار گرفته است. در نهایت نیز در یک مطالعه پارامتریک نحوه استفاده از روش مرزی-محدود برای مدلسازی توسعه انجماد مصنوعی در خاک که شامل ناهمگنی زیرسطحی از جنس توده سنگ غیر اشباع است شرح داده شده و اثر شکل ناهمگنی و همچنین فاصله آن از میله انجماد ارزیابی شده است. نتایج مطالعات پارامتریک نشان داده است که حضور ناهمگنی موجب کاهش حجم حباب انجماد تا ۲۰ درصد شده و ناهمگنی با سطح گردگوشه اثرات نامطلوب‌تری بر توسعه انجماد مصنوعی در مقایسه با ناهمگنی با سطح تیزگوشه دارد.

### ۱- مقدمه

بصورت عمومی انجماد در محیط‌های خاک و سنگ را می‌توان در دو حیطه انجماد طبیعی و انجماد مصنوعی تقسیم‌بندی نمود [۱]. انجماد طبیعی به دلیل تغییرات آب و هوا و ایجاد چرخه‌های ذوب و یخبندان متوالی بخصوص در طول دوره فصل سرد سال اتفاق می‌افتد. این فرآیند عمدتاً لایه‌های سطحی خاک را شامل شده و به جز نواحی قطبی به ندرت به اعماق بیش از ۱۰ متر از سطح زمین نفوذ می‌کند. با این حال اثرات جانبی ناشی از انجماد شامل چرخه‌های انقباض-انبساط، تغییر حجم خاک تا بیش از ۹ درصد و هوازگی زیرساخت‌ها از جمله مواردی هستند که موجب اهمیت پدیده انجماد در مناطق مختلف جغرافیایی به ویژه در فصول سرد سال می‌شود [۲]. با وجود این، انجماد طبیعی در مناطق نزدیک قطبین زمین که دمای هوا همواره در طول سال زیر صفر درجه سلسیوس است بسیار اهمیت دارد و محققان بسیاری به بررسی نحوه انتشار آن در بدنه خاک پرداخته‌اند [۱-۳]. در سوی دیگر انجماد مصنوعی قرار دارد که بصورت بشرساخت، به کمک

تجهیزات کاهش دهنده دما در خاک انجام می‌شود. هدف از این نوع انجماد عمدتاً بهسازی و مقاوم‌سازی موقت بخشی از بدنه ضعیف و کمتر باربر خاک است بطوریکه با منجمد سازی و اتصال مقاوم‌تر دانه‌های خاک این امکان فراهم می‌شود تا بدنه خاک بصورت مستحکم‌تری در برابر بارهای وارده از خود مقاومت نشان دهد. این نوع انجماد در مقاوم‌سازی موقت شیب‌ها، دیواره‌ها و تونل‌های زیرسطحی بسیار مورد استفاده قرار گرفته و گزارشات فراوانی از اثربخشی آن ارائه شده است [۲و۱]. عمده مطالعات صورت گرفته، روش‌های آزمایشگاهی و اندازه‌گیری محلی را به عنوان تنها روش‌های بهینه در مطالعه انجماد مصنوعی بخصوص در پروژه‌های مقاوم‌سازی دیواره تونل‌های زیرسطحی و گودبرداری‌ها توصیه می‌کنند. کاسینی و همکاران (۲۰۱۶) با انجام مطالعات آزمایشگاهی انجماد مصنوعی بر روی خاکستر آتشفشانی که بصورت طبیعی در طی احداث تونل ناپولی جمع آوری شده بود، توانستند ارتباط مستقیمی بین مشخصات مکانیکی و ترمودینامیکی این نوع خاک برحسب تغییرات دما برقرار نمایند [۴]. هو و همکاران (۲۰۱۸) در یک مطالعه محلی پروسه و نحوه تغییرات شعاع انجماد مصنوعی را در

<sup>\*</sup> نویسنده عهده‌دار مکاتبات: Ansari.Bahman@znu.ac.ir



منجمد بوده است [۲۱]. اخیراً نیز لو و همکاران (۲۰۲۵) یک مدل سه‌بعدی بهبودیافته ترمومکانیکی کوپل توسعه داده‌اند که به واسطه آن می‌توان نحوه توسعه لندهای یخی، تغییرات فازی و تغییرحجم خاک حین انجماد را تخمین زد [۲۲].

با مروری بر ادبیات فنی روش‌های مدلسازی پدیده انتشار انجماد در خاک می‌توان دریافت که معادله انتشار گرما در خاک از اساسی‌ترین معادلات حاکم جهت مدلسازی این پدیده است و محققان مختلف سعی در تکمیل و تدقیق این معادله با افزودن جملات مرتبط با اثر لندهای یخی، تغییرات فاز و اثرات ناهمگنی زیرسطحی دارند. در این تحقیق برای نخستین بار با ترکیب روش اجزای مرزی با ایده تقابل دوگانه و روش اجزای محدود با المان‌های مثلثی و توابع شکل قابل ارتقاء یک روش هیبرید برای حل معادله انتشار حرارت در بدنه خاک پیشنهاد شده است. توسعه این نوع روش هیبرید از آن جهت اهمیت دارد که به دلیل ماهیت مرزی روش، امکان مدلسازی مرزهای دوردست و همچنین اعمال شرایط مرزی، ساده‌تر شده و از طرف دیگر روش اجزای محدود با المان‌های قابل ارتقاء که برای اولین بار در روش اجزای مرزی-محدود بکار رفته، این امکان را فراهم می‌کند تا دقت محاسبات در مسائل پیچیده افزایش یابد. از این‌رو مهمترین هدف و دستاورد این تحقیق توسعه و معرفی یک روش محاسباتی ساده و دقیق جهت مدلسازی مسئله انتشار حرارت و انجماد مصنوعی در خاک است که بر خلاف روش‌های مرزی-محدود مرسوم از یک سیستم یکپارچه مدلسازی و حل معادلات در محیط‌های چند لایه بهره می‌برد. در طی این روند با بکارگیری همزمان روش اجزای مرزی برای بستن مرزهای دور دست و روش اجزای محدود برای المان‌بندی نواحی مرتبط با پدیده انجماد مصنوعی و استفاده از المانهای محدود با چگالی بالاتر در این نواحی، دقت و سرعت مدلسازی عددی افزایش داده شده است. سپس به کمک معادلات مزبور اثرات ناهمگنی زیرسطحی بر توسعه پدیده انجماد مصنوعی مطالعه شده است. برای این منظور پس از توسعه فرمولبندی روش، با بکارگیری آن در یک کد محاسباتی در محیط متلب، صحت آن با حل چندین مثال با پاسخ‌های موجود مورد ارزیابی قرار گرفته است. سپس با استفاده از آن یک محیط ناهمگن خاک تحت انجماد مصنوعی مدلسازی شده و اثرات ناشی از سطح مقطع و فاصله ناهمگنی‌های زیرسطحی بر نحوه انتشار انجماد در خاک ارزیابی شده است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که روش هیبرید یک روش دقیق جهت مدلسازی انجماد در محیط‌های بینهایت خاک است و می‌توان از آن برای مدلسازی مسائل با هندسه و شرایط پیچیده بصورت بهینه‌ای بهره برد.

هنگام ساخت و راه اندازی تونل متروی نانجیانگ ۲ ارائه نمودند [۵]. جودیه و همکاران (۲۰۲۴) اثرات فشار سربار و تغییرات آن را بر روی نحوه گسترش لندهای یخی در خاک مطالعه نموده و مشاهده نمودند که عمده مشخصات خاک شامل چگالی، تخلخل و مشخصات هیدرولیکی خاک در حین انجماد مصنوعی به صورت عمده‌ای تغییر می‌یابد [۶]. اخیراً نیز یک روش انجماد مصنوعی سریع توسط لیو و همکاران (۲۰۲۰) معرفی شده است که در آن تزریق سریع گاز سرد به درون خاک موجب می‌شود تا انجماد مصنوعی در خاک بسرعت توسعه یابد [۷]. این محققان با انجام مطالعات آزمایشگاهی و محلی نحوه اثر بخشی این روش و شعاع انجماد در این روش را با روش‌های پیشین مقایسه نمودند. با وجود اینکه روش‌های آزمایشگاهی و اندازه‌گیری محلی از دقت بالایی در بررسی پدیده انجماد برخوردار هستند، استفاده از آنها به دلیل نیاز به تجهیزات، نیروی متخصص و هزینه بالا همواره و بخصوص در مراحل امکان‌سنجی یک پروژه مقرون بصرفه نیست. به منظور رفع این دست‌مشکلات محققان بسیاری مدلسازی ریاضی پدیده انجماد را به عنوان مکملی بر روش‌های آزمایشگاهی توصیه کرده‌اند. برای مثال ژو و همکاران (۲۰۱۴) نحوه استفاده از روش اجزای محدود را در مدلسازی معادلات انتشار گرمای توصیف نموده و یک مدل سه فازی شامل خاک، آب و لندهای یخی توسعه دادند [۸]. آرزویی و همکاران (۲۰۲۰) در یک مطالعه مروری انواع روش‌های مدلسازی پدیده انتشار انجماد مصنوعی را معرفی نمودند. طبق نتایج این تحقیق، مطالعات مربوط به مدلسازی پدیده انجماد در خاک بسیار محدود بوده و مدل‌های موجود توانایی اعمال بر تمامی شرایط پیچیده حاکم بر پدیده انجماد را ندارند [۹]. یکی از مسائل مهم در پدیده انتشار انجماد در خاک ایجاد لندهای یخی می‌باشد. این پدیده موجب تغییر مشخصات ترمودینامیک خاک می‌شود. رن و همکاران (۲۰۲۳) از یک مدل مبتنی بر یادگیری ماشین برای ارزیابی و پیشبینی نحوه شکل‌گیری لندهای یخی در خاک استفاده نمودند و نتایج خود را با نتایج آزمایشگاهی و محلی در دسترس مقایسه کردند [۱۰]. آیو و همکاران (۲۰۲۴) با استفاده از نرم افزار فلک سه‌بعدی یک نوع المان جدید توسعه دادند تا به واسطه آن بتوان اثرات تغییر حجم خاک در چرخه‌های ذوب و یخبندان مصنوعی خاک را تخمین زد [۲۰]. گونگ و همکاران (۲۰۲۵) یک مدل عددی چند فازی را برای مدلسازی نحوه توسعه انجماد مصنوعی در اطراف تونل‌های زیرزمینی توسعه دادند و نتایج روش را با داده‌های حاصل از عملیات انجماد مصنوعی جهت احداث تونل‌های متروی هوهای واقع در کشور چین مقایسه نمودند. این مقایسه حاکی از دقت بالای روش عددی در تخمین شعاع نواحی

## ۲- روش‌ها

و  $T^*$  و  $q^*$  حل‌های اساسی دما و شار هستند که مطابق روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$T^* = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \quad (۴)$$

$$q^* = -\frac{1}{2\pi r^2} [(x-\xi).n_x + (y-\eta).n_y] \quad (۵)$$

در روابط فوق  $(x, y)$  مختصه نقطه میدان و  $(\xi, \eta)$  مختصه نقطه منبع گرما بوده و  $r$  فاصله مستقیم بین نقطه میدان و نقطه منبع گرما است. با توجه به رابطه (۳) انتگرال‌های سمت چپ همگی بر روی مرزهای محیط تحت مطالعه،  $\Gamma$  قابل اعمال هستند و  $c^i$  معرف یک ثابت است که برای نقاط درونی برابر ۱، برای گره‌های مرزی با مرزهای صاف برابر ۰/۵ و برای سایر گره‌های مرزی واقع بر نقاط شکستگی طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$c^i = \frac{\theta}{2\pi} \quad (۶)$$

