

Analytical solution of the response of the I-shaped beam to the tubular column connections

S Ahamd Hosseini^{1*}, Mostafa Zeinoddini², Taraneh Amin Taheri¹

¹ Faculty of passive defense, malek ashtar university of technology, Tehran, Iran.

² Faculty of Civil Eng., Khaje-Nasir-Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

Review History:

Received: Nov. 19, 2023

Revised: Nov. 04, 2024

Accepted: Dec. 07, 2024

Available Online: Jan. 07, 2025

Keywords:

I-shaped Beam to Cylindrical Column

Off-Shore Platforms

High Temperatures

Analytical Model

Roark's Relationships

ABSTRACT: Off-shore platforms constructed for oil and gas production are prone to high potential fire risks. These probable fire incidents may cause local or global structural damages, which in turn can result in serious consequences such as casualties, destruction of the facilities, and damage to the environment. It is therefore necessary to design these structures so as to ensure the least amount of loss after a possible fire event. Topsides of the offshore platforms are often provided with portal or truss-type structures. The truss, usually, consists of I-beams as chords and tubulars as diagonals. For the main joints of heavy topsides, I-beam-to-tubular leg connections with external diaphragms are usually employed. I-beam-to-tubular column connections with external diaphragms are important in decks and topside structures of the oil/gas platforms. In onshore steel structures, some experimental and numerical studies have been carried out to investigate the behavior of connections in fire. However, the number of studies on the behavior of connections of offshore platforms in fire and post-fire conditions is very limited. Previous studies on fire in offshore platforms mainly deal with numerical simulation and risk assessment related to offshore structures exposed to fire. Recently, the authors have investigated the behavior of I-shaped beam to cylindrical hollow steel (CHS) column connections with external diaphragms, at elevated temperatures. In this paper, a closed-form analytical solution for the prediction of moment-rotation and the rotational stiffness-rotation curves of I-shaped beam to cylindrical column connections, commonly used in off-shore platforms, in room and elevated temperatures is presented. In order to define the behavior of the connection a bounding line moment-rotation model based on the works of Al-Bermani et al. was proposed. Observing the moment-rotation behavior of the connections using the numerical models, it was concluded that the bounding line model is suitable the model for determining $M-\phi$ and $k_j-\phi$ curves of these connections. The required yield and plastic moments in this model were provided by the authors extending Roark's relationships. Therefore, having the complete geometry of the connection and the yield stress value of the material it is easily feasible to determine the yield moment and plastic moment of the connection and its high-temperature behavior. Then, having the values of yield and plastic moments it is possible to depict $M-\phi$ and $k_j-\phi$ curves of these connections in ordinary temperatures. Comparing the analytical results to experimental and numerical results indicates that the analytical relationships present acceptable approximations. The required yield and plastic moments in this model are provided as an extension to Roark's relationships. Relating the I-shaped beam to cylindrical column connection's stiffness in high temperatures to ordinary temperatures, it is then possible to extend the $M-\phi$ and $k_j-\phi$ curves of ordinary temperatures to high temperatures using the above equations. The results of this model are compared with those of a non-linear coupled mechanical-thermal finite element model previously provided by the authors, which was in turn validated using small-scale and large-scale experimental tests. Reasonable agreement has been found between the analytical model results and the experimental/numerical modeling results.

1- Introduction

Connections are either fully rigid or fully pinned. The rigid connection assumption implies that the stiffness of the connection is significantly greater than that of the beam and

column, while the pinned connection assumption indicates low stiffness of the connection compared to the connected members. The study by Nader and Astaneh[1], focusing on the behavior of connections, demonstrated that connections

*Corresponding author's email: hoseini@mut.ac.ir



exhibit nonlinear behavior between complete rigidity and complete pinning; thus, connections in reality possess semi-rigid behavior. Recently, the impact of semi-rigid connections on the actual structural response has gained attention, and measures for analyzing structures with semi-rigid connections have been provided in several design codes for steel structures. The AISC code (Edition 360-22) specifically addresses semi-rigid connections and presents methods for their analysis and design. This edition includes sections dedicated to the nonlinear behavior of connections and their influence on structural performance [2]. In addition to the aforementioned codes, various studies have been conducted regarding the response of connections and their impact on structural behavior. Ali et al. analyzed the moment-rotation curves of I-shaped beam connections to tubular columns, showing that these curves can enhance the design of marine structures[3]. Pawar et al. also studied the nonlinear behavior of I-shaped beam connections to tubular columns in 2022, demonstrating that this behavior significantly varies under different loading conditions[4]. As noted, according to the review conducted by the authors of this article, a comprehensive analytical model for examining I-shaped beam connections to tubular columns has not yet been presented. Therefore, this research proposes a suitable model for predicting the behavior of I-shaped beam connections to tubular columns in offshore platforms at elevated temperatures.

2- Methodology

This article examines a comprehensive analytical method for predicting the moment-rotation and stiffness-rotation curves of I-shaped beam connections to tubular columns in offshore platforms at elevated temperatures. The yield moment and required plastic moment are derived from the developed Roark relationships[5]. In this context, the effective area and bending stress are initially calculated based on the design relationships for I-shaped beam connections to tubular columns. Subsequently, internal forces at various connection levels are computed using Roark's equations. Due to the similarity of the numerical $M - \phi$ curves, a cantilever beam model is utilized to predict these curves, as well as the $k_j - \phi$ relationship. Key parameters, including the yield moment (M_y), plastic moment (M_{pl}), rotation corresponding to the yield moment (ϕ_y), and rotation corresponding to the plastic moment (ϕ_{pl}), are calculated, with ϕ_y and ϕ_{pl} values proposed as 4.8 and 35 milliradians, respectively, based on numerical calculations. Figure 1 illustrates a typical connection of the I-shaped beam to the tubular column and the effective section in response to the bending moment.

Additionally, the maximum von-Mises stress is expressed as a function of the connection geometry (α) and load (w) as follows:

$$\sigma_{von(max)} = w \cdot \alpha \quad (1)$$

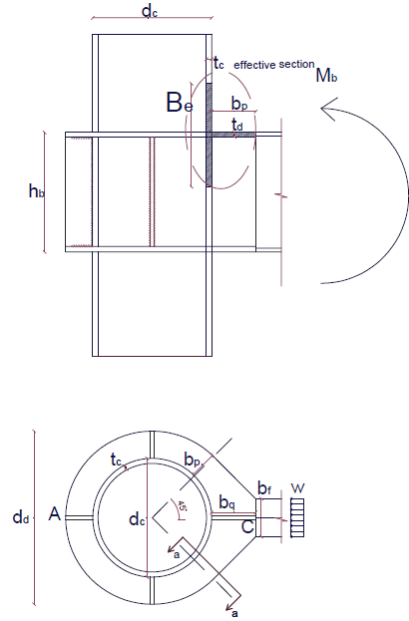


Fig. 1. A view of I-shaped beam to cylindrical column connection [5]

The results obtained from this analytical model are compared with a nonlinear mechanical-thermal finite element model. For the numerical modeling of these connections, the ABAQUS 6.18 finite element software is employed, which has the capability to simultaneously analyze thermal and mechanical loads. In this analysis, the three-dimensional solid element C3D8T is utilized, allowing for the consideration of variations in stress and temperature.

3- Discussion and Conclusion

In this study, the prediction of moment-rotation curves for I-shaped beam connections to tubular columns at elevated temperatures has been investigated. To estimate these curves, yield moment, plastic moment, and elastic and plastic stiffnesses have been utilized. At high temperatures, these curves can be calculated using reduced values of elastic modulus and yield stress. New analytical relationships for calculating stiffness-rotation and moment-rotation of connections at high temperatures have been presented, which align well with the results of simulations. The results indicate that the accuracy of estimates at normal temperatures affects the accuracy of estimates at high temperatures, and the estimation error at high temperatures increases due to the accumulation of various errors. Overall, these relationships can serve as an effective tool for analyzing the behavior of connections under high thermal conditions. In Figure 2, the curve of the I-shaped beam connection to the tubular column of offshore oil platforms is presented, along with a comparison of analytical results and simulation curves for moment-rotation and stiffness-rotation for sample NS1 at a temperature of 650 degrees Celsius, using the analytical relationships provided in this paper.

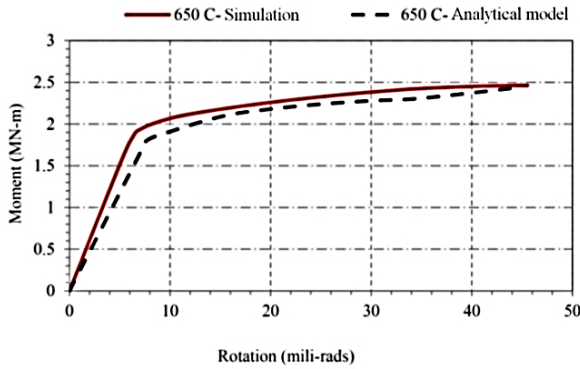


Fig. 2. Comparison of the moment-rotation curve of NS1 connection at 650°C temperatures with bounded linear model and numerical model.

4- Conclusion

This paper studied the behavior of I-shaped beam connections to tubular columns on offshore platforms under high-temperature bending moments. The computational approach in this research demonstrated that with complete knowledge of the connection geometry and the applied moment, the maximum stress in the effective section can be easily calculated using the derived relationships presented in this chapter. The continuation of the problem-solving process led to the extraction of relationships for determining the yield moment and plastic moment. Observing the moment-rotation behavior of the connection in numerical models revealed that the cantilever beam model is the best representation for explaining the and behaviors of these connections. With the yield moment and plastic moment established, along with assumed values for yield strain and plastic strain, the and

curves for these connections were plotted. A comparison between the analytical model results for the curves and the numerical model results showed a good agreement. Furthermore, by establishing a relationship between the stiffness of I-shaped beam connections to tubular columns at normal and elevated temperatures, the extracted relationships for determining the and curves at normal temperatures were extended to high temperatures. The analytical results obtained for the moment-rotation behavior of the connection at elevated temperatures were compared with the numerical model results, indicating that the analytical model can effectively predict the and behaviors of the connection at high temperatures.

It is worth noting that the results of this study and the extracted ductility parameters are applicable within the standard fire range (and not at other heat levels) and can be utilized for various standard fire temperatures. Additionally, a review of reputable articles regarding the ductility of these connections at high temperatures, particularly in recent years, revealed that there has not been extensive evaluation in this area.

References

- [1] M. Nader, A. Astaneh, Dynamic behavior of flexible, semirigid and rigid steel frames, *Journal of Constructional Steel Research*, 18(3) (1991) 179-192.
- [2] C. American Institute of Steel Construction, IL, Specification for Structural Steel Buildings, in: 3, 2022.
- [3] M.N.A.S. Ali, Experimental Moment-Rotation Behavior of Semi-Rigid Beam-to-Column Connections, Eastern Mediterranean University EMU, 2015.
- [4] G.D. Pawar, V.B. Dawari, Seismic design of bolted beam to column connections in tubular steel structures—A review, *Materials Today: Proceedings*, (2023).
- [5] R.G.B. A.M. Sadegh, Roark's Formulas for Stress and Strain, Printed in the United States of America, 2020.



