

مقایسه عملکرد روش‌های بدون شبکه چندربعی و حجم محدود در حل معادله موج دوبعدی

نسرین توکلی^۱، مجید اکبری^۲، رضا بابایی^۳، احسان جباری^۴*

۱- گروه مهندسی عمران، دانشگاه قم، قم، ایران، n.tavakoli@stu.qom.ac.ir

۲- دانشکده شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران، majidakbari@usb.ac.ir

۳- گروه مهندسی عمران، دانشگاه قم، قم، ایران، r.babaei@qom.ac.ir

۴- گروه مهندسی عمران، دانشگاه قم، قم، ایران، e.jabbari@qom.ac.ir

چکیده

به منظور شبیه‌سازی و درک پدیده‌ها در حوزه‌های مهندسی آب، سیالات و هیدرولیک از جمله تحلیل اندرکنش سد و مخزن تحت اثر بارهای دینامیکی، مدل‌سازی انتشار امواج سونامی و بررسی انتقال آلودگی در محیط‌های آبی، حل معادله موج یک و دوبعدی اجتناب‌ناپذیر است. به همین دلیل توسعه روش‌های عددی و تحلیلی برای حل این معادله همچنان به منظور غلبه بر چالش‌ها ادامه دارد. در این تحقیق عملکرد روش بدون شبکه پایه شعاعی چندربعی در مقایسه با روش حجم محدود سلول مرکزی برای حل معادله موج درجه دوم دوبعدی بررسی شده است. معادله موج توصیف‌کننده انتشار موج در یک محیط معین است که رابطه بین مشتق دوم زمانی و مکانی را با سرعت موج مشخص می‌کند. روش حجم محدود و روش پایه شعاعی از جمله روش‌هایی هستند که برای مدل‌سازی معادلات دیفرانسیل جزئی مانند معادله موج در هندسه‌های پیچیده استفاده می‌شوند. برای مقایسه کارایی این دو روش ابتدا روش حجم محدود بر اساس یک شبکه مثلثی سلول مرکزی تدوین شده است. روش برهم‌نهی پایه شعاعی نیز با استفاده از تابع چندربعی برای نقاط پراکنده توسعه داده شده و در نهایت گسسته‌سازی زمانی از طریق روش صریح اویلر انجام شده است. مقایسه عملکرد و قابلیت‌های دو روش با انجام چند آزمون عددی برای هندسه‌ها و شرایط اولیه و مرزی مختلف، پراکندگی نقاط، متغیر شکل و زمان پردازش هر یک از روش‌ها صورت گرفته است. برای مقایسه کمی بهتر دو روش، همچنین حل تحلیلی موج با به کارگیری روش جداسازی متغیرها برای یک هندسه ساده مستطیلی با شرایط اولیه و مرزی مشخص بدست آمده است. نتایج این تحقیق نشان‌دهنده هزینه محاسباتی کمتر روش پایه شعاعی چندربعی در مقایسه با روش حجم محدود سلول مرکزی به ازای دقت تقریباً یکسان است.

کلمات کلیدی

معادله موج دوبعدی، روش حجم محدود، روش پایه شعاعی چند ربعی، روش سلول مرکزی، روش بدون شبکه

* نویسنده مسئول: e.jabbari@qom.ac.ir

معادلات دیفرانسیل جزئی یا به اختصار PDE ها معادلاتی شامل مشتقات جزئی یک تابع نامعلوم از چند متغیر مستقل هستند. این معادلات برای مدل سازی گسترده ای از پدیده های موجود در فیزیک، مهندسی، مالی، زیست شناسی و بسیاری از شاخه های دیگر علوم استفاده می شوند. معادلات دیفرانسیل جزئی بر اساس ویژگی ها و مشخصات خود به انواع مختلفی از جمله معادلات بیضوی، سهموی، هذلولوی و همچنین خطی و غیر خطی، با یا بدون ضرایب ثابت در آنها و معادلات همگن یا ناهمگن دسته بندی می شوند.