که در آن  $\theta$  زاویه کوچک‌تر بین المان‌های مرزی در محل شکستگی مرزی است. به منظور حل معادله مرزی-محدود رابطه (۳) از روش اجزای مرزی برای سمت چپ معادله و از روش اجزای محدود برای سمت راست معادله استفاده می‌شود. مطابق با شکل (۱) که معرف یک المان مرزی-محدود است، تابع تقریب بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$T^e(x, y) = \sum_{i=1}^3 f_i(x, y).T_i \quad (۷)$$

که در تابع فوق  $T_i$  مقادیر دمای موجود بر روی گره  $i$ ام المان مرزی-محدود طبق شکل (۱) است. لازم به توضیح است که بکارگیری تابع تقریب به شکل رابطه (۷) بدین معناست که دما در راستای مرزها مسئله با المانهای درجه دوم توزیع می‌شود حال آنکه در حجم مسئله توزیع دما به کمک المان‌های مثلثی سه‌نقطه مطابق با شکل (۱) انجام خواهد شد. در رابطه (۷) مقادیر  $f_i$  تابع شکل هستند که بر حسب مختصات گره‌های المان

در این بخش ابتدا معادله انتشار گرما (معادله اساسی فوریه) به عنوان پایه و اساس مدل‌سازی پدیده انجماد معرفی می‌گردد. سپس با توسعه و ترکیب روش اجزای مرزی و اجزای محدود یک روش نوین جهت مدل‌سازی انجماد در خاک ارائه شده و با بکارگیری آن در یک کد محاسباتی، صحت آن با حل چندین مثال با پاسخ‌های از قبل در دسترس مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

### ۲-۱ توسعه روش هیبرید مرزی-محدود

معادله انتشار گرما در یک میله نامحدود اولین بار توسط فوریه توسعه داده شده است. با توسعه معادله مزبور برای محیط دوبعدی می‌توان معادله‌ای به شکل زیر ارائه نمود [۱ و ۲]:

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) = \sigma\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۱)$$

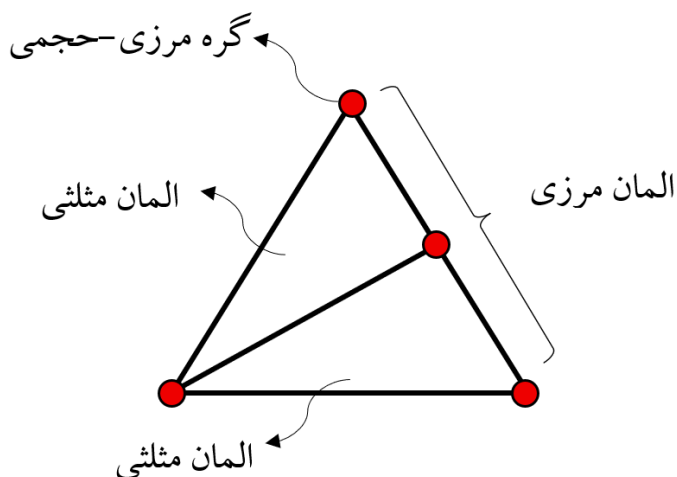
که در آن  $k$ ،  $\sigma$  و  $\rho$  به ترتیب ضریب هدایت گرمایی، ظرفیت گرمایی ویژه و چگالی محیط تحت مطالعه هستند. همچنین در این معادله تغییرات دما در واحد سطح بصورت تابعی از زمان  $(t)$  است. با بکارگیری روش باقیمانده‌های وزن‌دار و ضرب یک تابع وزن به طرفین معادله (۱)، سپس انتگرال‌گیری آن بر روی کل دامنه محاسباتی، معادله زیر قابل استخراج است [۱۱]:

$$\int_{\Omega} \left[ k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) - \sigma\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right] T^* d\Omega \quad (۲)$$

که در آن  $d\Omega$  جزء دامنه محاسباتی و  $T^*$  تابع وزن است. با انتخاب تابع وزن بصورت حل‌های اساسی یک محیط استاتیکی و اعمال تئوری تقابل دوطرفه بتی-ماکسول [۱۱ و ۱۲] بر معادله (۲) در نهایت معادله حجمی-مرزی زیر حاصل می‌شود:

$$c^i T^i + \int_{\Gamma} q^* . T d\Gamma - \int_{\Gamma} T^* . q d\Gamma = \frac{\sigma\rho}{k} \int_{\Omega} T^* . \dot{T} d\Omega \quad (۳)$$

که در آن  $T$  و  $q$  به ترتیب دما و شار گرمایی در محیط تحت مطالعه



شکل ۱. نمایی از المان مرزی-محدود جهت گسسته‌سازی محیط دوبعدی خاک. المان‌های مرزی بصورت درجه دوم با استفاده از سه گره مجزاء و المان‌های درونی بصورت مثلثی با سه گره رأسی تعریف شده‌اند.

**Fig. 1. Boundary–finite element used for discretizing the two-dimensional soil medium. The boundary elements are defined as second-order elements using three separate nodes, and the internal elements are defined as triangular elements with three vertex nodes**

لازم به توضیح است که در استخراج رابطه انتگرالی (۹) برای گسسته‌سازی مرزی‌های مسئله از  $NE$  المان مرزی درجه دوم و برای گسسته‌سازی دامنه مسئله از  $NI$  المان مثلثی بهره گرفته شده است. می‌توان رابطه انتگرالی (۹) را بصورت ماتریسی و خلاصه شده بصورت زیر نیز نمایش داد:

$$[H]\{T\} + [G]\{q\} = [I]\{\dot{T}\} \quad (10)$$

که در آن  $[H]$ ،  $[G]$  و  $[I]$  به ترتیب ماتریس ضرایب متناظر با بردارهای دما  $\{T\}$ ، شار  $\{q\}$  و سرعت انتشار  $\{\dot{T}\}$  هستند. به منظور حل گام به گام زمانی رابطه (۱۰) نیاز است تا عبارت  $\{\dot{T}\}$  بصورت عددی گسسته‌سازی شود. در این راستا روش‌هایی نظیر روش بتای نیومارک [۱۷]، روش هوبل [۱۸]، روش تتای ویلسون [۱۹] و روش تفاضل محدود [۲۰] بکار رفته است. با بررسی‌های صورت گرفته مشخص شد که روش بتای نیومارک، روش هوبل و روش تتای ویلسون در مسائل مرتبط با مشتق مرتبه دوم زمان نتایج مناسبی ارائه می‌نمایند درحالی‌که این روش‌ها برای مسائل

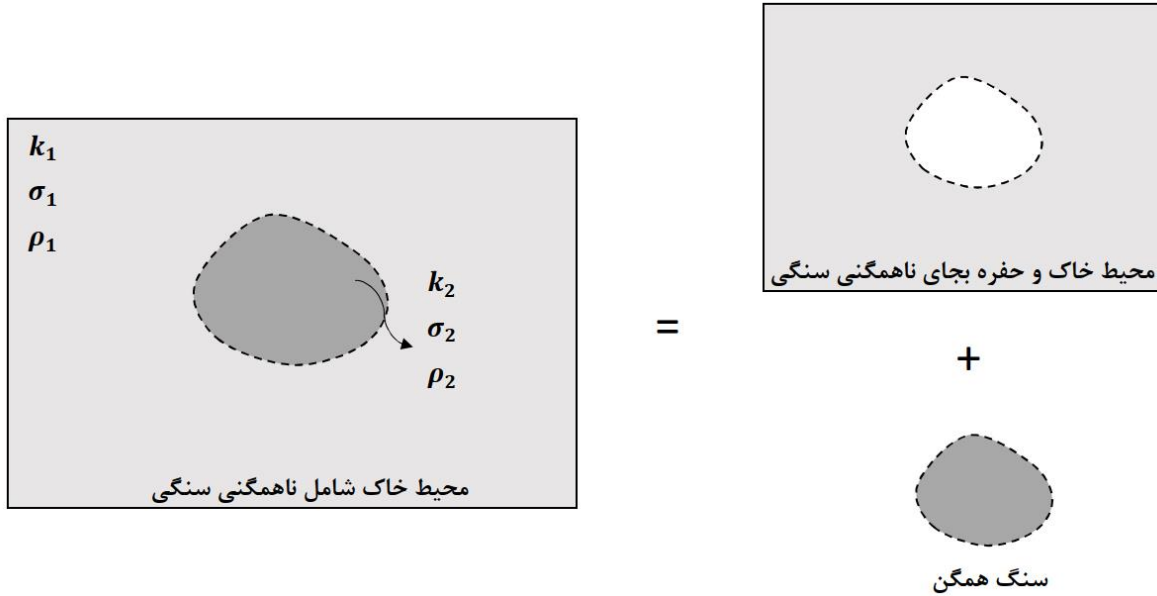
$(x_i, y_i)$  مطابق روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2 + (y_2 - y_3)x - (x_2 - x_3)y}{x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2} \\ f_2 &= \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3 - (y_1 - y_3)x - (x_1 - x_3)y}{x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2} \\ f_3 &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1 + (y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y}{x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_3 - x_3 y_2} \end{aligned} \quad (8)$$

با جایگذاری رابطه تقریبی (۷) با لحاظ داشتن اثرات توابع شکل (۸) در معادله انتگرالی (۳)، در نهایت معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} c^i T^i + \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} q^* f d\Gamma_j [T] \\ - \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} T^* f d\Gamma_j [q] = \\ \frac{\sigma \rho}{k} \sum_{j=1}^{NI} \int_{\Omega_j} T^* f d\Omega_j [\dot{T}] \end{aligned} \quad (9)$$

1. Newmark-Beta Method
2. Houbolt Method
3. Wilson Theta Method
4. Finite Difference Method



شکل ۲. تفکیک مدل خاک در حضور ناهمگنی زیرسطحی به دو مدل مجزاء ساده شده شامل مدل خاک و حفره بجای ناهمگنی و مدل سنگ همگن.