حل تحلیلی پاسخ اتصالات تیر I شکل به ستون لوله‌ای در دمای بالا

سید احمد حسینی^{۱*}، مصطفی زین الدینی^۲، ترانه امین طاهری^{۳*}

۱- دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی پدافند غیرعامل، تهران، ایران.
۲- دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۲/۰۸/۲۷
بازنگری: ۱۴۰۳/۰۸/۱۴
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۱۷
ارائه آنلاین: ۱۴۰۳/۱۰/۱۸

کلمات کلیدی:

اتصال تیر I شکل به ستون لوله‌ای
عرشه سکوها نفتی
دمای بالا
منحنی لنگر - دوران
مدل تحلیلی
روابط Roark

خلاصه: عرشه سکوها نفت و گاز به دلیل وجود مقادیر قابل توجهی انرژی محبوس در فضاهای نسبتاً کوچک و تحت فشار، پتانسیل بالای خطرات آتش‌سوزی را دارند. این حوادث محتمل آتش‌سوزی می‌توانند باعث آسیب‌های سازه‌ای موضعی و کلی شوند که به نوبه خود عواقب جدی نظیر تلفات، تخریب و آسیب به محیط‌زیست را خواهند داشت. از این رو لازم است این سازه‌ها به گونه‌ای طراحی شوند که حداقل مقدار زیان پس از حوادث آتش‌سوزی احتمالی را داشته باشند. در این مقاله یک روش حل بسته تحلیلی برای پیش‌بینی منحنی‌های لنگر - دوران و سختی - دوران اتصالات تیر I شکل به ستون لوله‌ای که عمدتاً در عرشه سکوها نفتی استفاده می‌شود، در دمای بالا ارائه شده است. لنگر تسلیم و لنگر خمیری مورد نیاز در این مدل از توسعه روابط Roark به دست آمده است. نتایج حاصل از این مدل تحلیلی با مدل اجزای محدود کوپل مکانیکی - حرارتی غیرخطی که قبلاً توسط مؤلف ارائه شده، مقایسه شده است که این مدل اجزای محدود به نوبه خود با استفاده از آزمایش‌های مقیاس کوچک و بزرگ اعتبارسنجی گردیده است. تطابق قابل قبولی بین نتایج این مدل تحلیلی و مدل آزمایشگاهی/عددی نیز وجود دارد.

۱- مقدمه

در تحلیل و طراحی مرسوم سازه‌های فولادی، معمولاً فرض می‌شود که اتصالات تیر - ستون کاملاً صلب یا کاملاً مفصلی می‌باشند. فرض صلب بیان می‌کند که سختی اتصال نسبت به سختی تیر و ستون خیلی زیاد است در حالی که فرض مفصلی اتصال بیانگر سختی کم اتصال نسبت به سختی اعضای متصل به آن می‌باشد. آزمایش Nader and Astaneh [۱] با تمرکز روی رفتار اتصالات نشان دادند که اتصالات رفتار غیرخطی مابین صلبیت کامل و مفصلی کامل دارند؛ بنابراین اتصالات در واقعیت دارای رفتاری نیمه صلب می‌باشند. اخیراً تأثیر اتصالات نیمه صلب روی پاسخ واقعی سازه‌های مورد توجه قرار گرفته، تدابیری برای تحلیل سازه‌ها با اتصالات نیمه صلب در چندین آیین‌نامه طراحی سازه‌های فولادی داده شده است. در آیین‌نامه AISC (ویرایش ۳۶۰-۲۲)، به طور خاص به اتصالات نیمه صلب پرداخته و روش‌های تحلیل و طراحی آن‌ها را ارائه می‌دهد. در این

ویرایش، بخش‌هایی به رفتار غیرخطی اتصالات و تأثیر آن‌ها بر عملکرد سازه‌ها می‌پردازد [۲]. همچنین در ویرایش سال ۲۰۱۵ استاندارد Euro-code 3 (یکی از استانداردهای مهم در طراحی سازه‌های فولادی در اروپا)، به بررسی اتصالات نیمه صلب و تأثیر آن‌ها بر رفتار سازه‌ها پرداخته شده است. این آیین‌نامه به تحلیل‌های غیرخطی و مدل‌سازی اتصالات نیز اشاره دارد [۳]. علاوه بر آیین‌نامه‌های مذکور، تحقیقات مختلفی نیز راجع به پاسخ اتصالات و تأثیر آن بر رفتار سازه انجام شده است. در سال ۲۰۲۲ وینکل و همکاران، به بررسی اتصالات تیر I شکل به ستون‌های لوله‌ای در عرشه سکوها نفتی پرداختند و به این نتیجه رسیدند که این اتصالات تحت بارهای دینامیکی و دماهای بالا به طور قابل توجهی رفتار غیرخطی از خود نشان می‌دهند [۴]. در مطالعه‌ای دیگر علی و همکاران به تحلیل منحنی‌های لنگر - دوران اتصالات تیر I شکل به ستون‌های لوله‌ای پرداختند و نشان دادند که این منحنی‌ها می‌توانند به بهبود طراحی سازه‌های دریایی کمک کنند [۵]. سینیدا و همکاران نیز به بررسی اثرات دما بر عملکرد اتصالات تیر

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: hoseini@mut.ac.ir



که عموماً از نتایج آزمایش بدست می‌آید بیان می‌شود.

برای آن که بتوان منحنی‌های $(M - \varphi)$ را در برنامه کامپیوتری تحلیل قاب لحاظ نمود، رابطه لنگر-دوران توسط توابع ریاضی بیان می‌شود.

۳- طبقه بندی مدل های اتصال

در واقع، رفتار اتصال به صورت مجموعه‌ای از روابط لنگر - دوران ساده سازی می‌شود. به طور ریاضی، این روابط در فرم عمومی

$$M = f(\varphi) \quad (۱)$$

یا

$$\varphi_c = g(M) \quad (۲)$$

که f و g توابع ریاضی؛ M لنگر خمشی در اتصال؛ و φ دوران اتصال می‌باشد. اساساً، طبقه بندی روابط لنگر- دوران اتصالات به سه نوع اصلی مدل های تحلیلی، ریاضی و ترکیبی تقسیم می‌شوند. در مدل های تحلیلی، روابط $M - \varphi$ بر اساس خصوصیات فیزیکی اتصال استخراج می‌گردند. در مدل های ریاضی، از یک تابع ریاضی که پارامترهای آن با نتایج آزمایش به دست آمده اند استفاده می‌شود. در نهایت، در مدل های ترکیبی نتایج مدل های تحلیلی، ریاضی با هم ترکیب می‌شوند.

۴- انواع مدل های اتصال

چندین مدل ترکیبی و ریاضی برای ارائه منحنی های $M - \varphi$ اتصالات وجود دارد. از جمله آن ها، مدل های خطی، دو خطی، سه خطی، چند جمله ای، مدل خط کران دار^۱ و مدل توانی می‌باشند. کاربرد مدل های خطی و دوخطی ساده تر می‌باشند؛ با این وجود خطای آن ها بالا بوده و در نقاط تغییر شیب این منحنی ها تغییرات شدیدی در سختی اتصال ظاهر می‌شود. مدل چندجمله ای قادر به ارائه یک تقریب خوب می‌باشد، افزون بر این در بعضی نقاط سختی منفی برای اتصال ارائه می‌دهد.

۴-۱- مدل خطی

این ساده ترین مدل اتصال می‌باشد و تنها نیاز به یک پارامتر برای تعریف سختی اتصال می‌باشد. تابع $M - \varphi$ به شکل زیر قابل بیان است:

I شکل پرداختند و دریافتند که این اتصالات باید به گونه ای طراحی شوند که در شرایط حرارتی مختلف عملکرد بهینه داشته باشند [۶]. در مقاله ای دیگر، به بررسی اثرات بارهای جانبی بر اتصالات تیر I شکل به ستون های لوله ای در سکوها ی نفتی پرداختند و پیشنهاداتی برای بهبود طراحی ارائه کردند [۷]. پاور و همکاران نیز در سال ۲۰۲۲ به مطالعه رفتار غیرخطی اتصالات تیر I شکل به ستون های لوله ای پرداختند و نشان دادند که این رفتار تحت شرایط بارگذاری متفاوت به شدت تغییر می‌کند [۸]. در تحقیقی دیگر که توسط یانگ و همکاران انجام شد، آن ها به تحلیل و طراحی اتصالات تیر I شکل به ستون های لوله ای در سکوها ی نفتی پرداختند و به این نتیجه رسیدند که بهینه سازی طراحی می‌تواند باعث افزایش ایمنی و کارایی سازه ها شود [۹]. همان طور که ملاحظه شد طبق بررسی انجام شده توسط مؤلفین مقاله، تا کنون، مدل تحلیلی کاملی جهت بررسی اتصالات تیر I شکل به ستون لوله ای ارائه نشده است. فلذا در این تحقیق، مدل مناسبی برای پیش بینی رفتار اتصالات تیر I شکل به ستون لوله ای عرشه سکوها ی نفتی در دمای بالا ارائه می‌شود. لازم به ذکر است که تاثیر خزش ناشی از حرارت در پاسخ سازه ها و اتصالات مهم می‌باشد و تحقیقات مختلفی در این حوزه صورت گرفته است [۱۰] و [۱۱]؛ با این وجود، به علت اینکه هدف از این تحقیق، بررسی پاسخ کوتاه مدت اتصال می‌باشد فلذا به موضوع خزش پرداخته نشده است.

۲- رفتار اتصال

در ساخت سازه های فولادی، اتصالات تیر به ستون به طور گسترده ای استفاده می‌شوند. در واقعیت فرض صلبیت کامل یا مفصلی کامل اتصالات تیر - ستون که بسیار متداول است چندان واقعی نمی‌باشد. آزمایش های زیادی نشان داده اند که اتصالات واقعی رفتار غیرخطی دارند که از تسلیم تدریجی ورق ها، نبشی های اتصال، پیچ ها ناشی می‌شوند. مشخصه های رفتاری اتصالات پیچیده می‌باشد همچنین عدم قطعیت های زیادی در رفتار اتصال حاکم می‌باشد که تأثیرات غیرخطی بودن قاب مسئله را بزرگ تر می‌کند. از جمله موارد دخیل، نقص هندسی، تنش پسماند ناشی از جوشکاری، تمرکز تنش، تأثیرات ثانویه ناشی از تغییر شکل چشمه اتصال می‌باشد. برای اغلب اتصالات، تغییر شکل های محوری و برشی در مقایسه با تغییر شکل های خمشی ناچیز می‌باشد، برای سادگی، عموماً فقط رفتار دورانی اتصالات ناشی از عملکرد خمشی در نظر گرفته می‌شود [۱۲].

رفتار غیرخطی یک اتصال با کمک منحنی لنگر - دوران $(M - \varphi_c)$

1. Bounding line

$$S_c = \frac{dM}{d\varphi} \quad (6)$$

$$= \frac{1}{C_1(K) + 3C_2K(KM)^2 + 5C_3K(KM)^4}$$

۴-۴-۴ مدل توانی

چندین مدل توانی برای انواع مختلف اتصالات ارائه شده است. معمولاً دو یا سه پارامتر در توابع مختلف مورد نیاز می‌باشد. مدل توانی دو پارامتری [۱۵] دارای شکل ساده زیر است:

$$\varphi_c = aM^b \quad (7)$$

و سختی اتصال؛

$$S_c = \frac{dM}{d\varphi} = \frac{1}{abM^{b-1}} \quad (8)$$

که a و b دو پارامتر همسان سازی منحنی‌ها در شرایط $a > 0$ و $b > 1$ می‌باشد.

بکار بردن مدل توانی برای تبیین منحنی‌های $M - \varphi$ غیر خطی اتصالات از مزایایی برخوردار است. اولاً، این مدل‌ها همیشه دارای مشتق مثبت هستند (یعنی مقدار سختی اتصال همواره مثبت است) که این ویژگی مخصوصاً برای جلوگیری از وقوع سختی منفی در اتصال اهمیت دارد. این مدل، یک منحنی هموار بدون تغییر ناگهانی در شیب می‌باشد. ثانیاً، آنها نیاز به تعداد پارامترهای اندکی در بیان منحنی $M - \varphi$ و محاسبه سختی اتصال دارد. ثالثاً، این مدل‌ها یک تطبیق خوب با منحنی‌های $M - \varphi$ داده‌های آزمایشگاهی دارند (شکل ۱-ب)

۴-۵-۵ مدل خط کران دار

Al-Bermani و همکاران [۱۶] و Zhu و همکاران [۱۷] یک مدل خط کران دار پیشنهاد کرده‌اند که نیاز به ۴ پارامتر برای تعیین روابط $M - \varphi$ دارد (همانطور که در شکل ۱-ج نشان داده شده است). بر مبنای این مدل، منحنی لنگر- دوران به سه بخش تقسیم می‌شود. بخش اول و سوم، به ترتیب بخش خطی ارتجاعی و بخش خطی خمیری منحنی $M - \varphi$ می‌باشند. بین این دو بخش، یک منحنی انتقالی هموار برازش داده می‌شود.

$$M = S_c^o \varphi \quad (3)$$

در این رابطه، S_c^o مقدار ثابت سختی اولیه اتصال می‌باشد. مقادیر S_c^o اغلب از آزمایش بدست می‌آید. یک تابع ساده از S_c^o می‌تواند بصورت عباراتی از سختی تیر بیان شود. Lightfoot and LeMessurier در سال ۱۹۷۴ سختی اتصال را بصورت رابطه زیر فرض کردند:

$$S_c^o = \lambda \frac{4EI}{L} \quad (4)$$

در این رابطه، EI و L به ترتیب صلبیت خمشی و طول تیر می‌باشند؛ و λ ضریب صلبیت اتصال می‌باشد که میزان انعطاف پذیری اتصال را نشان می‌دهد [۱۳].