**Fig. 2. Separation of the soil model in the presence of subsurface heterogeneity into two simplified, separate models consisting of a soil model with a cavity instead of the heterogeneity, and a homogeneous rock model.**

که مسئله اول شامل تنها محیط همگن خاک با وجود یک حفره زیرسطحی به جای ناهمگنی سنگی و مسئله دوم شامل سنگ همگن بصورت یک محیط مجزاء است. برای مسئله اول می توان معادلات تعادل منطبق بر رابطه (۱۰) به شکل زیر ارائه نمود:

$$[H_{11} \quad H_{12}] \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \end{Bmatrix} + [G_{11} \quad G_{12}] \begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \end{Bmatrix} = [I_{11}] \dot{T}_{11} \quad (12)$$

که در آن پارامترهای با اندیس ۱۱ مربوط به المانهای مرزی و حجمی محیط خاک بوده و پارامترهایی با اندیس ۱۲ مرتبط با گرههای مرزی فصل مشترک بین محیط خاک و ناهمگنی زیرسطحی هستند. به ترتیب مشابه می توان برای محیط دوم که شامل ناهمگنی محدود است معادلات تعادل به شکل زیر استخراج نمود:

$$[H_{21} \quad H_{22}] \begin{Bmatrix} T_{21} \\ T_{22} \end{Bmatrix} + [G_{21} \quad G_{22}] \begin{Bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \end{Bmatrix} = [I_{22}] \dot{T}_{22} \quad (13)$$

مرتبط با مشتق اول زمان که در معادلات انتشار حرارت نیز دیده می شود، در مقایسه با روش تفاضل محدود از دقت پایین تری برخوردارند. بنابراین در این تحقیق از روش تفاضل محدود جهت گسسته سازی محور زمان استفاده می شود. در این راستا تغییرات دما و شار در تکه های گسسته زمانی بصورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\{T\}_{t+\Delta t} = \frac{\{T\}_{t+\Delta t} - \{T\}_t}{\Delta t} \quad (11)$$

در رابطه فوق  $\{T\}_t$  و  $\{T\}_{t+\Delta t}$  به ترتیب دمای محیط تحت مطالعه در گام زمانی فعلی و گام زمانی قبلی بوده و  $\Delta t$  طول گام زمانی است.

## ۲-۲- مدل سازی ناهمگنی زیرسطحی

به منظور مدل سازی ناهمگنی زیرسطحی می توان از معادلات توسعه داده شده در بخش قبل استفاده نمود. در این راستا و طبق شکل (۲) مسئله ناهمگنی سنگی در خاک به دو مسئله مجزاء تقسیم می شود، بدین صورت

سه مثال صحت‌سنجی با پاسخ‌های تحلیلی از پیش در دسترس استفاده شده است. در شکل (۳) نتایج مدل‌سازی عددی و نتایج تحلیلی با یکدیگر مقایسه شده است. بر اساس شکل (۳-الف) یک محیط محدود به شکل مربع با طول ضلع ۳ متر و دمای اولیه ۳۰ درجه سلسیوس تحت شوک گرمایی در دیواره خود قرار گرفته است بطوریکه دما به ناگهان از طریق دیوارها به صفر درجه سلسیوس می‌رسد. براچ و زیوولوسکی (۱۹۷۴) [۱۳] یک پاسخ تحلیلی برای تغییرات دما در مرکز مربع بر حسب زمان ارائه نموده‌اند. به منظور مدل‌سازی این مسئله به کمک روش هیبرید، از ۸ المان مرزی-محدود استفاده شده است که شامل ۴ المان مرزی درجه دوم و ۸ المان مثلثی مشابه شکل (۱) است. مشخصات ترمودینامیکی دامنه محیط منطبق بر شکل (۳-الف) بگونه‌ای انتخاب شده تا نسبت  $k / \sigma \rho$  برابر ۱/۲۵ برقرار گردد. شرایط مرزی بصورت دمای صفر درجه بر گره‌های المان مرزی درجه دوم اعمال شده است. همچنین شرایط اولیه مسئله بصورت دمای اولیه ۳۰ درجه به تمامی گره‌های مرزی و دورنی اعمال گشته است. به منظور گسسته‌سازی محور زمان از ۲۵ گام زمانی هر یک بطول ۰/۱ ثانیه بهره گرفته شده است. به منظور استخراج نتایج تغییرات دما در مرکز مربع یک نقطه درونی در مرکز مربع تعریف شده تا تغییرات دما برای این نقطه در روند حل حاصل گردد. با مقایسه نتایج حاصل از مدل‌سازی در مرکز مربع و نتایج تحلیلی براچ و زیوولوسکی (۱۹۷۴) [۱۳] در شکل (۳-الف) دیده می‌شود که نتایج عددی از انطباق مناسبی با نتایج تحلیلی برخوردار است. به منظور مشاهده دقت کد توسعه داده شده در تخمین تغییرات دما در مرزهای مسئله بخصوص در نقاط گوشه که شار گرمایی به سمت بینهایت میل می‌کند سه نقطه A، B و C منطبق بر شکل (۳-ب) بر روی مرزهای یک مربع که تحت شوک گرمایی قرار دارد فرض شده است. در این مسئله طول ضلع مربع ۱ متر و شرایط اولیه شامل دمای اولیه ۱ درجه بر روی گره‌های مرزی و دورنی در نظر گرفته شده تا نتایج حاصل قابلیت مقایسه با روش تحلیلی روبل و همکاران (۱۹۸۶) [۱۴] را داشته باشد. گسسته‌سازی در این مثال با ۱۶ المان مرزی-محدود شامل ۸ المان مرزی و ۱۶ المان مثلثی انجام شده و ۱۶ گام زمانی به طول ۰/۱ برای گسسته‌سازی محور زمان بهره گرفته شده است. با مقایسه نتایج روبل و همکاران (۱۹۸۶) [۱۴] و نتایج حاصل از کد محاسباتی در شکل (۳-ب) دقت بالای روش هیبرید در تخمین تغییرات دما در نقاط مرزی و گوشه‌ها قابل مشاهده است. به منظور ارزیابی دقت روش هیبرید در مدل‌سازی تغییرات دما در اجسام گرد گوشه نظیر هندسه‌های درجه دوم، در مثال سوم تغییرات دمای مرکز یک دیسک بیضی شکل به قطر کوچک ۱ متر و قطر بزرگ ۲

مشابه‌اً در رابطه فوق پارامترهای با اندیس ۲۱ مربوط به گره‌های مرزی فصل مشترک بین ناهمگنی و محیط خاک بوده و پارامترهای با اندیس ۲۲ مربوط به گره‌ها و المان‌های مرتبط با محیط ناهمگنی هستند. با توجه به اینکه در مرز مشترک بین ناهمگنی و محیط خاک به دلیل تعادل ترمودینامیکی می‌بایست شرایط پیوستگی دما و شار برقرار باشد می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} T_{12} = T_{21} \\ q_{12} + q_{21} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

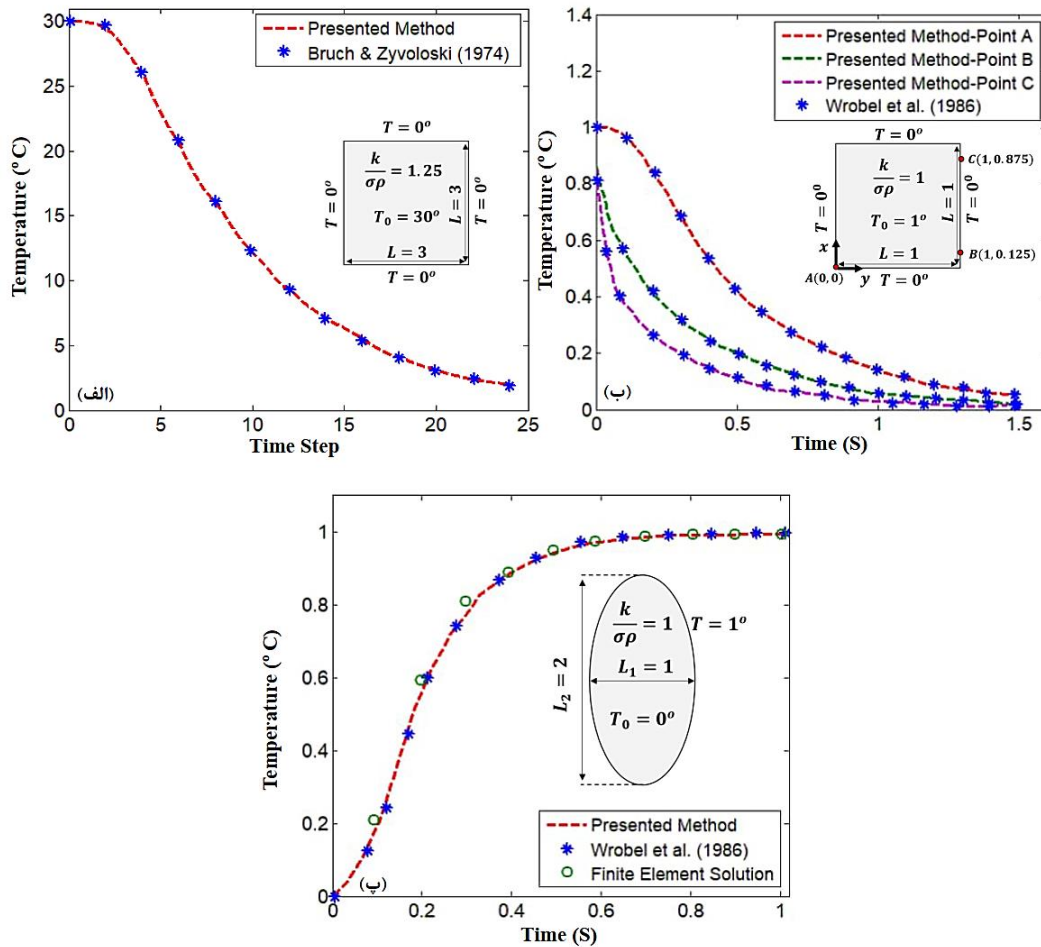
با جایگذاری روابط فوق در روابط (۱۲) و (۱۳) و مرتب‌سازی نتایج در نهایت فرم قابل حل معادلات بشکل زیر قابل استخراج است:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ 0 & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{22} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ 0 & -G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_{11} \\ \dot{T}_{22} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

با حل معادلات فوق مقادیر مجهول شامل دما و شار در نقاط مرزی قابل تعیین است. در نهایت با بکارگیری نتایج حاصل در نقاط گره‌ای می‌توان دما در هر نقطه درونی با مختصات مشخص را تعیین نمود.

### ۲-۳ توسعه کد محاسباتی و صحت‌سنجی

روابط ارائه شده در بخش قبل در قالب یک کد محاسباتی هیبرید با عنوان HybSol بکار گرفته شده است. کد محاسباتی مزبور در زبان برنامه نویسی متلب توسعه داده شده و این امکان فراهم شده است تا بتوان با دریافت مشخصات ترمودینامیکی محیط تحت مطالعه شامل هدایت گرمایی، ظرفیت گرمایی ویژه و چگالی محیط و سپس دریافت مشخصات هندسی محیط شامل مختصات گره‌های مرزی و گره‌های مرتبط با المان‌های مثلثی هندسه‌های پیچیده شامل محیط خاک و ناهمگنی‌های زیرسطحی را مدل‌سازی و تحلیل نمود. به منظور ارزیابی دقت و کارایی کد محاسباتی از



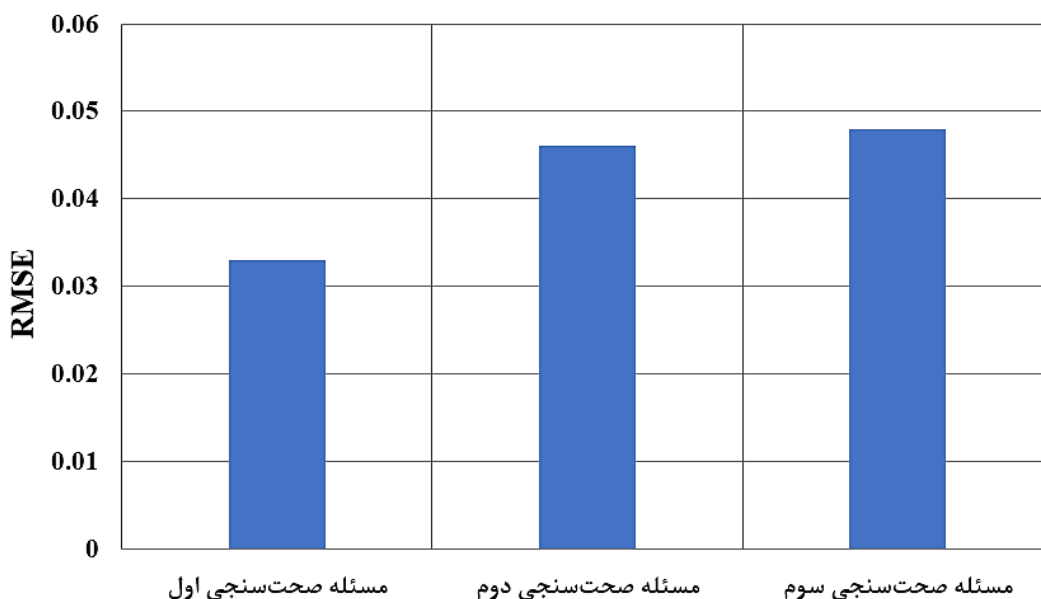
شکل ۳. مقایسه نتایج حاصل از روش هیبرید مرزی-محدود و نتایج روش‌های تحلیلی برای سه مثال مختلف.

Fig. 3. Comparison of the results obtained from the boundary–finite hybrid method with the results of analytical methods for three different examples.

در این مطالعه به منظور ارزیابی دقت خطای نتایج تحلیلی و عددی از پارامتر جذر متوسط مربع خطا (RMSE) استفاده شده است. بر این اساس و به صورت مجزاء برای هر مسئله صحت‌سنجی اختلاف هر مقدار محاسبه شده در هر گام زمانی نسبت به مقدار تحلیل حاصل و در نهایت بصورت جذر مربع متوسط محاسبه شده است. در نمودار شکل (۴) تغییرات RMSE برای هر مثال بصورت عددی ارائه شده است. همانطور که در این شکل نیز مشهود است، خطای متوسط برای هر سه مثال کمتر از ۵ درصد است که مبین دقت مناسب روش هیبرید در محاسبه تغییرات دما در اطراف اشکال هندسی پیچیده است.

متر تحت شوک دمایی در مرز ارزیابی شده است. برای این مدل‌سازی دمای مرزی بیضی ۱ درجه و وضعیت اولیه جسم در دمای صفر درجه لحاظ شده تا نتایج مدل‌سازی عدد با نتایج روبل و همکاران (۱۹۸۶) [۱۵] قابل مقایسه گردد. به منظور مدل‌سازی این مسئله از ۲۰ المان مرزی-محدود شامل ۱۰ المان مرزی درجه دوم و ۲۰ المان مثلثی استفاده شده است. همچنین محور زمان به کمک ۱۰ گام زمانی به طول ۰/۱ ثانیه گسسته شده است. در شکل (۳-پ) نتایج حاصل از روبل و همکاران (۱۹۸۶) [۱۵] با نتایج حاصل از روش اجزای محدود (با ۲۰ المان مثلثی) و روش هیبرید مقایسه شده است. بر اساس این شکل مشخص شده که روش هیبرید از دقت مناسبی جهت مدل‌سازی محیط‌هایی با هندسه درجه دوم برخوردار است.

#### 1. Root Mean Square Error



شکل ۴. تغییرات خطای جذر متوسط مربعات (RMSE) برای کلیه مقادیر تغییرات دما در مسائل صحت‌سنجی.

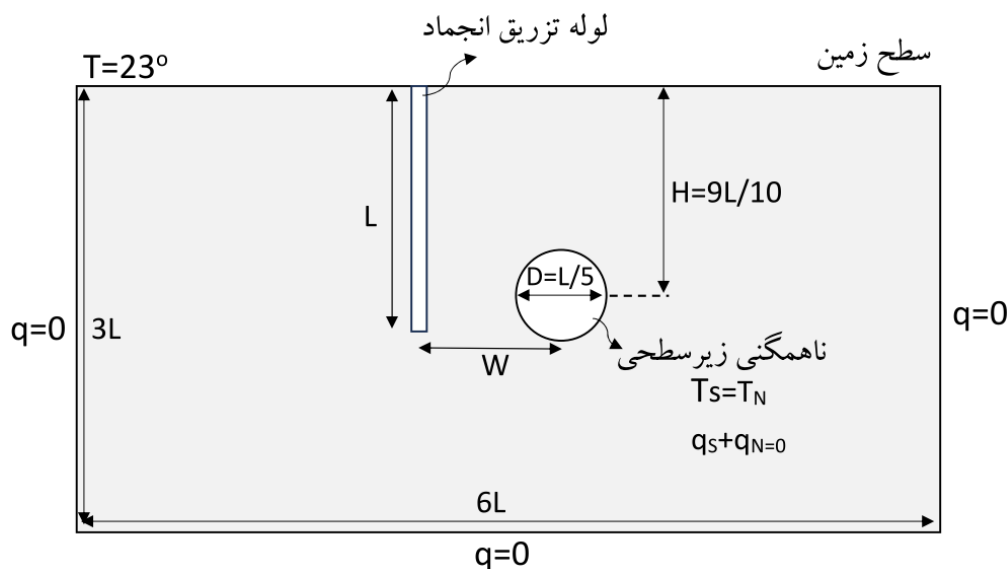
Fig. 4. Variations of the root mean square error (RMSE) for all values of temperature changes in the validation problems.

ثابت برابر صفر درجه سلسیوس مدلسازی می‌شوند. لازم به توضیح است که در لحظه شروع محاسبات تمامی گره‌ها و نقاط مسئله در وضعیت تعادل و در دمای نرمال ۲۳ درجه سلسیوس قرار دارند. پس از شروع تحلیل دمای میله انجماد با استفاده از تابع نمایی به شکل  $T(t) = A(e^{-t/S} - 1)$  در مرزهای آن، کاهش داده می‌شود که در آن A دامنه کاهش و برابر ۲۳ درجه سلسیوس و S نرخ کاهش و معادل ۲۰۰۰ واحد در ثانیه است.

به منظور ارزیابی پارامتریک در گام نخست شکل هندسی ناهمگنی زیرسطحی مورد توجه قرار گرفته است. برای این منظور از ناهمگنی به شکل مربعی و دایره‌ای بهره گرفته شده است تا اثر گوشه‌دار بودن ناهمگنی بر نحوه توزیع دما در محدوده اطراف لوله انجماد ارزیابی شود. در گام دوم فاصله مرکز ناهمگنی از لوله انجماد (W در شکل ۵) مورد توجه قرار گرفته است و هدف بررسی اثر این فاصله بر توسعه انجماد در اطراف میله انجماد و سپس یافتن مقداری برای W است بطوریکه تاثیر ناهمگنی بر توسعه انجماد ثابت و یا حداقل گردد. منطبق بر شکل ۵) طول میله انجماد  $L=15m$  فرض شده است و بر اساس آن بیشترین بعد ناهمگنی (قطر دایره، طول ضلع مربع) برابر  $D=L/5$  و عمق مدفون آن برابر  $H=9L/10$  فرض شده است. در روش هیبرید ارائه شده در این تحقیق بستن مرزهای محیط از طرفین

### ۳- مدلسازی

با توجه به کاربرد کد محاسباتی HybSol در تحلیل انواع محیط‌های ناهمگن خاک با مشخصات هندسی پیچیده، در این بخش یک محیط بینهایت خاک شامل ناهمگنی زیر سطحی بصورت یک توده سنگ غیر اشباع مورد توجه قرار گرفته است. محیط خاک به کمک روش انجماد مصنوعی و بوسیله میله انجماد تحت شوک دمایی تا صفر درجه سلسیوس قرار داده می‌شود. طبق شکل (۵) که نشان دهنده مدل مورد مطالعه است، مشخصات هندسی و شرایط مرزی حاکم بر این محیط ارائه شده است. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود مرز سطح زمین به دلیل تبادل گرمایی با محیط در دمای نرمال ۲۳ درجه سلسیوس قرار دارد. مرزهای جانبی و مرز زیرین مدل به دلیل اتصال به خاک مجاور عاملی بر منبع گرمایی نبوده و بنابراین مشخصات این مرزها از نوع شار صفر در نظر گرفته شده است. همچنین برای مرزهای ناهمگنی از شرایط مرز مشترک بصورت تعادل دمایی و شار استفاده شده است بطوریکه دما در المان مرز مشترک برای محیط خاک ( $T_s$ ) و ناهمگنی ( $T_N$ ) به دلیل شرط پیوستگی برابر و مجهول در نظر گرفته شده و مجموع شار ( $q_s + q_N$ ) در این نقاط به دلیل شرط سازگاری برابر صفر در نظر گرفته شده است. همچنین مرزهای میله انجماد نیز بصورت دمای



شکل ۵. مشخصات هندسی و شرایط مرزی مدل انجماد مصنوعی خاک شامل ناهمگنی زیرسطحی و میله انجمادی به طول  $L$ .

Fig. 5. Geometric characteristics and boundary conditions of the artificial ground freezing model, including subsurface heterogeneity and a freezing pipe of length  $L$ .

این تحقیق نزدیک تر خواهد بود. علاوه بر آن نیاز است تا محیط مسئله کاملاً اشباع در نظر گرفته شود تا پدیده انجماد مصنوعی در خاک موجب اتصال دانه‌های ماسه به یکدیگر شده و یک دیواره انجمادی ایجاد کند. بنابراین در تحقیق حاضر دامنه مسئله از نوع ماسه اوتاوا بصورت متراکم و اشباع در نظر گرفته شده است. کارپنتر (۲۰۱۹) با انجام آزمایشات مختلف مشخصات ترمودینامیکی انواع ماسه اوتاوا و رس در درصدهای تراکم مختلف را ارائه کرده است [۱۶]. بر این اساس جدول (۱) مشخصات ترمودینامیکی ماسه مورد استفاده در این تحقیق را نمایش می‌دهد. علاوه بر این جهت مدلسازی مصالح ناهمگنی زیرسطحی از مشخصات یک توده سنگ غیراشباع مطابق با جدول (۱) استفاده شده است.

یکی از مزیت‌های روش هیبرید مورد استفاده در این تحقیق استفاده همزمان از المان‌های محدود و مرزی در گسسته‌سازی دامنه مسئله و استفاده از تفاضل محدود در گسسته‌سازی محور زمان است، بطوریکه این روش این امکان را فراهم می‌کند تا نقاط نزدیک به محدوده لوله انجمادی و ناهمگنی با تعداد المان‌های محدود بیشتری گسسته‌سازی شوند و با فاصله گرفتن از مرکز مدل به سمت مرزهای مجاور از تعداد المان‌ها کاسته شود. با لحاظ داشتن این مزیت، به منظور مدلسازی عددی از ۲۴۰ المان مثلثی برای گسسته‌سازی دامنه و ۱۲۰ المان مرزی برای گسسته‌سازی مرزها استفاده

می‌بایست بصورت دقیقی انجام گیرد. فواصل لحاظ شده برای بستن محیط از طرفین تابعی از ابعاد و هندسه مدل می‌باشد. به منظور محدود کردن مدل از طرفین به اندازه  $3L$  از سمت راست و چپ و  $3L$  به سمت پایین مدل مرزهای کناری بسته شده است بطوریکه اثرات مرزهای جانبی بر نتایج نهایی کمینه گردد. علت مهم بخصوص در انتخاب ابعاد ناهمگنی بر این عامل استوار است که هدف اصلی در این تحقیق مشاهده اثر شکل ناهمگنی زیرسطحی (مربعی-گوشه‌دار بودن و دایره-گردگوشه بودن) بصورت کوچک مقیاس و کوچکتر از یک چهارم طول لوله انجماد بر روند انجماد بوده است که این امر کارایی روش هیبرید در مدلسازی هندسه‌های ناهمگن کوچک مقیاس را در یک مدل بزرگ اثبات می‌کند. علاوه بر آن این نوع مدلسازی قبلاً در ادبیات فنی مورد بررسی قرار نگرفته است.