۴-۲-۲ مدل چند خطی

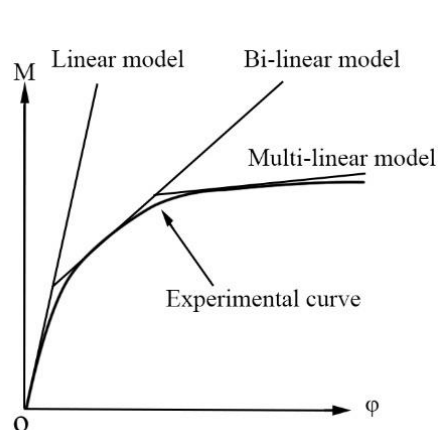
در مدل خطی که در بالا توضیح داده شد، فرض خطی فقط در محدوده بارگذاری کوچک مناسب است. افزون بر این در تحلیل تغییر شکل‌های بزرگ، کاهش سختی اتصالات باید مدنظر قرار گیرد. مدل دوخطی و چندخطی برای افزایش دقت تحلیل پیشنهاد می‌شود (شکل ۱-الف).

۴-۳-۳ مدل چند جمله‌ای

برای تعیین یک منحنی $M - \varphi$ هموارتر، Frye and Morris یک تابع چند جمله‌ای با توان فرد را پیشنهاد دادند. شکل کلی این تابع به شکل زیر می‌باشد [۱۴].

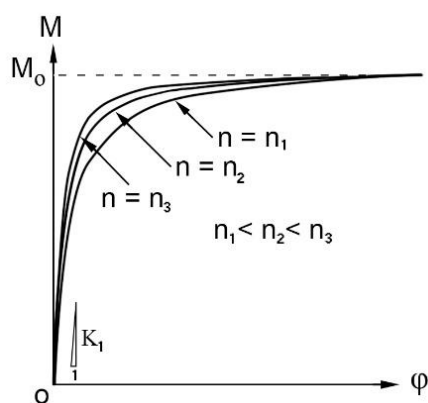
$$\varphi = C_1(KM)^1 + C_2(KM)^3 + C_3(KM)^5 \quad (5)$$

که K پارامتر استاندارد سازی می‌باشد که تابعی از پارامترهای هندسی مهم مانند ابعاد هندسی اعضای متصل شده، ضخامت ورق و غیره می‌باشد؛ C_1 ، C_2 و C_3 ثابت‌های همسان سازی منحنی‌ها هستند. شیب منحنی، که سختی مماسی اتصال می‌باشد، S_c ، توسط رابطه زیر بیان می‌شود.



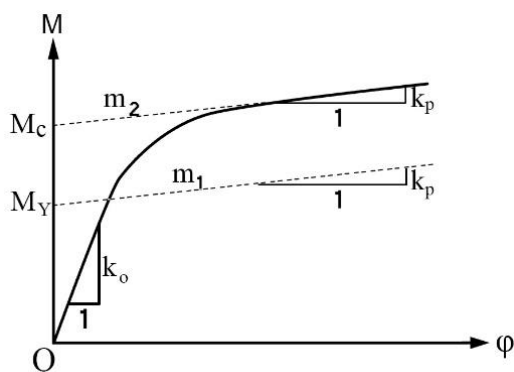
(الف)

(a)



(ب)

(b)



(ج)

(c)

شکل ۱. انواع مختلف مدل‌های اتصال [۱۲]. الف) مدل‌های خطی شده، ب) مدل‌های قدرت، ج) مدل‌های خط مرزی

Fig. 1. Different types of connection models [12]. a) Linearized Models, b) Power Models, c) Bounding-Line Model

از آنجایی که منحنی کامل $M - \varphi$ توسط سه بخش متصل می‌شود، لنگر نمی‌تواند بصورت یک تابع منفرد از دوران اتصال نوشته شود. فرم این مدل به شکل زیر است

$$M = \Sigma M \quad (9)$$

که

$$M = k_j \varphi \quad (10)$$

سختی مماسی اتصال، k_j در بخش‌های مختلف به شکل زیر فرض

می‌شود

$$k_i = \begin{cases} k_o & M < m_1 \\ k_o + \frac{M - m_1}{M_c - M_y} (k_p - k_o) & m_1 \leq M \leq m_2 \\ k_p & M > m_2 \end{cases} \quad (11)$$

که

$$\begin{aligned} m_1 &= M_y + k_p \cdot \varphi_c \\ m_2 &= M_c + k_p \cdot \varphi_c \end{aligned} \quad (12)$$

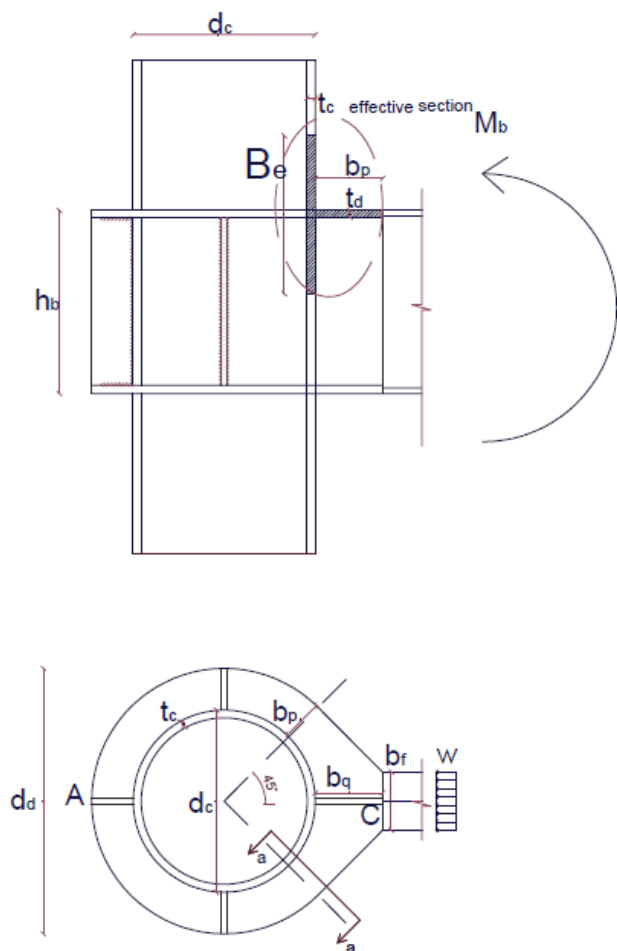
در این روابط، k_o سختی اولیه، k_p سختی کران‌دار، M_y لنگر تسلیم و M_c لنگر کران‌دار می‌باشد (شکل ۱-ج).

۵- پیش‌بینی منحنی‌های لنگر-دوران اتصال تیر I شکل به ستون لوله‌ای در دمای معمولی

۵-۱- تعیین لنگر تسلیم مقطع

در این بخش، به تحلیل محاسباتی پاسخ اتصالات تیر I شکل به ستون لوله‌ای عرشه سکوها نفتی در برابر لنگر خمشی پرداخته می‌شود و مناسب‌ترین مدل برای پیش‌بینی منحنی $M - \varphi$ این اتصالات به همراه روابط محاسباتی استخراج می‌شود. روند کار به طور خلاصه به ترتیب زیر می‌باشد:

۱- محاسبه سطح مؤثر و تنش ناشی از خمش در اتصال از روابط رایج طراحی اتصال تیر I شکل به ستون لوله‌ای اقتباس شده است.



شکل ۲. نمایشی از اتصالات تیپ تیر I شکل به ستون لوله‌ای [۱۹]

Fig. 2. A view of I-shaped beam to cylindrical column connection [19]

$$A' = \left[\frac{-R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75b_f}{\pi} \right] \quad (16)$$

$$B = -\frac{y_{1,2}}{I} \quad (17)$$

$$C' = \frac{b_f R}{\pi} \quad (18)$$

$$D' = \frac{-b_f}{2\pi} \quad (19)$$

۲- نیروهای داخلی در سطوح مختلف اتصال، با استفاده از روابط Roark [۱۸] محاسبه شده است.

۳- همان‌طور که در ادامه به تفصیل گفته خواهد شد، به علت تشابه منحنی‌های عددی $M - \phi$ اتصال تیر I شکل به ستون لوله‌ای عرشه سکوهاى نفتی به مدل خط کران‌دار، از این مدل برای پیش‌بینی منحنی‌های $M - \phi$ و $k_j - \phi$ اتصالات استفاده شده است.

۴- باتوجه به بخش قبل، برای استفاده از مدل خط کران‌دار لازم است که لنگر تسلیم، M_y ، لنگر خمیری، M_{pl} ، دوران متناظر با لنگر تسلیم، ϕ_y و دوران متناظر با لنگر خمیری، ϕ_{pl} ، می‌باشد. با استفاده از تنش در سطح مقطع موثر، لنگر تسلیم و لنگر خمیری توسط مولف محاسبه شده است. ϕ_y و ϕ_{pl} نیز، با توجه به منحنی‌های $M - \phi$ محاسبات عددی، ۳۵ و ۴/۸ میلی‌رادیان پیشنهاد شده است. با مشخص شدن این چهار پارامتر، منحنی‌های $M - \phi$ و $k_j - \phi$ این اتصالات، با استفاده از مدل خط کران‌دار توسط مولف ارائه شده است.

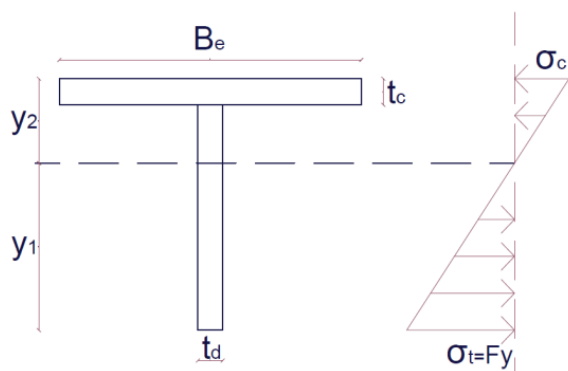
در شکل ۲، نمایشی از یک اتصال تیپ تیر I شکل به ستون لوله‌ای نشان داده شده است. مقطع موثر در پاسخ اتصال به لنگر خمشی، در این شکل و به طور واضح‌تر در شکل ۳ نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۳ بوضوح مشخص است قسمتی از دیواره ستون و قسمتی از ورق دیافراگم خارجی به عنوان هندسه موثر در برابر لنگر خمشی عمل می‌کنند. طبق نتایج تحقیقات قبلی محققین این مقاله، میزان حداکثر تنش فون میسز در این اتصال، تابعی از هندسه اتصال (α) و میزان بار (W) وارده می‌باشد [۱۹]. یعنی:

$$\sigma_{von(max)} = w \cdot \alpha \quad (13)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(BE' + BA'R - BC') + (-0.707) \cdot (-BA'R + BC' + FA') + 0.834BC' + 1.67FD'}{+3[(-0.707)(FA' + FD') - 1.67FD']^2}} \quad (14)$$

که در این رابطه:

$$A = \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] = w \cdot A' \quad (15)$$



شکل ۴. توزیع تنش محوری ناشی از لنگر تسلیم خمشی و تسلیم دورترین تار [۱۹].

Fig. 4. Distribution of axial stress in the section [19].