در ادبیات فنی مرتبط با علوم مکانیک خاک، ماسه اوتاوا با دانه‌بندی یکنواخت (عبوری از الک شماره ۲۰ و مانده روی الک شماره ۳۰) به عنوان یک ماسه استاندارد شناخته شده است [۱]. این نوع ماسه به دلیل دانه‌بندی یکنواخت، تا حدود زیادی خود متراکم بوده و در وضعیت موجود خود بدون اعمال تلاش و انرژی خارجی تا بالای ۷۰ درصد متراکم است. اثر تراکم بر انجماد از این جهت حائز اهمیت است که خاک ماسه‌ای متراکم هرچه بیشتر همانند یک محیط پیوسته رفتار نموده و به مدل عددی توسعه داده شده در

جدول ۱. مشخصات ترمودینامیکی محیط خاک و ناهمگنی زیرسطحی برگرفته از کارپنتر (۲۰۱۹) [۱۶].

Table 1. Thermodynamic properties of the soil medium and the subsurface heterogeneity, adopted from Carpenter (2019) [16].

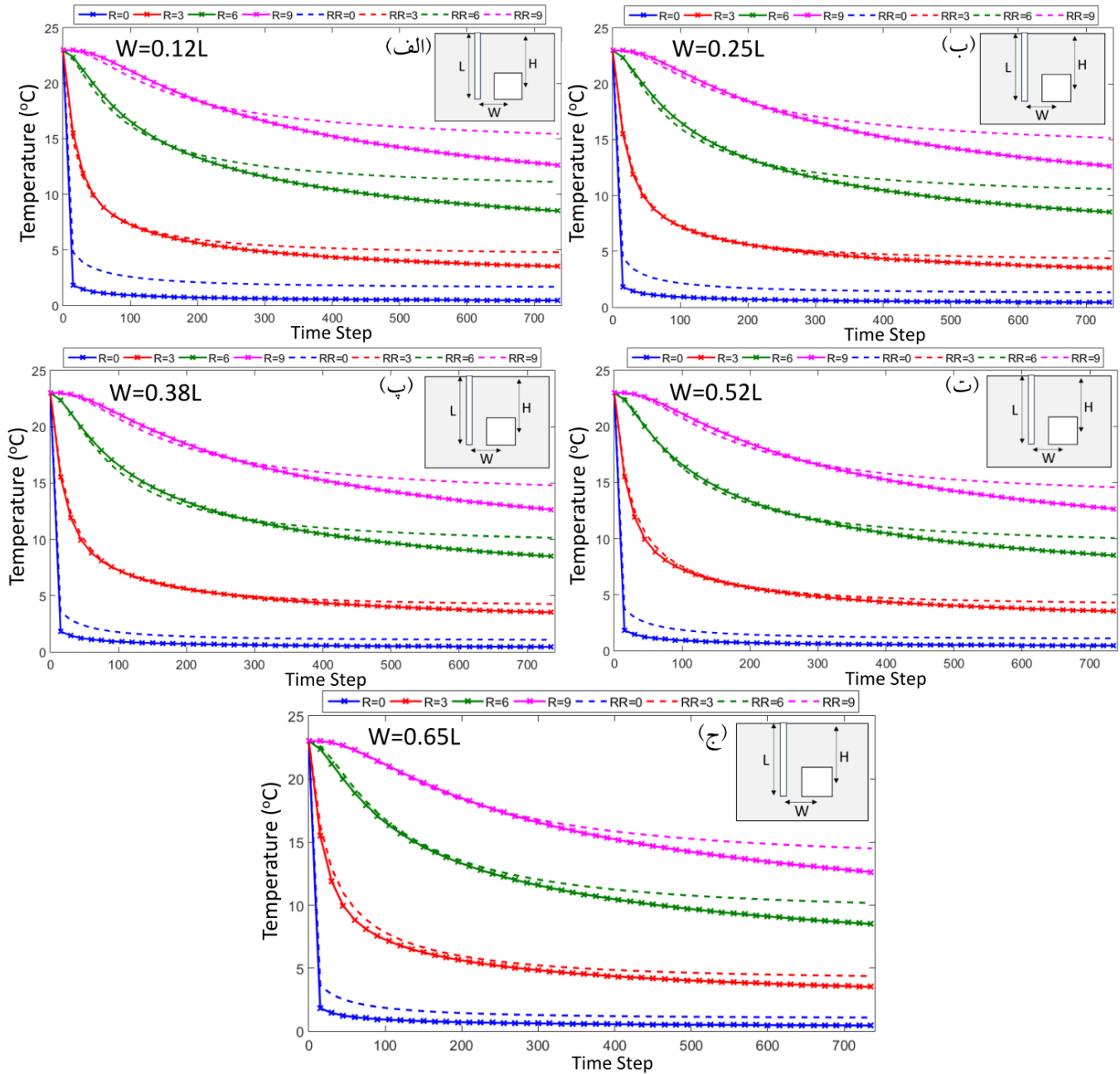
نوع خاک	تراکم نسبی (%)	دما (°C)	چگالی (Kg/m <sup>3</sup> )	هدایت گرمایی (W/mC)	ظرفیت گرمایی ویژه (J/KgC)
ماسه اوتاوا	۸۰	۲۳	۲۱۴۸	۲/۵	۱۳۵۰
ناهمگنی	-	۲۳	۲۵۶۸	۰/۰۳۴	۱۵۳۲

ناهمگنی زیرسطحی از نوع مربعی اثر بسزایی بر نحوه انتشار دما در اطراف لوله انجماد داشته است بطوریکه در شکل (۶-الف) زمانیکه ناهمگنی در کمترین فاصله از لوله انجماد قرار دارد ( $W=0.12L$ )، در فاصله نزدیک به لوله انجماد ( $RR=0$ ) دما در گام‌های نخست با سرعت کمتری نسبت به زمانیکه ناهمگنی وجود ندارد افت نموده است و مقادیر نهایی انجماد تا ۲.۵ درجه سلسیوس بوده است. با وجود این زمانیکه ناهمگنی وجود ندارد افت دما در این نقاط به نزدیکی صفر درجه سلسیوس رسیده است که بیان‌گر اثر نامطلوب ناهمگنی بر انجماد نقاط نزدیک لوله انجماد در حضور ناهمگنی است. مهمترین علت این مسئله را می‌توان هدایت گرمایی پایین‌تر توده ناهمگنی نسبت به خاک اطراف دانست بطوریکه ناهمگنی در یک زمان مشخص با سرعت کمتری اجازه توسعه انجماد به نواحی ماورای خود را می‌دهد. در فاصله ۳ متری از لوله انجماد ( $RR=3$ )، تغییرات دمایی تا گام زمانی ۳۰۰ با حالتی که ناهمگنی وجود ندارد برابری می‌کند با این حال پس از این گام زمانی حضور ناهمگنی موجب شده تا دما به مقدار ثابت در حدود ۵ درجه سلسیوس همگرا شود. در صورت عدم وجود ناهمگنی افت دما بهینه‌تر بوده و مقادیر زیر ۵ درجه را نیز دیده می‌شود. این مسئله از این جهت قابل توجه است که ناهمگنی زیرسطحی به دلیل هدایت گرمایی پایین‌تر نیازمند زمان طولانی‌تری نسبت به خاک اطراف برای رسیدن به دما انجماد است. بنابراین در مدت زمان یکسان که شعاع انجماد در خاک در حال توسعه است، ناهمگنی در دماهای بالاتری قرار دارد و شار گرمایی از سمت ناهمگنی به سمت محیط خاک اطراف که اکنون در دما پایین‌تری است سرازیر می‌شود. این اثر با افزایش فاصله به ۶ متر از لوله انجماد ( $RR=6$ ) بصورت شدیدتری قابل مشاهده است بطوریکه تنها تا گام زمانی ۲۰۰ شرایط یکسان بوده و پس از آن در حضور ناهمگنی تا ۷۰۰ گام زمانی دما به ۱۴ درجه سلسیوس همگرا شده است حال آنکه در صورت نبود ناهمگنی در همین تعداد گام

شده است بطوریکه چگالی توزیع (نسبت تعداد المان به سطح) در نزدیکی لوله انجماد و ناهمگنی ۶ المان در هر ۳ مترمربع در نظر گرفته شده و با افزایش فاصله از مقدار آن کاسته شده است. همچنین گسسته‌سازی محور زمان به وسیله ۷۰۰ گام زمانی به طول ۱ ثانیه انجام شده است. لازم به توضیح است که انتخاب تعداد المان‌ها جهت گسسته‌سازی دامنه محیط و طول گام‌های زمانی بر اساس یک روند آزمون و خطا انجام شده است تا در کمترین تعداد گام زمانی علاوه بر همگرایی محاسبات، بالاترین دقت نتایج حاصل شود. سایر مشخصات مدل مورد بررسی در شکل (۵) قابل مشاهده است. در نهایت نتایج محاسبات بصورت نمودارهای توزیع دما در درون محیط و در اطراف حفرات زیرسطحی ارائه شده است. همچنین نمودارهای توزیع حرارت (اسنپ‌شات) مربوط به تغییرات گرما در گام‌های زمانی مختلف تحلیل ارائه شده است.