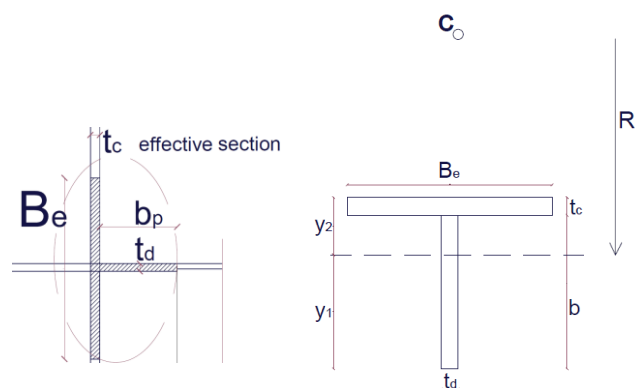
پس با داشتن مشخصات هندسی اتصال تیر I شکل به ستون لوله‌ای عرشه سکوها‌ی نفتی و میزان لنگر وارده، می‌توان طبق روابط بالا حداکثر میزان تنش فون میس را محاسبه کرد. باتوجه‌به اینکه، هدف از این مطالعه، محاسبه منحنی $M - \phi$ اتصال می‌باشد بنابراین لازم است ابتدا میزان لنگر تسلیم و لنگر خمیری اتصال محاسبه شود. برای محاسبه لنگر تسلیم، (M_y) ، باید میزان تنش فون میس در مقطع، مطابق شکل ۴ به تنش تسلیم برسد. برای نیل به این هدف، آن قدر میزان w افزایش داده می‌شود تا تنش فون میس به تنش تسلیم برسد:

$$\rightarrow \sigma_{von(max)} = F_y \rightarrow w_y \cdot \alpha = F_y \quad (23)$$

$$\begin{cases} w_y = \frac{F_y}{\alpha} \\ w_y = \frac{M_y}{S_{x,beam}} \times t_f \\ M_y = \frac{F_y \cdot S_{x,beam}}{\alpha \cdot t_f} \end{cases} \rightarrow \quad (24)$$

۵-۲- تعیین لنگر خمیری مقطع

به علت وجود برش و نیروی محوری، بخشی از ظرفیت خمشی مقطع توسط برش و نیروی محوری خنثی می‌شود. پس لنگر خمشی خالص کاهش می‌یابد. در شکل ۵، میزان مشارکت نیروی برشی، نیروی محوری و لنگر



Effective Section
Section a-a

شکل ۳. مقطع موثر اتصال در برابر لنگر خمشی وارد بر آن [۱۹].

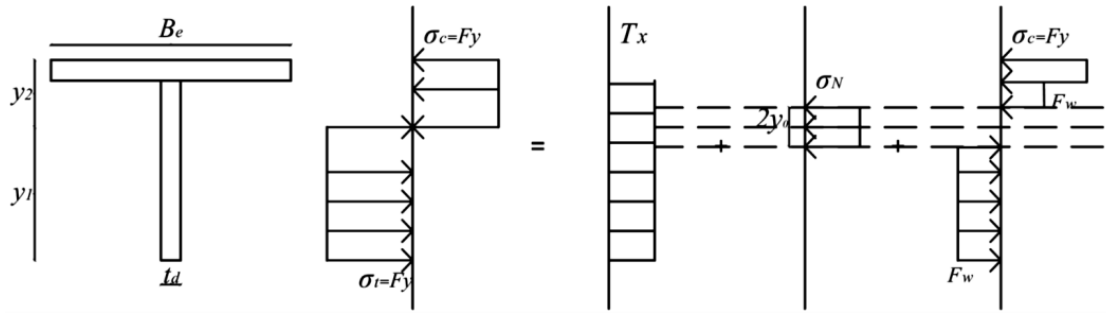
Fig. 3. Effective flexural cross-section [19].

$$E' = \frac{R^2}{2\pi} \left(\pi(s^2 - 0.5) - \frac{sc - \theta}{2} - s^2 \left(\theta + \frac{2s}{3} \right) - k_2(2s + sc - \pi + \theta) + \left(\frac{b_f R}{2\pi} (k_2 - 0.5) \right) \right) \quad (20)$$

$$F = \frac{1}{A} \quad (21)$$

$$s = \sin \theta, c = \cos \theta \quad (22)$$

و d_c و d_d به ترتیب قطر خارجی ستون و قطر معادل ورق دیافراگم، b_f ، b_p ، b_q و B_e به ترتیب عرض بال تیر، عرض حداقل دیافراگم، عرض حداکثر دیافراگم و عرض موثر مقطع می‌باشد (شکل ۳). y_1 ، y_2 ، I_x و S_x به ترتیب ارتفاع اول و دوم از تار خنثی مقطع موثر، ممان اینرسی و اساس مقطع حول محور x می‌باشد (شکل ۳). θ و R پارامترهای هندسی مشخص شده در شکل، α و k_2 پارامترهای واسطه هستند. M_b ، $S_{x,beam}$ و w به ترتیب لنگر وارد بر اتصال، اساس مقطع تیر، بار خطی وارد بر بال تیر و بار وارد بر بال تیر یا اتصال می‌باشد [۱۹]. لازم به ذکر است که جزئیات استخراج روابط، در پیوست ۱ ارائه شده است.



شکل ۵. نحوه مشارکت انواع بارهای وارد بر مقطع در به تسلیم رساندن کل مقطع [۱۹]

Fig. 4. Contribution of axial force, shear force and bending moment in yielding the entire section [19]

$$M_{x2} = w \cdot \left| \frac{(BE' + BA'R - BC')}{+(-0.707) \cdot (-BA'R + BC') + 0.834BC'} \right| \quad (30)$$

خمشی در به تسلیم رساندن کل مقطع نشان داده شده است.

$$\tau_x = w[(-0.707)(FA' + FD') - 1.67FD'] \quad (25)$$

$$F_w = \sqrt{F_y^2 - 3\tau_x^2} \quad (26)$$

$$\sigma_N = F_w = \frac{N_x}{A_o} = w \cdot \frac{-0.834BC' + 0.707FD'}{t_d \cdot 2 \cdot y_0} \quad (27)$$

$$\rightarrow y_0 = w \cdot \frac{-0.834BC' + 0.707FD'}{2t_d \cdot F_w} \quad (28)$$

برای اینکه میزان بار اعمالی برای رساندن لنگر به لنگر تسلیم، به دست آید لازم است که میزان لنگر لازم برای رسیدن تمام عضو به تنش تسلیم، $M_{x1} = M_{pl}$ ، با لنگر اعمالی بر سطح مقطع موثر عضو در زاویه بحرانی ۱۳۵ درجه، M_{x2} ، مساوی قرار داده شود تا $w = w_{pl}$ بدست آید:

$$\begin{aligned} M_{x1} &= M_{x2} \\ \rightarrow F_y \cdot B_e \cdot t_c \cdot (y_2 - 0.5t_c) + \\ F_w \cdot 0.5t_d \cdot [(y_2 - t_c - y_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] &= \\ w \cdot |(BE' + BA'R - BC') + \\ (-0.707) \cdot (-BA'R + BC') + 0.834BC'| \end{aligned} \quad (31)$$

$$\rightarrow w = w_{pl} \quad (32)$$

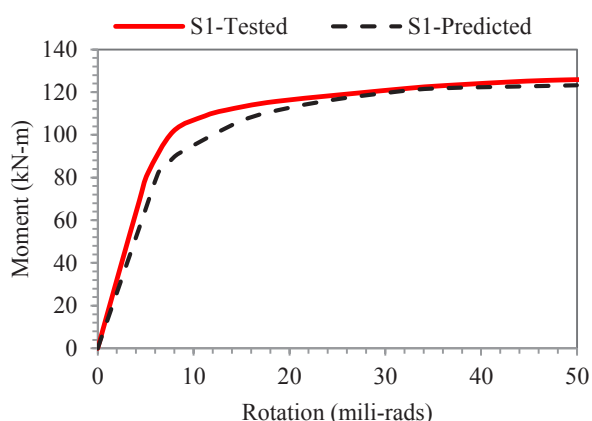
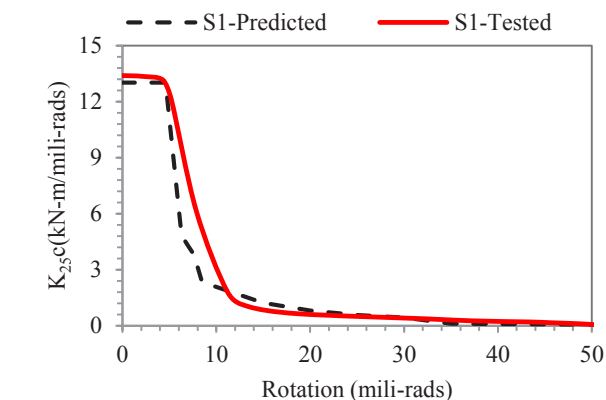
با سعی و خطا، آن قدر w تغییر داده می‌شود تا $M_{x1} = M_{x2}$ شود. پس مشاهده شد که با استفاده از خصوصیات مقطع، میزان لنگر تسلیم و لنگر خمیری برای اتصالات تیر I شکل به ستون لوله‌ای قابل محاسبه است.

۵-۳- ارائه مدل تحلیلی برای محاسبه منحنی‌های $M - \phi$ و $k_j - \phi$ اتصالات تیر I شکل به ستون لوله‌ای

در جدول ۱ انواع اتصالات تیر I شکل به ستون لوله‌ای عرشه سکوه‌ای نفتی نشان داده است. در شکل ۶ منحنی $M - \phi$ این اتصالات در دمای

در روابط بالا، τ_x میزان تنش ناشی از بار برشی، y_0 و F_w به ترتیب، سطح موثر اعمال بار محوری و میزان تنش معادل بار محوری در سطح موثر اعمالی برای رساندن تنش فون میس به تنش تسلیم می‌باشد.

$$\begin{aligned} M_{x1} &= M_{pl} = F_y \cdot B_e \cdot t_c \cdot (y_2 - 0.5t_c) \\ &+ F_w \cdot 0.5t_d \cdot [(y_2 - t_c - y_0)^2 + (y_1 - y_0)^2] \end{aligned} \quad (29)$$



شکل ۷. منحنی سختی- دوران و لنگر- دوران آزمایش اتصال مقیاس کوچک تیر I شکل به ستون لوله‌ای و مقایسه آن با مدل خط کران دار پیشنهادی

Fig. 7. Experimental stiffness-rotation and moment-rotation curves of the small-scale I-shaped beam to cylindrical column connection compared to those of the proposed bounding line model

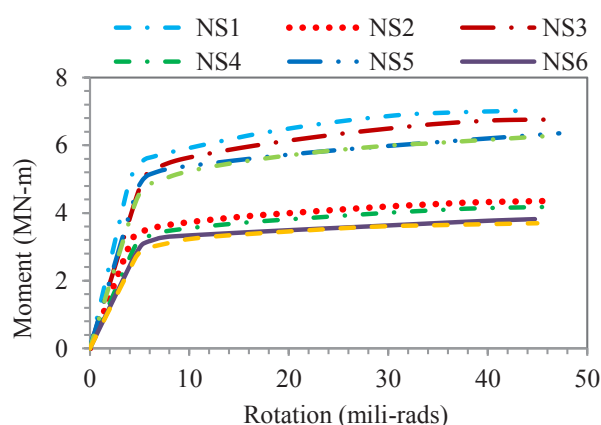
می‌باشد. سختی در قسمت خطی ارتجاعی، k_o ، برابر $\frac{M_y}{\phi_y}$ و در قسمت خطی خمیری، k_p ، برابر $\frac{e}{k_o} \cdot E$ می‌باشد که از تناسب قرار دادن با سختی قسمت خطی ارتجاعی بدست می‌آید. میزان دوران مربوط به لنگر تسلیم، ϕ_y و میزان دوران مربوط به لنگر خمیری، ϕ_{pl} ، با استفاده از منحنی‌های عددی به ترتیب برابر $\frac{4}{8}$ و $\frac{35}{8}$ میلی‌رادیان پیشنهاد می‌شود. در روابط فوق، E مدول ارتجاعی و e سختی‌شدگی کرنشی فولاد می‌باشد.

برای اینکه میزان صحت این روابط مشخص شود، نتایج این مدل تحلیلی با نتایج آزمایش مقایسه شده است. در این آزمایش، یکی از اتصالات مقیاس کوچک تیر I شکل به ستون لوله‌ای در برابر لنگر خمشی و در دمای معمولی آزمایش شده است. در شکل ۷، مقایسه بین منحنی $M - \phi$ و

جدول ۱. انواع اتصالات با مقیاس کامل تیر I شکل به ستون لوله‌ای عرشه [۱۹]

Table 1. Characteristics of the full-scale I-shaped beam to cylindrical column connections [19]

Model number	Column Section PIPE (mm)	Beam Section (mm)						External Diaphragm (mm)
		d_c	t_c	h_b	b_f	t_f	t_w	
NS1	1100	65	1000	300	35	20	50	250
NS2	1100	65	800	300	30	15	40	250
NS3	1100	50	1000	300	35	20	50	250
NS4	1100	50	800	300	30	15	40	250
NS5	1100	65	1000	300	35	20	40	250
NS6	1100	65	800	300	30	15	30	250
NS7	1100	50	1000	300	35	15	50	250
NS8	1100	50	800	300	30	10	40	250



شکل ۶. منحنی لنگر- دوران اتصالات تیر I شکل به ستون لوله‌ای در دمای معمولی.