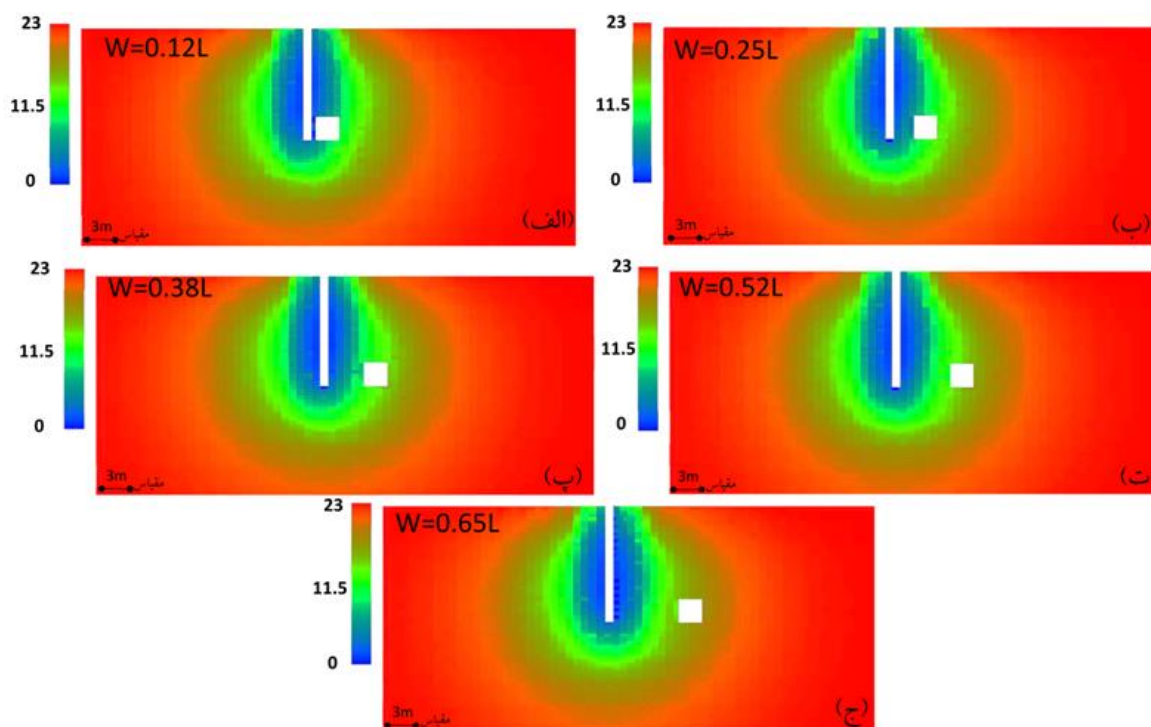
### ۳-۱- توسعه انجماد در خاک شامل ناهمگنی زیرسطحی از نوع مربعی

طبق مطالعات گذشته بیشترین انجماد برای لوله‌های انجمادی که بصورت قائم در زمین قرار داده می‌شوند در امتداد مرکز آنها رخ می‌دهد [۲۰]. در شکل (۶) تغییرات دما بر حسب زمان در راستای مرکز لوله انجماد ارائه شده است. در این شکل تغییرات دما بر حسب فاصله از لوله انجماد با نماد  $R=0$  تا  $R=9$  که نشان دهنده نقاط ارزیابی در فواصل ۰/۱ تا ۹ متری از لوله انجماد هستند، برای حالتی که اثر ناهمگنی زیرسطحی در نظر گرفته نشده است ارائه شده است. در کنار آن نتایج مربوط به حالتی که ناهمگنی از نوع مربعی در لایه خاک قرار دارد با نمادهای  $RR=0$  تا  $RR=9$  برای نقاط ارزیابی ۰/۱ تا ۹ متری از لوله انجماد نمایش داده شده است. اشکال (۶-الف) تا (۶-ج) نیز اثر تغییر فاصله ناهمگنی بر نتایج تغییر دما را نشان می‌دهد. همانطور که در این اشکال به وضوح دیده می‌شود



شکل ۶. مقایسه تغییرات دما در راستای مرکز لوله انجماد در فواصل مختلف از آن زمانیکه ناهمگنی مربعی در فاصله الف ( $W = 0.12L$ ; ب)  $W = 0.25L$ ; پ)  $W = 0.38L$ ; ت)  $W = 0.52L$  و ج)  $W = 0.65L$  از لوله انجماد قرار دارد. در این شکل نمودارهای مرتبط با  $R = 0$  تا  $R = 9$  مربوط به تغییرات دما بدون حضور ناهمگنی و  $RR = 0$  تا  $RR = 9$  مربوط به تغییرات دما در حضور ناهمگنی هستند.

Fig. 6. Comparison of temperature variations along the centerline of the freezing pipe at different distances from it when the square heterogeneity is located at distances of (a)  $W = 0.12L$ ; (b)  $W = 0.25L$ ; (c)  $W = 0.38L$ ; (d)  $W = 0.52L$ ; and (e)  $W = 0.65L$  from the freezing pipe. In this figure, the curves labeled  $R = 0$  to  $R = 9$  correspond to temperature variations without the presence of heterogeneity, and  $RR = 0$  to  $RR = 9$  correspond to temperature variations in the presence of heterogeneity.



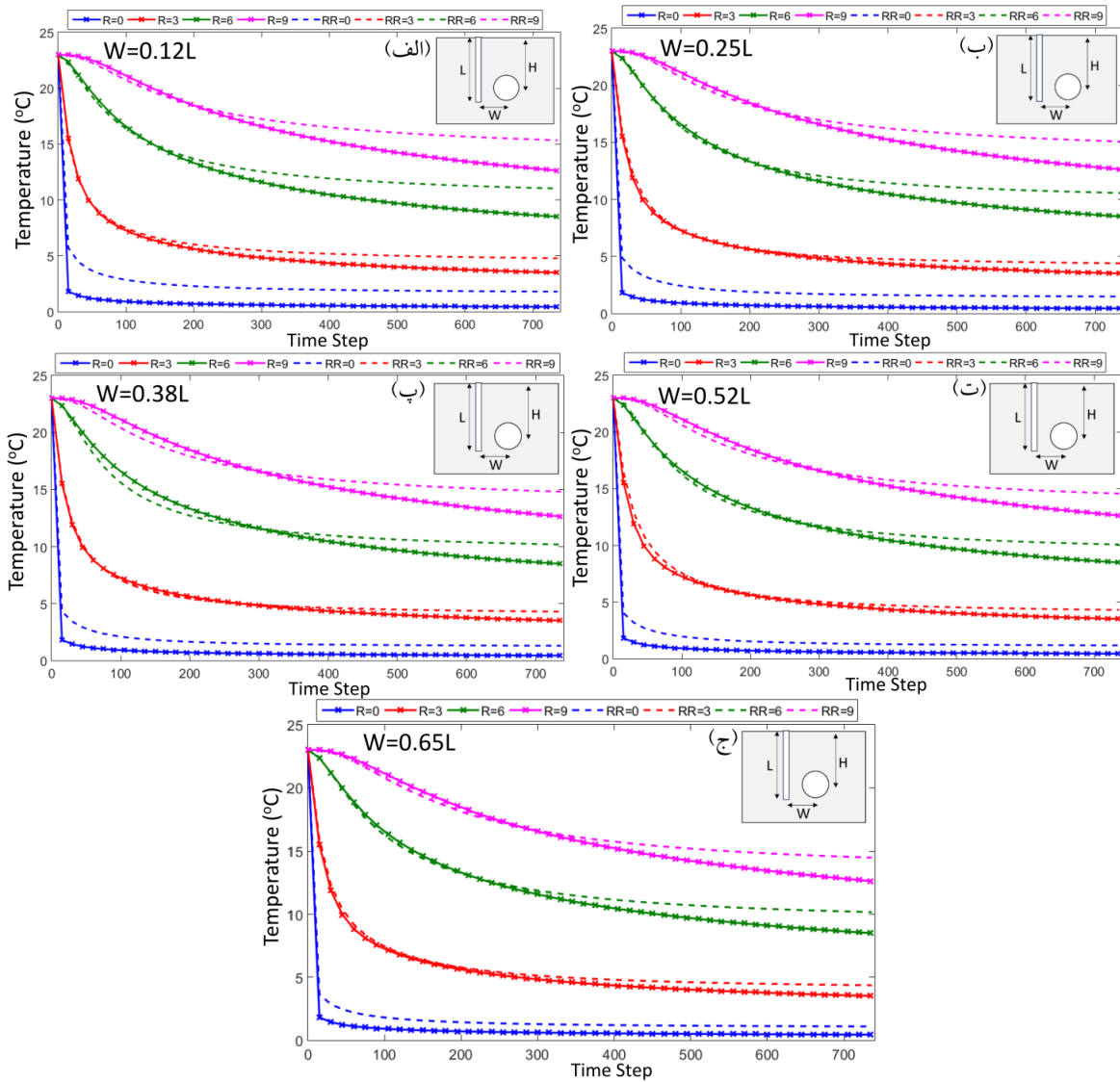
شکل ۷. نمودار تغییرات دما در اطراف لوله انجماد و ناهمگنی زمانیکه ناهمگنی از نوع مربعی در فاصله الف ( $W = 0.12L$ ؛ ب)  $W = 0.25L$ ؛ پ)  $W = 0.38L$ ؛ ت)  $W = 0.52L$ ؛ و ج)  $W = 0.65L$  از لوله انجماد قرار دارد.

**Fig. 7. Temperature variation contours around the freezing pipe and the heterogeneity when the heterogeneity is square-shaped and located at distances of (a)  $W = 0.12L$ ; (b)  $W = 0.25L$ ; (c)  $W = 0.38L$ ; (d)  $W = 0.52L$ ; and (e)  $W = 0.65L$  from the freezing pipe.**

۶ و ۹ متری به حالت‌های قبل اثرات کمتری را نشان می‌دهد. نتایج به خوبی نشان می‌دهند که با فاصله گرفتن ناهمگنی از لوله انجماد اثر آن به عنوان یک منبع حرارتی بر نقاط اطراف لوله کاهش یافته است. این مسئله بیانگر آن است که یک فاصله بهینه برای ناهمگنی از لوله انجماد وجود دارد که از آن به بعد اثر ناهمگنی بر انجماد ناچیز می‌گردد. برای مثال در صورت وجود ناهمگنی در فاصله  $W=0.38L$  از لوله انجماد اثر ناهمگنی در فواصل تا ۳ متری از لوله انجماد ناچیز است که علت اصلی آن وقوع جداشدگی حباب توزیع دما تا این فواصل در ناحیه بین ناهمگنی و لوله انجماد می‌باشد.

در شکل (۷) نمودار تغییرات دما در کل دامنه محیط بصورت نمودار حرارتی نمایش داده شده است. طبق این شکل ناحیه انجماد به شکل یک حباب است که قسمت بالایی به دلیل نزدیکی به مرز سطح زمین باریک‌تر بوده و در محدوده مرکزی بیشترین اثر را بر محیط اطراف دارد. این مشاهده با تحقیقات گذشته جهت مدلسازی گسترش انجماد در خاک مطابقت مطلوبی دارد [۲۰]. شعاع موثر حباب انجماد (ناحیه آبی رنگ) با توجه به مرکز ناحیه انجماد اندازه‌گیری می‌شود. بر این اساس و طبق شکل (۷) این شعاع در

زمانی دما به ۱۰ درجه سلسیوس نیز رسیده است. اثر مشابهی زمانیکه فاصله نقطه ارزیابی از لوله انجماد ۹ متر باشد ( $RR=9$ ) دیده می‌شود. با افزایش فاصله ناهمگنی از لوله انجماد به  $W=0.25L$  در شکل (۶-ب) در نزدیکی لوله انجماد ( $RR=0$ ) نسبت به حالت قبل از اثرات حضور ناهمگنی ۱۰ درصد کاسته شده است و حضور ناهمگنی اثر کمتری بر مقدار نهایی انجماد را نسبت به حالت قبل نشان می‌دهد. این اثر برای زمانیکه نقطه ارزیابی در فاصله ۳ متر ( $RR=3$ ) و ۶ متری ( $RR=6$ ) قرار دارد نیز مشهود است. با این حال برای حالتیکه نقطه ارزیابی در فاصله ۹ متری از لوله انجماد قرار دارد ( $RR=9$ ) اثر حضور ناهمگنی مشابه شکل (۶-الف) است. زمانیکه فاصله ناهمگنی به  $W=0.38L$  در شکل (۶-پ) افزایش یافته است در فواصل نزدیک به لوله انجماد ( $RR=0$ ) و فاصله ۳ متری ( $RR=3$ ) اثر حضور ناهمگنی به بسیار ناچیز است. حال آنکه در نقاط ۶ متری و ۹ متری نیز از اثرات ناهمگنی کاسته شده است. اثرات مشابهی در اشکال (۶-ت) و (۶-ج) دیده می‌شود با این تفاوت که اثر ناهمگنی بر نقاط نزدیک به لوله انجماد و فاصله ۳ متری از لوله انجماد تقریباً به صفر رسیده است و در فواصل



شکل ۸. مقایسه تغییرات دما در راستای مرکز لوله انجماد در فواصل مختلف از آن زمانیکه ناهمگنی دایره‌ای در فاصله الف)  $W = 0.12L$ ؛ ب)  $W = 0.25L$ ؛ پ)  $W = 0.38L$ ؛ ت)  $W = 0.52L$  و ج)  $W = 0.65L$  از لوله انجماد قرار دارد. در این شکل نمودارهای مرتبط با  $R = 0$  تا  $R = 9$  مربوط به تغییرات دما بدون حضور ناهمگنی و  $RR = 0$  تا  $RR = 9$  مربوط به تغییرات دما در حضور ناهمگنی هستند.