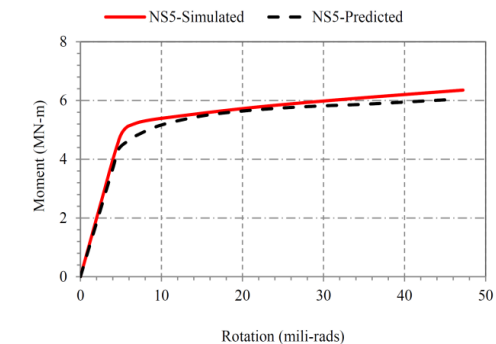
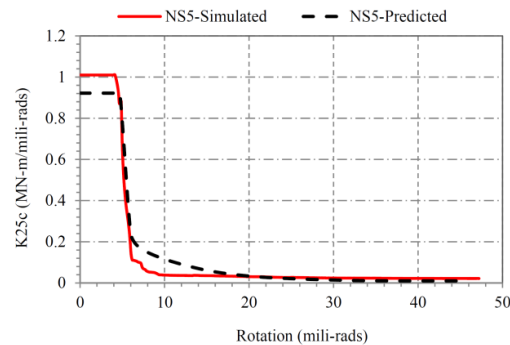
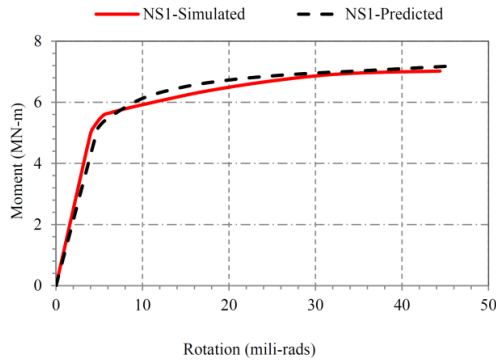
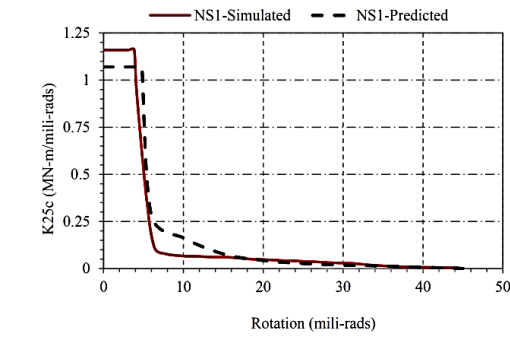
Fig. 6. Moment-rotation curves for I-shaped beam to cylindrical column connections in ordinary temperature

معمولی ارائه شده است. با توجه به منحنی‌های $M - \phi$ ، مدل خط کران دار برای پیش بینی نمودار ممان- دوران اتصالات تیر I شکل به ستون لوله‌ای عرشه سکوها‌ی نفتی پیشنهاد می‌شود. در مدل خط کران دار، همانطور که در بخش قبل اشاره شد، منحنی سختی شامل ۳ بخش، خطی ارتجاعی، خطی خمیری و یک بخش واسط می‌باشد. در مدل خط کران دار پیشنهادی برای اتصال تیر I شکل به ستون لوله‌ای، سختی منحنی در قسمت ارتجاعی و خمیری خطی، به ترتیب متناسب با مدول ارتجاعی و سخت‌شدگی کرنشی

جدول ۲. میزان لنگرهای تسلیم و سختی نواحی خطی ارتجاعی و خطی خمیری.

Table 2. The values of yield and plastic moments and the stiffness of the connection in linear elastic and linear plastic zones

Model number	Linear Elastic Zone		Linear Plastic Zone	
	M_y	k_y	M_{pl}	k_{pl}
	(kN.m)	(kN.m/mili-rads)	(kN.m)	(kN.m/mili-rads)
NS1	5136	1060	7029	4.8
NS2	2993	629	4362	2.8
NS3	4549	945	6407	4.3
NS4	2758	583	3989	2.6
NS5	4355	915	6187	4.1
NS6	2691	564	3625	2.5
NS7	4323	903	5995	4
NS8	2617	545	3568	2.5



شکل ۸. منحنی‌های سختی- دوران و لنگر- دوران با مدل خط کران‌دار پیشنهادی برای اتصالات ۱ و ۵ و مقایسه آن با مدل عددی

Fig. 8. Comparison of stiffness-rotation and moment-rotation curves of different types of connections using the bounding line model and numerical results

$k_j - \varphi$ آزمایش با منحنی‌های مدل تحلیلی پیشنهادی، ارائه شده است. در جدول ۲، میزان لنگرهای تسلیم و خمیری و همچنین سختی نواحی خطی ارتجاعی و خطی خمیری با استفاده از روابط ذکر شده در بخش قبل برای اتصال جدول ۱ ارائه شده است. میزان سختی اتصال در سه ناحیه مذکور، به شکل ذیل بیان می‌شود:

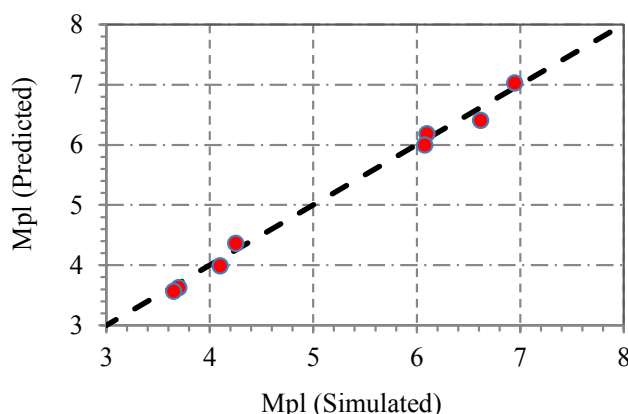
$$M = k_j \cdot \varphi \quad (33)$$

$$k_i = \begin{cases} k_o & M < m_1 \\ k_o + \frac{M - m_1}{M_c - M_y} (k_p - k_o) & m_1 \leq M \leq m_2 \\ k_p & M > m_2 \end{cases} \quad (34)$$

که

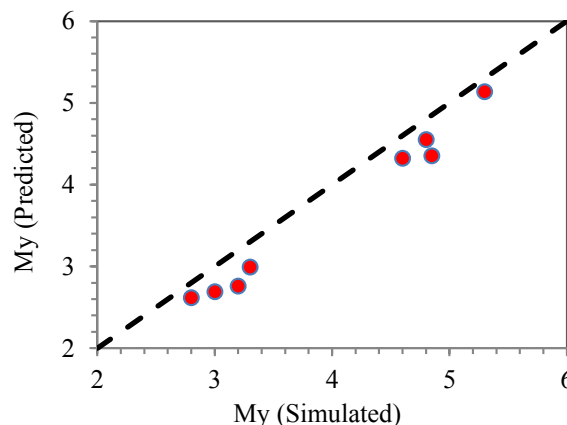
$$\begin{aligned} m_1 &= M_y + k_p \cdot \varphi_c \\ m_2 &= M_{pl} = M_c + k_p \cdot \varphi_c \end{aligned} \quad (35)$$

با استفاده از مقادیر جدول ۲ و همچنین استفاده از روابط سختی مدل خط کران‌دار، منحنی‌های $M - \varphi$ و $k_j - \varphi$ برای اتصال جدول ۱ تهیه شده و در شکل ۸، نتایج مدل‌های تحلیلی با مدل‌های عددی اتصالات



شکل ۱۰. مقایسه نتایج مدل تحلیلی با مقادیر مدل عددی در محاسبه لنگر خمیری (نقاط هر چه به خط نیمساز نزدیک باشند، نشان از تطابق بیشتر نتایج تحلیلی و عددی می باشد).

Fig. 10. Comparisons of the results obtained using analytical and numerical models for plastic moment (the closer the points are to the bisector, the greater the agreement between the analytical and numerical results).



شکل ۹. مقایسه میزان تطابق نتایج مدل تحلیلی با مقادیر مدل عددی در محاسبه لنگر تسلیم (نقاط هر چه به خط نیمساز نزدیک باشند، نشان از تطابق بیشتر نتایج تحلیلی و عددی می باشد).

Fig. 9. Comparison of the agreement of the results of the analytical model with the values of the numerical model in the calculation of the yield anchor (the closer the points are to the bisector, the greater the agreement between the analytical and numerical results).

قابل توجه سختی بین نتایج پیش‌بینی و عددی در ناحیه خطی ارتجاعی، عمدتاً بخاطر اختلاف در محاسبه لنگر تسلیم اتصال و دوران متناسب با لنگر تسلیم اتصال می‌باشد. در شکل ۹ و ۱۰، مقایسه نتایج مدل تحلیلی با مقادیر مدل عددی در محاسبه لنگر تسلیم و خمیری نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۹ و شکل ۱۰ بوضوح مشخص است، توافق نسبتاً خوب نتایج مدل تحلیلی با نتایج مدل عددی را در محاسبه لنگر تسلیم و لنگر خمیری اتصال نشان می‌دهد. البته در محاسبه لنگر خمیری، میزان تطابق جواب‌ها با یکدیگر بیشتر از تطابق لنگر تسلیم می‌باشد.

۶- پیش‌بینی نمودارهای لنگر-دوران اتصال تیر I شکل به ستون لوله‌ای در دماهای بالا

در بخش قبل، روابط تحلیلی برای محاسبه منحنی‌های $M - \phi$ و $k_j - \phi$ اتصالات تیر I شکل به ستون لوله‌ای در دمای معمولی ارائه شد. همان‌طور که مشاهده شد برای تخمین این منحنی‌ها، کافیت لنگر تسلیم، لنگر خمیری، سختی بخش ارتجاعی خطی و خمیری خطی را محاسبه کرد. با توجه به اینکه سختی اتصال در بخش ارتجاعی خطی عمدتاً وابسته به مدول ارتجاعی و در دو بخش بعدی عمدتاً وابسته به تنش تسلیم اعضا می‌باشد، به عنوان یک تخمین اولیه می‌توان گفت که برای تخمین نمودارهای

۱ و ۵ مقایسه شده‌اند.

برای مدل‌سازی عددی اتصالات در این مقاله، از نرم‌افزار اجزای محدود ABAQUS 6.18 استفاده شده است. باتوجه به اینکه در این مطالعه، رفتار سازه اتصال در برابر حرارت و بار مکانیکی به‌صورت هم‌زمان بررسی می‌شود، لازم است از تحلیل و المان‌هایی استفاده شود که قابلیت لحاظ کردن توأمان حرارت و بار مکانیکی را داشته باشند. در این نرم‌افزار، هر دوی این انتظارات برآورده شده‌اند؛ بدین ترتیب که تحلیل در گیر دما - تغییر مکان برای تحلیل سازه در برابر بار مکانیکی و حرارت تعریف شده است. در نرم‌افزارهای اجزای محدود از جمله ABAQUS، باتوجه به نوع تحلیل، المانی که بتواند شرایط آن تحلیل را داشته باشد پیش‌بینی شده است. در این تحلیل، باید المانی استفاده شود که بتواند هم‌زمان تغییرات تنش - تغییر شکل و حرارت را در نظر بگیرد. همچنین، به علت اینکه لازم است تغییرات در ضخامت المان هم دیده شود، از المان SOLID سه‌بعدی استفاده می‌شود؛ بنابراین، با لحاظ کردن تمام شرایط، المان C3D8T که یک المان SOLID سه‌بعدی ۸ گره‌ای با در نظر گرفتن شرایط حرارتی است، استفاده می‌شود [۲۰].

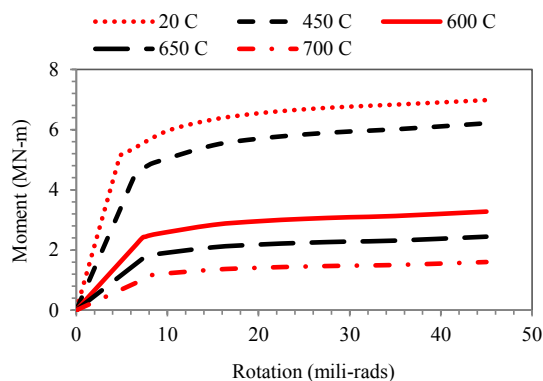
همان‌طور که از شکل ۸ به خوبی مشخص است، با استفاده از روابط ارائه شده در بخش قبل، به راحتی می‌توان منحنی‌های $M - \phi$ و $k_j - \phi$ را با دقت قابل قبولی محاسبه کرد. در منحنی‌های $k_j - \phi$ ، اختلاف نسبتاً

جدول ۳. تعیین محاسباتی لنگر تسلیم و خمیری و سختی نواحی خطی در دمای بالا برای اتصال NS1.

Table 3. Calculated values of yield moment, plastic moment, and stiffness in linear zones in high temperatures for specimen NS1 using the proposed relationships.

θ	$(\alpha_y)_\theta$ $= \frac{f_{y,\theta}}{E}$	$M_{y,\theta}$ (MN.m)	$M_{pl,\theta}$ (MN.m)
20	1	4.923	7.029
450	0.89	4.38147	6.25581
600	0.47	2.31381	3.30363
650	0.35	1.72305	2.46015
700	0.23	1.13229	1.61667

$(\alpha_E)_\theta$ $= \frac{E_\theta}{E}$	$\varphi_{y,\theta}$	$k_{o,\theta}$ (kN.m/mili-rads)	$k_{p,\theta}$ (kN.m/mili-rads)
1	4.8	1026	4.8
0.65	6.572	667	4.272
0.31	7.277	318	2.256
0.22	7.636	226	1.68
0.13	8.492	133	1.104



شکل ۱۱. منحنی لنگر- دوران اتصال NS1 در دماهای بالا با استفاده از روش محاسباتی پیشنهادی

Fig. 11. Moment-rotation curves for NS1 connection in high temperatures using the proposed analytical method

نشان داده شده است).

در شکل ۱۱ و ۱۲، به ترتیب منحنی $M - \varphi$ اتصال تیر I شکل به ستون لوله‌ای عرشه سکوها نفتی و مقایسه نتایج تحلیلی و شبیه‌سازی منحنی‌های لنگر- دوران و سختی- دوران برای نمونه NS1 در دماهای

$M - \varphi$ اتصال در دماهای بالا، کافیت مدول ارتجاعی کاهش یافته و تنش تسلیم کاهش یافته را بجای مقادیر اولیه در این نمودارها اعمال کرد. در روابط (۳۶) تا (۴۱)، با استفاده از این نکته و مدل خط کران دار پیشنهادی بخش ۴ برای تخمین منحنی‌های $M - \varphi$ اتصالات تیر I شکل به ستون لوله‌ای در دمای معمولی، روابط پیشنهادی برای محاسبه سختی- دوران و لنگر- دوران این اتصالات در دماهای بالا ارائه شده است.

$$k_{o,\theta} = k_o \cdot (\alpha_E)_\theta \quad (36)$$

$$k_{p,\theta} = k_p \cdot (\alpha_y)_\theta \quad (37)$$

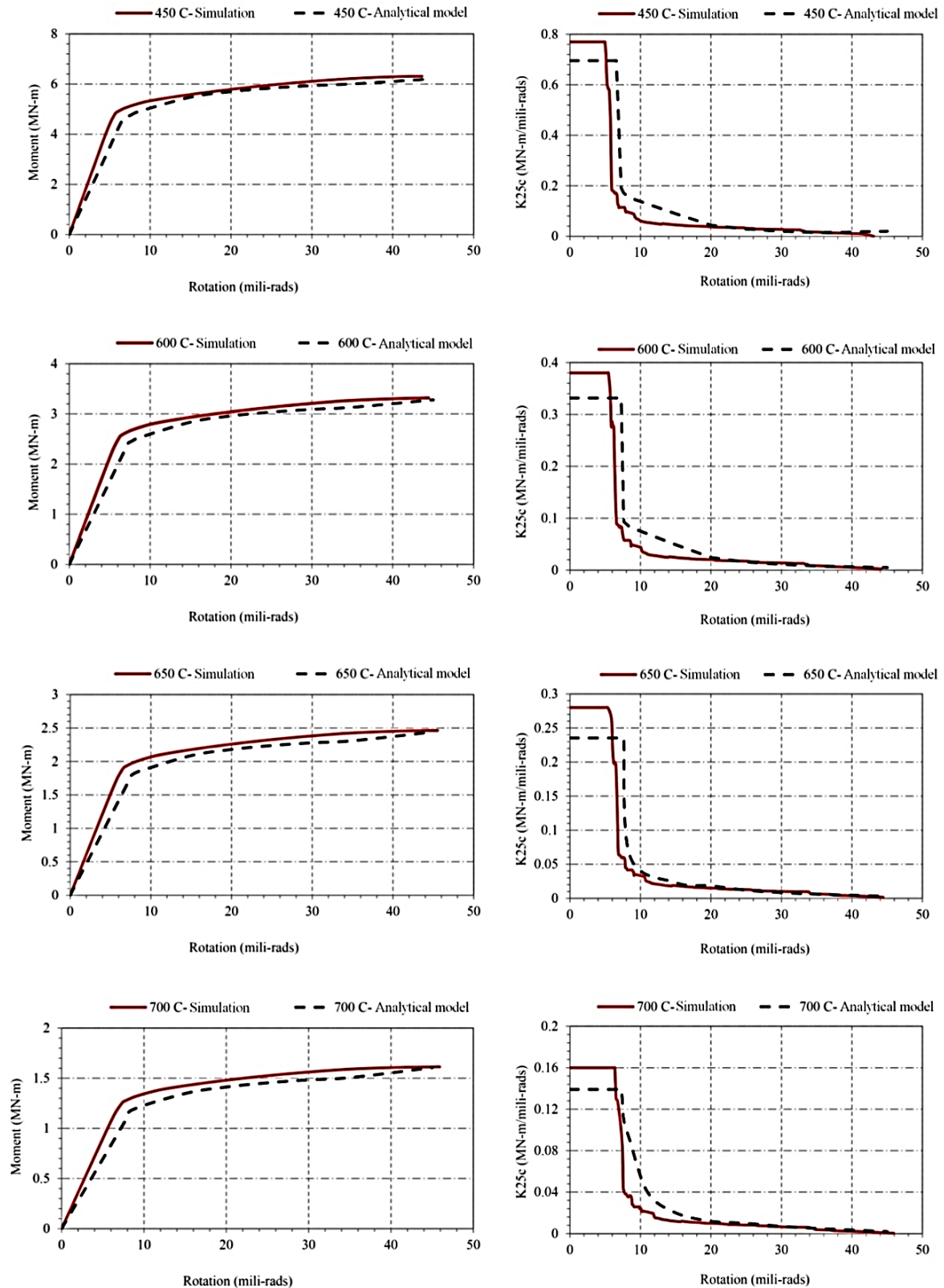
$$\varphi_{y,\theta} = \varphi_y \cdot \frac{(\alpha_y)_\theta}{(\alpha_E)_\theta} \quad (38)$$

$$M_\theta = k_{j,\theta} \cdot \varphi \quad (39)$$

$$k_{j,\theta} = \begin{cases} k_{o,\theta} & \text{when } M < m_{1,\theta} \\ k_{o,\theta} + \frac{M - m_{1,\theta}}{M_{c,\theta} - M_{y,\theta}} (k_{p,\theta} - k_{o,\theta}) & m_{1,\theta} \leq M \leq m_{2,\theta} \\ k_{p,\theta} & \text{when } M > m_{2,\theta} \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} m_{1,\theta} &= M_{y,\theta} + k_{p,\theta} \cdot \varphi_{y,\theta} \\ m_{2,\theta} &= M_{pl,\theta} = M_{c,\theta} + k_{p,\theta} \cdot \varphi_{pl} \end{aligned} \quad (41)$$

در روابط بالا، پارامترهای تعریف شده عیناً مشابه با پارامترهای روابط قبلی منتهای دمای θ می‌باشد. ضریب کاهش مدول ارتجاعی، $(\alpha_E)_\theta$ ، و ضریب کاهش تنش تسلیم، $(\alpha_y)_\theta$ ، در دمای بالا ارائه شده است. با استفاده از این جدول، تنش تسلیم، لنگر تسلیم و مدول ارتجاعی کاهش یافته در دماهای مختلف برای نمونه NS1 از اتصالات ذکر شده در جدول ۱، در جدول ۳ محاسبه شده است (لنگر تسلیم، لنگر خمیری و میزان دوران متناسب با لنگر تسلیم برای اتصالات مذکور در دمای معمولی در جدول ۲



شکل ۱۲. مقایسه منحنی‌های لنگر- دوران و سختی- دوران اتصال NS1 در دماهای مختلف با مدل خطی کران دار و مدل عددی

Fig. 12. Comparison of moment-rotation and stiffness-rotation curves of NS1 connection at different temperatures with bounded linear model and numerical model

آتش استاندارد (و نه حرارت های دیگر) می باشد و برای دماهای مختلف آتش استاندارد قابل استفاده می باشد. همچنین با بازبینی مقالات معتبر در مورد شکل پذیری اتصالات مذکور در دمای بالا بالاخص در سالیان اخیر، مشخص شد که ارزیابی گسترده تری در این حیطة صورت نگرفته است.

منابع

- [1] M. Nader, A. Astaneh, Dynamic behavior of flexible, semirigid and rigid steel frames, *Journal of Constructional Steel Research*, 18(3) (1991) 179-192.
- [2] C. American Institute of Steel Construction, IL, Specification for Structural Steel Buildings, in: 3, 2022.
- [3] E.-E.C.f.C. Steelwork, Design of steel structures: eurocode 3: design of steel structures, part 1-1: general rules and rules for buildings, John Wiley & Sons, 2015.
- [4] G. de Winkel, J. Wardenier, Parametric study on the static behaviour of I-beam to tubular column connections under in-plane bending moments, in: *Tubular Structures*, Routledge, 2021, pp. 317-324.
- [5] M.N.A.S. Ali, Experimental Moment-Rotation Behavior of Semi-Rigid Beam-to-Column Connections, Eastern Mediterranean University EMU, 2015.
- [6] A. Cinitha, V. Nandhini, Experimental Studies on Steel Beam-to-Column Connections Under Elevated Temperature, in: *Advances in Applied Mechanical Engineering: Select Proceedings of ICAMER 2019*, Springer, 2020, pp. 335-342.
- [7] M. Khador, Cyclic behaviour of external diaphragm joint between steel I-section beam and circular hollow section column, University of Warwick, 2015.
- [8] G.D. Pawar, V.B. Dawari, Seismic design of bolted beam to column connections in tubular steel structures—A review, *Materials Today: Proceedings*, (2023).
- [9] J. Yang, T. Sheehan, X. Dai, D. Lam, Structural behaviour of beam to concrete-filled elliptical steel tubular column connections, in: *Structures*, Elsevier, 2017, pp. 41-52.
- [10] F.M. Al Mohtar, E.G. Hantouche, Effect of thermal creep on the behavior of flush end-plate connection under transient conditions of fire, *Fire Safety Journal*,