Fig. 8. Comparison of temperature variations along the centerline of the freezing pipe at different distances from it when the circular heterogeneity is located at distances of (a)  $W = 0.12L$ ; (b)  $W = 0.25L$ ; (c)  $W = 0.38L$ ; (d)  $W = 0.52L$ ; and (e)  $W = 0.65L$  from the freezing pipe. In this figure, the curves labeled  $R = 0$  to  $R = 9$  correspond to temperature variations without the presence of heterogeneity, and  $RR = 0$  to  $RR = 9$  correspond to temperature variations in the presence of heterogeneity.

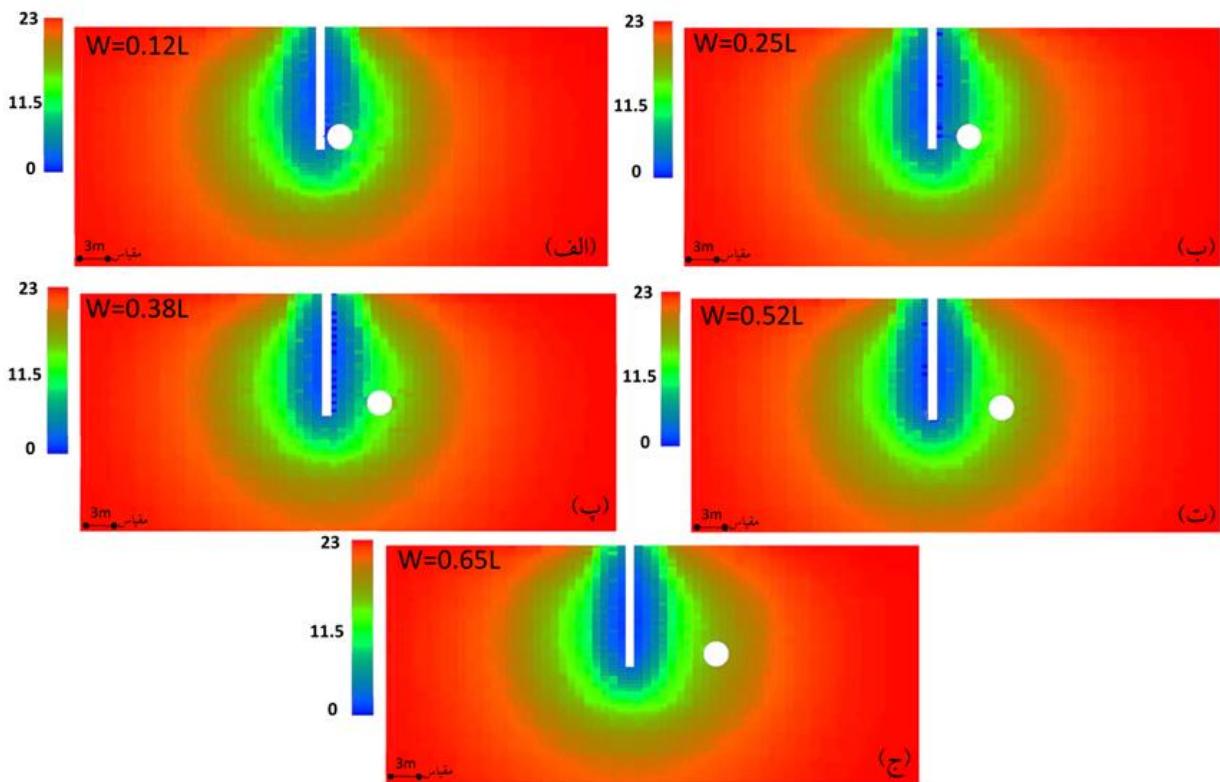
کند و مانع از گسترش بیشتر انجماد گردد.

حدود حداکثر ۳ متر از مرکز لوله انجماد قابل تعیین است. در این ناحیه در هنگام عدم حضور ناهمگنی دما تا حداکثر ۵ درجه سلسیوس رسیده است. با این حال حضور ناهمگنی موجب شده تا این شعاع در نزدیکی ناهمگنی اندکی تا حدود ۱ متر کاسته شود که با افزایش فاصله ناهمگنی از لوله انجماد اثرات آن بصورت چشمگیری کاسته شده است. علت اصلی کاسته شدن شعاع انجماد هدایت گرمایی پایین‌تر ناهمگنی می‌باشد که موجب شده در یک زمان مشخص نسبت به خاک اطراف همانند یک منبع گرمایی عمل

۳-۲- توسعه انجماد در خاک شامل ناهمگنی زیرسطحی از نوع دایره‌ای در شکل (۸) تغییرات دما در راستای مرکز لوله انجماد در فواصل  $0.1, 0.3, 0.6$  و  $0.9$  متری از لوله انجماد در حضور ناهمگنی زیرسطحی از نوع دایره‌ای ارائه و با نتایج همین نقاط زمانیکه ناهمگنی وجود ندارد مقایسه شده است. شکل (۸-الف) نشان دهنده نتایج تغییرات برای حالتی است که فاصله ناهمگنی از

کرده و شکل هندسی دایره‌ای آن موجب شده تا توزیع همه جانبه گرما به نواحی اطراف آن ساده‌تر شود، حال آنکه در شکل هندسه‌ای گوشه‌دار توزیع گرما در مرکز اضلاع بیشینه بوده و در گوشه‌ها کمینه است. بنابراین توزیع گرما از سمت ناهمگنی‌های گردگوشه بشکل بهتری انجام شده و موجب کاهش بیشتر کیفیت انجماد مصنوعی می‌شود. با افزایش فاصله ناهمگنی از لوله انجماد به  $W=0.25L$  در شکل (۸-ب)، مشاهده می‌شود که اثر ناهمگنی بر تغییرات دمایی نقاط اطراف در فواصل  $0.1$  و  $3$  متر کاسته شده است، با این حال برای فواصل  $6$  و  $9$  متری از لوله انجماد تغییرات دمایی از گام زمانی  $200$  به بعد در حالت حضور و عدم حضور ناهمگنی متفاوت است بطوریکه حضور ناهمگنی موجب کاهش کارایی و شعاع توسعه انجماد شده است. در این حالت در حضور ناهمگنی پس از  $700$  گام زمانی در فاصله  $6$  متری دما به  $12$  درجه و در فاصله  $9$  متری به  $17$  درجه رسیده است. حال آنکه در صورت عدم وجود ناهمگنی به ترتیب دمایی در حدود  $10$  و  $14$  درجه برای این نقاط قابل انتظار است. به وضوح می‌توان دید که ناهمگنی دایره‌ای

لوله انجماد برابر  $W=0.12L$  انتخاب شده است. طبق این شکل در فواصل نزدیک به لوله انجماد ( $RR=0$ )، ناهمگنی دایره‌ای موجب شده تا دما نهایی به مقادیر بالاتر در حدود  $4$  درجه سلسیوس همگرا شود، درحالیکه در حالت عدم حضور ناهمگنی دما به نزدیکی صفر درجه سلسیوس در این نقاط رسیده است. در مقایسه با حالت ناهمگنی مربعی می‌توان مشاهده نمود که ناهمگنی دایره‌ای اثر نامطلوب‌تری بر توسعه انجماد داشته است، زیرا که در حالت ناهمگنی مربعی دما به مقادیر پایین‌تر تا حدود  $2/5$  درجه رسیده که حدود  $40$  درصد بیشتر از دما نهایی ناهمگنی با سطح مقطع دایره‌ای است. این رفتار برای سایر نقاط ارزیابی در فواصل  $3$ ،  $6$  و  $9$  متری نیز قابل مشاهده است. اثر نامطلوب ناهمگنی دایره‌ای نسبت به مربعی بر توسعه انجماد از این جهت قابل توجیه است که هندسه درجه دوم دایره‌ای توانایی توزیع دما بصورت یکسان را در تمامی جهت‌ها دارا می‌باشد. در یک زمان مشخص که شعاع ناحیه انجماد در اطراف لوله انجماد در حال توسعه است، هدایت گرمایی پایین‌تر ناهمگنی موجب شده تا ناهمگنی همانند منبع گرما عمل



شکل ۹. نمودار تغییرات دما در اطراف لوله انجماد و ناهمگنی زمانی که ناهمگنی از نوع دایره‌ای در فاصله الف ( $W = 0.12L$ ؛ ب)  $W = 0.25L$ ؛ پ)  $W = 0.38L$ ؛ ت)  $W = 0.52L$ ؛ و ج)  $W = 0.65L$  از لوله انجماد قرار دارد.

Fig. 9. Temperature variation contours around the freezing pipe and the heterogeneity when the heterogeneity is circular-shaped and located at distances of (a)  $W = 0.12L$ ; (b)  $W = 0.25L$ ; (c)  $W = 0.38L$ ; (d)  $W = 0.52L$ ; and (e)  $W = 0.65L$  from the freezing pipe.

نتایج روش هیبرید در مقایسه با نتایج در دسترس مقایسه شد سپس در طی یک مطالعه پارامتریک نحوه اعمال روش توسعه داده شده برای مدل‌سازی انجماد مصنوعی خاک در حضور ناهمگنی زیرسطحی شرح داده شد. انتخاب جنس ناهمگنی سنگی از این جهت حائز اهمیت است که در اعماق سطحی و در جایی که لوله انجماد قائم در خاک احداث می‌شود احتمال وجود توده‌های سنگی در اطراف لوله انجماد بسیار زیاد است بطوریکه این توده‌ها می‌توانند با ایجاد اختلال در فرآیند انجماد از انجماد یکدست خاک در اطراف لوله انجماد جلوگیری کنند. از آنجایی که نفوذپذیری توده‌های سنگی معمولاً بسیار پایین است این نوع توده همواره بصورت غیراشباع در مدل‌سازی لحاظ می‌شوند مگر در مواردی که نفوذپذیری سنگ اجازه عبور آب و اشباع‌سازی توده سنگی را دهد. بنابراین در این تحقیق ناهمگنی به شکل توده سنگی غیر اشباع فرض شد. در مطالعه پارامتریک اثرات هندسه ناهمگنی و فاصله آن بر کیفیت و توسعه انجماد مصنوعی ارزیابی گردید. نتایج این تحقیق نشان داد که روش هیبرید یک روش بهینه به منظور مدل‌سازی پدیده انجماد مصنوعی در خاک فراهم می‌کند و توانایی بکارگیری در حل انواع مسائل با هندسه پیچیده و شامل ناهمگنی‌های زیرسطحی را دارا می‌باشد. در نهایت نتایج مطالعات پارامتریک بشرح زیر قابل جمع‌بندی است:

- هندسه توسعه انجماد مصنوعی به شکل یک حباب می‌باشد که از بالا به دلیل تبادل گرمایی با مرز سطح زمین باریک بوده و در مرکز بیشترین حجم تاثیر را دارد. این مشاهده بخوبی بر نتایج حاصل از مطالعات آزمایشگاهی و مدل‌سازی عددی پیشین منطبق است.
- حضور ناهمگنی زیرسطحی از نوع توده سنگ غیر اشباع موجب کاهش شعاع موثر انجماد مصنوعی در خاک شده است. این مشاهده از این جهت قابل توجه است که به دلیل هدایت گرمایی پایین توده سنگی غیر اشباع، یک ناحیه با شار حرارتی مثبت از سمت توده سنگی به سمت محیط خاک شکل گرفته و شعاع ناحیه انجماد را کاهش می‌دهد.
- در حضور ناهمگنی به شکل مربعی بصورت متوسط شعاع تاثیر ۱۵ درصد و در حضور ناهمگنی به شکل دایره تا ۲۰ درصد کاسته می‌شود با این حال با افزایش فاصله ناهمگنی از لوله انجماد این شعاع به سرعت بازیابی می‌گردد.
- طبق نتایج حاصل از تحقیق کمترین فاصله لوله انجماد از ناهمگنی بطوریکه کمترین اثر را بر شعاع تاثیر انجماد داشته باشد برابر  $W=0.52L$  (طول لوله انجماد است) تخمین زده می‌شود.
- ناهمگنی به شکل دایره‌ای اثرات نامطلوب‌تری در مقایسه با ناهمگنی

در مقایسه با ناهمگنی مربعی اثرات نامطلوب‌تری بر توسعه انجماد گذاشته است و میزان دمای نهایی در حضور این نوع ناهمگنی بیشتر از زمانی است که ناهمگنی مربعی در خاک حضور دارد. در اشکال (۸-پ) الی (۸-ج) می‌توان دید که اثرات ناهمگنی حتی پس از آنکه فاصله آن از لوله انجماد به  $W=0.65L$  می‌رسد، بر روی نتایج فواصل ۳ الی ۹ متری وجود دارد و از شدت آن با سرعت کمی کاسته شده است. همچنین بر اساس این اشکال دمای نهایی در این حالات به دمایی مشابه آنچه برای ناهمگنی مربعی دیده شده همگرا شده است.

مشابه شکل (۷) در شکل (۹) نمودار حرارتی تغییرات دما برای حالتیکه ناهمگنی از نوع دایره‌ای در خاک قرار دارد ارائه شده است. مشابه حالت مربعی، ناهمگنی دایره‌ای نیز موجب کاهش حجم حباب انجماد تا ۲۰ درصد شده است با این حال اثر آن بر ناحیه موثر انجماد (ناحیه آبی رنگ) با رسیدن به فاصله  $W=0.38L$  کاهش یافته و در فاصله  $W=0.52L$  کمینه شده و در فاصله  $W=0.65L$  در حال از بین رفتن است.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مطالعه یک روش هیبرید جهت مدل‌سازی پدیده انجماد مصنوعی خاک در حضور ناهمگنی زیرسطحی به شکل توده سنگ غیر اشباع پیشنهاد شد. برای این منظور با توسعه و بکارگیری روش اجزای مرزی در کنار روش اجزای محدود یک روش ترکیبی با عنوان روش مرزی-محدود ارائه شد. در این روش با استفاده از حل‌های اساسی استاتیکی مستقل از زمان در هنگام حل معادلات تعادل دینامیکی بر روی دامنه محیط و استفاده از روش تفاضل محدود در گسسته‌سازی محور زمان، این امکان فراهم شد تا بتوان معادلات انتگرال مرزی مرتبط با مرزهای میانی و دوردست را بصورت ساده‌تر در روند محاسبات وارد نمود. سپس با بکارگیری از ایده گسسته‌سازی دامنه همانند آنچه در روش اجزای محدود رایج است، این امکان فراهم شد تا نقاط نزدیکی مرکز مدل و نواحی مرتبط با مسئله اصلی با دقت بالاتری گسسته‌سازی و مدل‌سازی شوند. در این مطالعه از المان‌های مرزی درجه دوم برای گسسته‌سازی مرزها در کنار المان‌های سه گره‌ای مثلثی جهت گسسته‌سازی دامنه مسئله استفاده شد و پس از توسعه فرمولبندی روش، ارائه روابط مورد نیاز و سپس استخراج شکل قابل حل معادلات، یک روش محاسباتی با عنوان روش هیبرید برای مدل‌سازی پدیده انجماد مصنوعی پیشنهاد شد. در ادامه با وارد کردن روش مزبور در یک کد محاسباتی کارایی روش با حل چندین مثال صحت‌سنجی مورد ارزیابی قرار گرفته و میزان دقت و صحت

- Injection, Applied Sciences.,10 (2020) 6055.
- [8] M.M. Zhou, G. Meschke, Ground Improvement and Geosynthetics, Chapter: Numerical Modeling of Artificial Ground Freezing: Multiphase Modeling and Strength Upscaling, American Society of Civil Engineers, (2014) 209–219.
- [9] M. Alzoubi, M. Xu, F. Hassani, S. Poncet, A.P. Sasmito, Artificial ground freezing: A review of thermal and hydraulic aspects, Tunnelling and Underground Space Technology, 104 (2020) 103534.
- [10] Zh. Ren, J. Liu, H. Jiang, E. Wang, Experimental study and simulation for unfrozen water and compressive strength of frozen soil based on artificial freezing technology, Cold Regions Science and Technology, 205 (2023) 103711.
- [11] C.A. Brebbia, J. Dominguez, Boundary Elements an Introductory Course, Computational Mechanics Publications, 1992, ISBN: 1562520873.
- [12] J. Dominguez, Boundary Element in Dynamics, Computational Mechanics Publications, 1993, ISBN: 1562521829.
- [13] J.C. Bruch, G. Zvoloski, Transient Two-dimensional Heat Conduction Problems Solved by the Finite Element Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 8 (1974) 481-494.
- [14] L.C. Wrobel, C.A. Brebbia, D. Nardini, The Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Transient Heat Conduction, in Finite Elements in Water Resources VI, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin and New York, 1986.
- [15] L.C. Wrobel, J.C.F. Telles, C.A. Brebbia, A Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Axisymmetric Diffusion Problems, in Boundary Elements VIII, Vol. 1, Computational Mechanics Publications, Southampton and Springer-Verlag, Berlin and New York, 1986.
- [16] T. Carpenter, Thermal Properties of Dry and Saturated Soils, Master's Thesis, University of Tennessee, Knoxville, USA, 2019.
- مربعی بر توسعه انجماد در اطراف لوله انجماد را نشان داده است که بیانگر اثر منفی توده‌های سنگی گردگوشه بر کیفیت انجماد در خاک است.
- ارائه یک روش مرزی-محدود با ایده بکارگیری المان‌های محدود با قابلیت ارتقاء در درون روش اجزای مرزی تقابل‌دوگانه، توسعه روش مرزی-محدود برای محیط لایه‌ای با استفاده از روش زیردامنه‌سازی و مدل‌سازی انجماد مصنوعی در محیط نیمه‌بینهایت خاک از مهمترین دستاوردهای تحقیق حاضر است. با این حال روش توسعه داده شده این امکان را فراهم می‌کند تا رفتارهای غیرخطی در مدل‌سازی تغییر فاز بسادگی در معادلات نهایی لحاظ شده که می‌تواند موضوع مناسب جهت تحقیقات آتی در ادامه روند همین تحقیق باشد.

## منابع

- [1] P.G. Nicholson, Soil Improvement and Ground Modification Methods, Elsevier, Waltham, MA, USA, 2015, ISBN: 9780124080768.
- [2] O.B. Andersland, B. Ladanyi, An Introduction to Frozen Ground Engineering, Springer Science-Business Media Dordrecht, Chapman & Hall, 1994, ISBN: 9781475722925.
- [3] N. Vaganova, M. Filimonov, Simulation of freezing and thawing of soil in Arctic regions, International Conference on Sustainable Cities, Ekaterinburg, Russian Federation, 2005.
- [4] F. Casini, A. Gens, S. Olivella, G.M.B. Viggiani, Artificial ground freezing of a volcanic ash: laboratory tests and modelling, Environmental Geotechnics, 3(3) (2016) 141-154.
- [5] J. Hu, Y. Liu, Y. Li, K. Yao, Artificial Ground Freezing in Tunnelling Through Aquifer Soil Layers: A Case Study in Nanjing Metro Line 2, KSCE Journal of Civil Engineering, 22 (2018) 4136-4142.
- [6] Z. Joudieh, O. Cuisinier, A. Abdallah, F. Masrouri, Artificial Ground Freezing—On the Soil Deformations during Freeze–Thaw Cycles, Geotechnics 4 (2024) 718-741.
- [7] Z. Liu, Y. Sun, B. Wang, Q. Li, Experimental Study of Artificial Ground Freezing by Natural Cold Gas

- Satyanaga, Q. Zhai, Numerical Analyses of the Effect of the Freezing Wall on Ground Movement in the Artificial Ground Freezing Method, *Appl. Sci.*, 14 (2024) 4220.
- [21] Z. Gong, G. Wang, X. Dai, Field Monitoring and Numerical Study of an Artificial Ground Freezing Reinforcement Project for Cross Passage, *Applied Sciences*, 15(17) (2025) 9547.
- [22] Q. Luo, J. Li, W. Huang, W. Wang, B. Yuan, Three-Dimensional Refined Numerical Modeling of Artificial Ground Freezing in Metro Cross-Passage Construction: Thermo-Mechanical Coupling Analysis and Field Validation, *Buildings*, 15 (2025) 2356.
- [17] N.M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 85(3) (1959) 67-94.
- [18] Y.H. Cao, L.H. Kuo, Hybrid method of space-time and Houbolt methods for solving linear time-dependent problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 128 (2021) 58-65.
- [19] S. Mohammadzade, M. Ghassemieh, Y. Park, Structure-dependent improved Wilson- $\theta$  method with higher order of accuracy and controllable amplitude decay, *Applied Mathematical Modelling*, (2017) 417-436.
- [20] Y. Ou, L. Wang, H. Bian, H. Chen, S. Yu, T. Chen, A.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

B. Ansari, A. R. Firoozfar, *Hybrid Boundary-Finite Element Method for Modeling Artificial Freezing in Soil Environment Including Rock Type Inhomogeneities*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 57(12) (2026) 2033-2054.

DOI: [10.22060/ceej.2026.24756.8345](https://doi.org/10.22060/ceej.2026.24756.8345)