مختلف با استفاده از روابط تحلیلی ارائه شده در بالا ارائه شده است. همان طور که از شکل ۱۲ مشخص است تطابق مناسبی بین نتایج مدل های عددی و تحلیلی در محاسبه نمودارهای $M - \varphi$ و $k_j - \varphi$ اتصالات تیر I شکل به ستون لوله ای در دمای بالا مشاهده می شود. پس می توان از فرمولهای تحلیلی در تخمین این منحنی ها استفاده کرد. با مقایسه منحنی های مذکور در دمای معمولی و بالا (شکل ۸ و شکل ۱۲)، مشاهده می شود که خطای تخمین در دماهای بالا نسبتا بیشتر می باشد. علت این پدیده در این است که در دماهای بالا، خطای ناشی از تخمین منحنی ها در دمای معمولی و دمای بالا، به صورت تجمعی با هم جمع می شود و درصد خطاهای بالاتری را می دهد. پرواضح است که هر چه میزان دقت تخمین منحنی های $k_j - \varphi$ و $M - \varphi$ در دمای معمولی بالاتر باشد، در تخمین این منحنی ها در دماهای بالا، خطای کمتری ایجاد خواهد شد.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله، مطالعه ای بر رفتار اتصالات تیر I شکل به ستون لوله ای عرشه سکوها نفتی در برابر لنگر خمشی دمای بالا شد. روند محاسباتی در این تحقیق نشان داد که با داشتن هندسه کامل اتصال و همچنین داشتن میزان لنگر وارده بر اتصال، به راحتی می توان با استفاده از روابط استخراج شده در این فصل، میزان حداکثر تنش را در مقطع مؤثر محاسبه کرد. ادامه روند حل مسئله، به استخراج روابط تعیین لنگر تسلیم و لنگر خمیری منجر شد. سپس با مشاهده رفتار لنگر - دوران اتصال در مدل های عددی، مشخص شد که مدل خط کران دار بهترین مدل برای تبیین رفتار $M - \varphi$ و $k_j - \varphi$ این اتصالات می باشد. در ادامه با داشتن لنگر تسلیم و لنگر خمیری، و فرض مقدار کرنش تسلیم و کرنش خمیری، مبادرت به رسم منحنی $M - \varphi$ و $k_j - \varphi$ این اتصالات شد. مقایسه نتایج مدل تحلیلی منحنی های $M - \varphi$ با نتایج مدل عددی نشان از تطابق خوب نتایج دارد. در ادامه، با ایجاد ارتباط بین سختی اتصالات تیر I شکل به ستون لوله ای در دمای معمولی و دمای بالا، روابط استخراج شده برای تعیین منحنی های $k_j - \varphi$ و $M - \varphi$ اتصال در دمای معمولی، به دماهای بالا هم تعمیم داده شد. نتایج تحلیلی بدست آمده برای رفتار لنگر - دوران اتصال در دماهای بالا، با نتایج مدل عددی مقایسه شدند و مشاهده شد که با استفاده از نتایج مدل تحلیلی، می توان با دقت نسبتا مناسبی رفتار $M - \varphi$ و $k_j - \varphi$ اتصال را در دماهای بالا پیش بینی کرد. لازم به ذکر است که نتایج این تحقیق و پارامترهای شکل پذیری استخراج شده، در محدوده

- Journal of the Structural Division, 105(1) (1979) 133-145.
- [16] F. Al-Bermani, B. Li, K. Zhu, S. Kitipornchai, Cyclic and seismic response of flexibly jointed frames, Engineering Structures, 16(4) (1994) 249-255.
- [17] K. Zhu, F. Al-Bermani, S. Kitipornchai, B. Li, Dynamic response of flexibly jointed frames, Engineering Structures, 17(8) (1995) 575-580.
- [18] R.G.B. A.M. Sadegh, Roark's Formulas for Stress and Strain, Printed in the United States of America, 2020.
- [19] S. Hosseini, Fire effects on behaviour of welded steel I-beam to circular tubular chord connections in oil platform decks, Ph. D. Thesis, KN Toosi University, Tehran, Iran, 2012.
- [20] ABAQUS CAE FEA Software, in, 2020.
- 121 (2021) 103268.
- [11] V. Kodur, M. Dwaikat, Effect of high temperature creep on the fire response of restrained steel beams, Materials and structures, 43 (2010) 1327-1341.
- [12] S.-L. Chan, P.-T. Chui, Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections, Elsevier, 2000.
- [13] E. Lightfoot, A.P. Le Messurier, Elastic analysis of frameworks with elastic connections, Journal of the Structural Division, 100(6) (1974) 1297-1309.
- [14] M.J. Frye, G.A. Morris, Analysis of flexibly connected steel frames, Canadian journal of civil engineering, 2(3) (1975) 280-291.
- [15] N. Krishnamurthy, H.-T. Huang, P.K. Jeffrey, L.K. Avery, Analytical M- θ curves for end-plate connections,

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. A. Hosseini, M. Zeinoddini, T. Amin Taheri, Analytical solution of the response of the I-shaped beam to the tubular column connections, Amirkabir J. Civil Eng., 57(1) (2025) 89-112.

DOI: [10.22060/ceej.2025.22797.8052](https://doi.org/10.22060/ceej.2025.22797.8052)



پیوست ۱:

نحوه استخراج روابط ۱۳-۲۲ به شرح ذیل می باشد:

پ-۱- تعیین مشخصات هندسی مقطع موثر

با استفاده از هندسه مقطع موثر داریم:

$$b_p = \frac{d_d - d_c}{2}$$

(پ-۱) در روابط روبرو، d_d و d_c به ترتیب قطر خارجی

$$b_q = \frac{\sqrt{2}d_d - d_c - b_f}{2}$$

(پ-۲) ستون و قطر معادل ورق دیافراگم، b_q ، b_p ، b_f و

$$B_e = 1.1 \times \sqrt{d_c \cdot t_c}$$

(پ-۳) به ترتیب عرض بال تیر، عرض حداقل

$$A = B_e t_c + b_p \cdot t_d$$

(پ-۴) دیافراگم، عرض حداکثر دیافراگم و عرض موثر

$$A_s = (t_c + b_p) \cdot t_d$$

(پ-۵) مقطع می باشد (شکل ۳). A_s ، A ، t_c ، t_d ، t_f به

$$y_1 = \left[\frac{t_d \cdot b_p^2}{2} + B_e t_c \cdot (0.5 \times t_c + b_p) \right] / A$$

(پ-۶) ترتیب ضخامت بال تیر، ضخامت ورق دیافراگم، ضخامت ستون، سطح مقطع موثر و سطح موثر

$$y_2 = b_p + t_c - y_1$$

(پ-۷) برش می باشد. y_1 ، y_2 ، I_x و S_x به ترتیب ارتفاع

$$I_x = \left[\frac{t_d \cdot b_p^3}{12} + \frac{B_e \cdot t_c^3}{12} \right] + A \cdot y_1^2$$

(پ-۸) اول و دوم از تار خنثی مقطع موثر، ممان اینرسی

$$S_x = \frac{I_x}{y_1}$$

(پ-۹) و اساس مقطع حول محور x می باشد (شکل ۳). θ

$$\theta = \pi - \text{Arcsin}\left(\frac{0.5b_f}{R}\right)$$

(پ-۱۰) و α پارامترهای واسطه هستند. M_b ،

$$R = 0.5 \times D_c - t_c + y_2$$

(پ-۱۱) $S_{x,beam}$ و W به ترتیب لنگر وارد بر اتصال،

$$\alpha = \frac{I}{AR^2}$$

(پ-۱۲) اساس مقطع تیر، بار خطی وارد بر بال تیر و بار

$$K_2 = 1 - \alpha$$

(پ-۱۳) لازم به ذکر است که در این محاسبات، با دو لنگر

$$Q = \frac{t_d \cdot y_1^2}{2}$$

(پ-۱۴) متفاوت روبرو هستیم. یکی لنگری که بر انتهای

$$Z = 2Q$$

(پ-۱۵) تیر و اتصال وارد می شود، M_b و دیگری لنگر

$$w = \frac{M_b}{S_{x,beam}} \times t_f$$

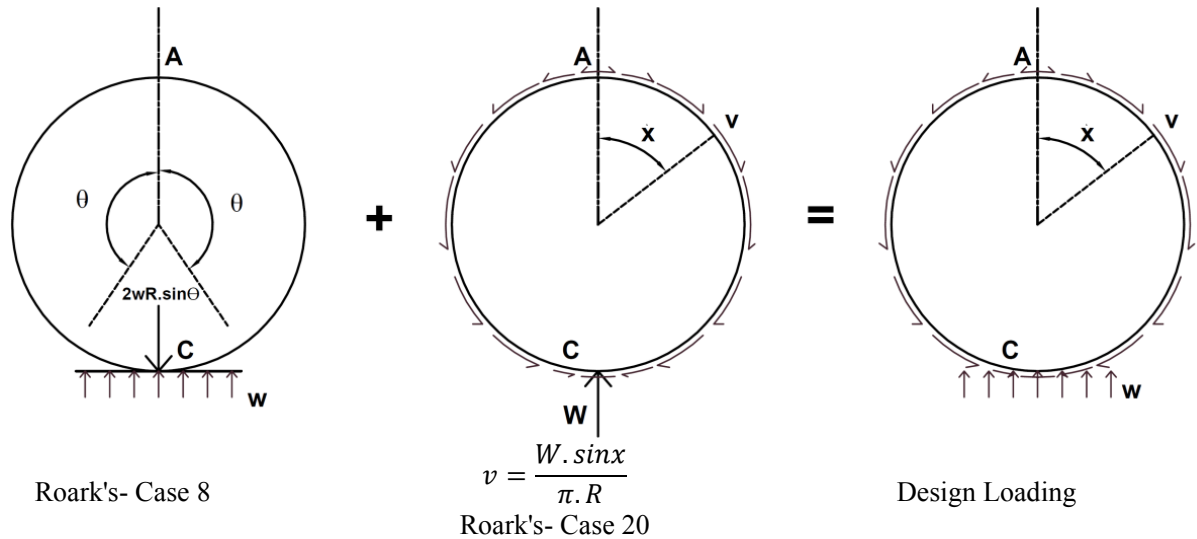
(پ-۱۶) داخلی که در اثر M_b در اجزای اتصال ایجاد

$$W = w \cdot b_f$$

(پ-۱۷) می شود، که همان M_x می باشد.

پ-۲- محاسبه توزیع بار لنگر وارده بر روی اجزای اتصال

بار توزیع شده لنگر خمشی در اجزای اتصال مطابق با شکل پ-۱ و طبق روابط Roark [۱۸] به قرار زیر می باشد.



شکل پ-۱- توزیع بار محوری ناشی از لنگر خمشی روی اجزای اتصال [۱۸]

Fig. P-1: Distribution of axial load due to bending moment on connection components [18]

8. Roark's formula [18]

$$M_A = \frac{w \cdot R^2}{2\pi} \left(\pi(s^2 - 0.5) - \frac{sc - \theta}{2} - s^2 \left(\theta + \frac{2s}{3} \right) - k_2(2s + sc - \pi + \theta) \right) \quad (\text{پ-۱۸})$$

$$M_C = \frac{-w \cdot R^2}{2\pi} \left(\frac{\pi + sc - \theta}{2} - \frac{\theta}{2} + \theta s^2 - \frac{2s^3}{3} + k_2(2s + sc - \pi + \theta) \right) \quad (\text{پ-۱۹})$$

$$N_A = \frac{-wRs^3}{3\pi} \quad (\text{پ-۲۰})$$

$$V_A = 0 \quad (\text{پ-۲۱})$$

$$LT_M = \frac{-wR^2}{2} (z - s)^2 \langle x - \theta \rangle^0 \quad (\text{پ-۲۲})$$

$$LT_N = -wRz(z - s) \langle x - \theta \rangle^0 \quad (\text{پ-۲۳})$$

$$LT_v = -wRu(z - s) \langle x - \theta \rangle^0 \quad (\text{پ-۲۴})$$

20. Roark's formula [18]

$$M_A = \frac{WR}{2\pi} (k_2 - 0.5) \quad (\text{پ-۲۵})$$

$$M_C = \frac{WR}{2\pi} (k_2 + 0.5) \quad (\text{پ-۲۶})$$

$$N_A = \frac{0.75W}{\pi} \quad (\text{پ-۲۷})$$

$$V_A = 0 \quad (\text{پ-۲۸})$$

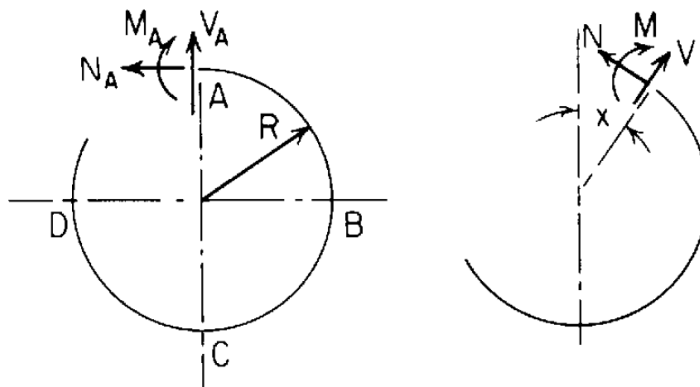
$$LT_M = \frac{WR}{\pi} \left(1 - u - \frac{xz}{2} \right) \quad (\text{پ-۲۹})$$

$$LT_N = \frac{-W}{2\pi} xz \quad (\text{پ-۳۰})$$

$$LT_v = 0 \quad (\text{پ-۳۱})$$

$$LT_v = \frac{W}{2\pi}(z - xu)$$

مطابق با شکل پ-۲، مقادیر نیروهای داخلی در یک حلقه مطابق روابط زیر می‌باشد [۱۸]:



شکل پ-۲: نیروهای داخلی ایجاد شده در یک حلقه [۱۸]

Fig. P-2: Internal forces generated in a ring[18]

$$M = M_A - N_A R(1 - u) + V_A R z + LT_M \quad (\text{پ-۳۲})$$

$$N = N_A u + V_A z + LT_N \quad (\text{پ-۳۳})$$

$$V = -N_A z + V_A u + LT_V \quad (\text{پ-۳۴})$$

$$z = \sin x, u = \cos x, n = \sin \theta \text{ and } m = \cos \theta \quad (\text{پ-۳۵})$$

$$s = \sin \theta, c = \cos \theta \quad (\text{پ-۳۶})$$

بنا بر اصل جمع آثار قوا در تحلیل سازه‌ها، ترکیب نیروها، لنگرها و تنش‌ها به شکل زیر می‌باشد [۱۸]:

$$M_x = M_{x.case8} + M_{x.case20} \quad (\text{پ-۳۷})$$

$$N_x = N_{x.case8} + N_{x.case20} \quad (\text{پ-۳۸})$$

$$V_x = V_{x.case8} + V_{x.case20} \quad (\text{پ-۳۹})$$

$$\tau_x = \frac{V_x}{A_s} \quad \text{تنش برشی} \quad (\text{پ-۴۰})$$

$$\sigma_{x(in,out)} = -\frac{M_x y_{1,2}}{I} + \frac{N_x}{A} \quad \text{ترکیب تنش} \quad (\text{پ-۴۱})$$

$$\sigma_{von} = [\max(\sigma_{in}, \sigma_{out})^2 + 3\tau^2]^{0.5} \quad \text{تنش فون میس} \quad (\text{پ-۴۲})$$

ترکیب نیروها در نقطه A به شکل زیر می باشد [۱۸]:

$$N_A = \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] \quad (\text{پ-۴۳})$$

$$M_A = \left[\frac{w \cdot R^2}{2\pi} \left(\pi(s^2 - 0.5) - \frac{sc - \theta}{2} - s^2 \left(\theta + \frac{2s}{3} \right) - k_2(2s + sc - \pi + \theta) \right) + \left(\frac{WR}{2\pi} (k_2 - 0.5) \right) \right] \quad (\text{پ-۴۴})$$

$$V_A = 0 \quad (\text{پ-۴۵})$$

ترکیب نیروها در نقطه X به شکل زیر می باشد [۱۸]:

$$N_X = N_A u + V_A z + LT_N = \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] u + 0 + \left(0 + \frac{-W}{2\pi} xz \right) \quad (\text{پ-۴۶})$$

$$M_X = M_A - N_A R(1 - u) + V_A R z + LT_M = \left[\frac{w \cdot R^2}{2\pi} \left(\pi(s^2 - 0.5) - \frac{sc - \theta}{2} - s^2 \left(\theta + \frac{2s}{3} \right) - k_2(2s + sc - \pi + \theta) \right) + \left(\frac{WR}{2\pi} (k_2 - 0.5) \right) \right] - \quad (\text{پ-۴۷})$$

$$- \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] R \cdot (1 - u) + 0 + \left(\frac{WR}{\pi} \cdot \left(1 - u - \frac{xz}{2} \right) \right)$$

$$V_X = -N_A z + V_A u + LT_V = - \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] z + 0 + \left(0 + \frac{W}{2\pi} (z - xu) \right) \quad (\text{پ-۴۸})$$

با استفاده از روابط بالا، ترکیب تنش ها در نقطه X به شکل زیر می باشد:

$$\left\{ \begin{aligned} \tau_x = \frac{V_x}{A_s} &= \left(\frac{1}{A_s} \right) \cdot \left\{ - \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] z + \left(\frac{W}{2\pi} (z - xu) \right) \right\} \\ \sigma_{in,out} &= \left(- \frac{M_x \cdot y_2}{I} + \frac{N_x}{A} \right) = \left(- \frac{y_{1,2}}{I} \right) \cdot \left\{ \left[\begin{aligned} &\frac{w \cdot R^2}{2\pi} \left(\pi(s^2 - 0.5) - \frac{sc - \theta}{2} - s^2 \left(\theta + \frac{2s}{3} \right) - k_2(2s + sc - \pi + \theta) \right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{WR}{2\pi} (k_2 - 0.5) \right) \right] - \right. \\ &\left. - \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] R \cdot (1 - u) + \left(\frac{WR}{\pi} \cdot \left(1 - u - \frac{xz}{2} \right) \right) \right\} + \\ &+ \left(\frac{1}{A} \right) \cdot \left\{ \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] u + \left(\frac{-W}{2\pi} xz \right) \right\} \end{aligned} \right. \quad (پ-۴۹) \end{aligned} \right. \quad (پ-۵۰)$$

پس بنا به رابطه (پ-۴۲)، (پ-۴۹) و (پ-۵۰)، تنش فون میسز در نقطه X به شکل زیر می‌باشد:

$$\sigma_{eqv(x)} = \sqrt{[\max(|\sigma_{in}|, |\sigma_{out}|)]^2 + 3\tau^2}$$

$$= \sqrt{\left[\max \left| \left(- \frac{y_{1,2}}{I} \right) \cdot \left\{ \left[\begin{aligned} &\frac{w \cdot R^2}{2\pi} \left(\pi(s^2 - 0.5) - \frac{sc - \theta}{2} - s^2 \left(\theta + \frac{2s}{3} \right) - k_2(2s + sc - \pi + \theta) \right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{WR}{2\pi} (k_2 - 0.5) \right) \right] - \right. \\ &\left. - \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] R \cdot (1 - u) + \left(\frac{WR}{\pi} \cdot \left(1 - u - \frac{xz}{2} \right) \right) \right\} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{A} \right) \cdot \left\{ \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] u + \left(\frac{-W}{2\pi} xz \right) \right\} \right| \right]^2 + 3 \left[\left(\frac{1}{A_s} \right) \cdot \left\{ - \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] z + \left(\frac{W}{2\pi} (z - xu) \right) \right\} \right]^2 \right] \quad (پ-۵۱)$$

$$= \sqrt{\left[\max \left| \left(- \frac{y_{1,2}}{I} \right) \cdot \left\{ \left[\begin{aligned} &\frac{w \cdot R^2}{2\pi} \left(\pi(s^2 - 0.5) - \frac{sc - \theta}{2} - s^2 \left(\theta + \frac{2s}{3} \right) - k_2(2s + sc - \pi + \theta) \right) + \right. \\ &\left. + \left(\frac{WR}{2\pi} (k_2 - 0.5) \right) \right] - \right. \\ &\left. - \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] R \cdot (1 - \cos x) + \left(\frac{WR}{\pi} \cdot \left(1 - \cos x - \frac{x \cdot \sin x}{2} \right) \right) \right\} + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1}{A} \right) \cdot \left\{ \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] \cos x + \left(\frac{-W}{2\pi} x \cdot \sin x \right) \right\} \right| \right]^2 + 3 \left[\left(\frac{1}{A_s} \right) \cdot \left\{ - \left[\frac{-w \cdot R \cdot S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] \sin x + \left(\frac{W}{2\pi} (\sin x - x \cdot \cos x) \right) \right\} \right]^2 \right] \quad (پ-۵۲)$$

روابطی که در بالا ارائه شد، از روابط بکار رفته در روابط رایج طراحی و روابط Roark [۱۸] می‌باشد. روابط ذیل با استفاده از روابط بالا، توسط مولف ارائه شده است. در ادامه، برای اینکه محاسبات ساده‌تر شود از پارامترهای واسطه زیر استفاده می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \left[\frac{-w.R.S^3}{3\pi} + \frac{0.75W}{\pi} \right] = w.A' \quad (پ-۵۳) \\ B = -\frac{y_{1,2}}{I} \quad (پ-۵۴) \\ C = \frac{WR}{\pi} = w.C' \quad (پ-۵۵) \\ D = \frac{-W}{2\pi} = w.D' \quad (پ-۵۶) \\ E = \frac{w.R^2}{2\pi} \left(\pi(s^2 - 0.5) - \frac{sc - \theta}{2} - s^2 \left(\theta + \frac{2s}{3} \right) - k_2(2s + sc - \pi + \theta) \right) + \left(\frac{WR}{2\pi} (k_2 - 0.5) \right) = w.E' \quad (پ-۵۷) \\ F = \frac{1}{A} \quad (پ-۵۸) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A' = \left[\frac{-R.S^3}{3\pi} + \frac{0.75b_f}{\pi} \right] \quad (پ-۵۹) \\ B = -\frac{y_{1,2}}{I} \quad (پ-۶۰) \\ C' = \frac{b_f R}{\pi} \quad (پ-۶۱) \\ D' = \frac{-b_f}{2\pi} \quad (پ-۶۲) \\ E' = \frac{R^2}{2\pi} \left(\pi(s^2 - 0.5) - \frac{sc - \theta}{2} - s^2 \left(\theta + \frac{2s}{3} \right) - k_2(2s + sc - \pi + \theta) \right) + \left(\frac{b_f R}{2\pi} (k_2 - 0.5) \right) \quad (پ-۶۳) \\ F = \frac{1}{A} \quad (پ-۶۴) \end{array} \right.$$

بررسی تابع تنش فون میسز نشان می‌دهد که حداکثر مقدار این تابع، در زاویه ۱۳۵ درجه است:

$$\text{If } \left(x = 135^\circ = \frac{3\pi}{4} = 2.36 \right) : \sigma_{von} = \max \quad (پ-۶۷)$$

$$\Rightarrow \sigma_{von(\max)} = \sqrt{ \left[B \cdot \left\{ E + A.R(1 - \cos x) - C \cdot \left(1 - \cos x - \frac{x \sin x}{2} \right) \right\} + F \cdot \{ A \cos x + D x \sin x \} \right]^2 + 3 \left[F \cdot \{ -A \sin x - D \cdot (\sin x - x \cos x) \} \right]^2 } \quad (پ-۶۸)$$

(پ-۶۹)

$$= \sqrt{\left| (BE + BAR - BC) + (-BAR + BC + FA) \cdot (-0.707) + (0.5BC + FD) \times 2.36 \times 0.707 \right|^2 + 3 \left[(-FA - FD) \cdot (0.707) + FD \times 2.36 \times (-0.707) \right]^2}$$

(پ-۷۰)

$$\begin{aligned} \rightarrow \sigma_{von(max)} &= \sqrt{\left| (BE + BAR - BC) + (-0.707) \cdot (-BAR + BC + FA) + 0.834BC + 1.67FD \right|^2 + 3 \left[(-0.707)(FA + FD) - 1.67FD \right]^2} \\ &= w \cdot \sqrt{\left| (BE' + BA'R - BC') + (-0.707) \cdot (-BA'R + BC' + FA') + 0.834BC' + 1.67FD' \right|^2 + 3 \left[(-0.707)(FA' + FD') - 1.67FD' \right]^2} = w \cdot \alpha \end{aligned}$$

همانطور که از رابطه (پ-۷۰) بوضوح مشخص است تنش فون میسز حداکثر بصورت تابعی از بار خطی وارده بر ورق دیافراگم، w ، توسط مولف بیان شده است.

(پ-۷۱)

$$\sigma_{von(max)} = w \cdot \alpha$$

(پ-۷۲)

$$\alpha = \sqrt{\left| (BE' + BA'R - BC') + (-0.707) \cdot (-BA'R + BC' + FA') + 0.834BC' + 1.67FD' \right|^2 + 3 \left[(-0.707)(FA' + FD') - 1.67FD' \right]^2}$$