معادلات بیضوی تشریح کننده پدیده های دائمی و تعادل (استاتیکی) هستند. معادلات سهموی، پدیده های دینامیکی با رفتار پخش گون مانند حرارت را توصیف می کنند. معادلات هذلولوی نیز برای شبیه سازی پدیده های دینامیکی فیزیکی با رفتار موج گون مانند انتقال جریان و اطلاعات مناسب هستند. از جمله کاربردی ترین های موارد دسته اخیر می توان به معادلات اویلر، معادلات آب های کم عمق و معادله کلاسیک موج اشاره کرد. در دهه های گذشته روش های متنوعی برای حل عددی و تحلیلی معادلات هذلولوی توسعه داده شده است [۷-۱]. بیشتر این تحقیقات معطوف به توسعه روش های تسخیر موج های شوک (ناپیوستگی ها) و نحوه تخمین ضرایب ناپایستار (جملات ناهمگن) با توجه به راه حل های آنروپی بوده است [۸-۱۱]. به دلیل غیر خطی و پیچیده بودن، معادلات موج دوبعدی مانند معادلات اویلر یا دستگاه معادلات دوبعدی آب کم عمق، حل دقیق ندارند. بنابراین بعضاً برای شبیه سازی انتقال جریان از نوع ساده تر این معادلات مانند معادله اسکالر موج درجه دوم استفاده می شود. معادله موج درجه دوم دو بعدی از جمله معادلات هذلولوی مبتنی بر قوانین پایستگی است که حل تحلیلی بسته* ندارد، اگرچه در حالت های ساده خاص قابل حل است. به دلیل نبود یک حل بسته، اغلب برای حل معادله موج از روش های عددی مانند اختلاف محدود، حجم محدود و اجزاء محدود استفاده می شود. از آنجا که روش اختلاف محدود از شبکه های مستطیلی استفاده می کند، تشکیل هندسه های پیچیده از طریق شبکه های مستطیلی منظم دشوار است. در مقابل، روش های حجم محدود و اجزاء محدود در برخورد با هندسه های پیچیده انعطاف پذیری بیشتری دارند. از بین دو روش اخیر، روش حجم محدود که از طریق فرم انتگرالی قوانین پایستگی تدوین می شود، در توسعه روش های تسخیر موج شوک برای حل معادلات هذلولوی کاربرد اساسی دارد. دو رویکرد اصلی مورد استفاده برای اعمال روش حجم محدود از طریق فرم انتگرالی، رویکردهای سلول مرکزی و گره مرکزی است. این دو رویکرد امروزه به طور گسترده در حل معادلات دوبعدی جریان به کار گرفته می شوند. با این حال برای تولید شبکه های سه بعدی بی سازمان، روش های اخیر نیز با توجه به حجم داده های ذخیره شده و محاسبات لازم، با پیچیدگی های زیادی روبرو هستند. علاوه بر روش های کلاسیک ذکر شده، رویکردهای جدیدی در برخورد با هندسه های پیچیده معرفی شده اند از جمله استفاده از روش های بدون شبکه که مشهورترین آنها روش توابع پایه شعاعی[†] است. هاردی در سال [۱۲]، تابع جدیدی را برای تقریب سطوح در زمین شناسی با هندسه های پیچیده معرفی کرد که به نام تابع چندربعی[‡] یا مالتی کوادریک شناخته می شود. روش برهم نهی[§] تابع پایه شعاعی که یک رویکرد جدید در زمینه مدل سازی عددی است، توسط کانزا [۱۳] و ابتدا با استفاده از تابع چندربعی معرفی شده توسط هاردی، پیشنهاد شده است. او توانست با استفاده از اعمال معادلات دیفرانسیل در نقاط برهم نهی جزئی و شرایط مرزی در مرزها، توابع تخمین را تعیین کند. به دلیل سادگی در اجرا و هزینه محاسباتی پایین، این روش عددی موضوع تحقیقات گسترده ای بوده است. یکی از ویژگی های کلیدی روش برهم نهی توابع پایه شعاعی بی نیازی از یک شبکه نقاط ساختاریافته ثابت است و در نتیجه می تواند به سادگی برای حل مسائل با هندسه پیچیده بر اساس یک مجموعه از نقاط** (گره های^{††}) پراکنده استفاده شود. از آنجا که در این روش ساختار شبکه وجود ندارد، کدنویسی کامپیوتری نسبت به روش های وابسته به شبکه ساده تر بوده و در عین حال تفاوت کمی بین هزینه اجرای یک برنامه دوبعدی و سه بعدی وجود دارد. در خصوص نحوه چینش نقاط پراکنده تحقیقات مفصلی انجام شده است که نشان داده است در مسائل مختلف چینش های خاصی دارای برتری هایی بر چینش

* Closed form solution

† Radial Basis Functions (RBF)

‡ Multiquadric (MQ)

§ Collocation Method

** Point

†† Node

یکنواخت است. همچنین توابع پایه شعاعی می‌توانند در هندسه های دو و سه بعدی تقزیرا به سادگی هندسه های یک بعدی و تعریف شوند. علاوه بر این، ترکیب توابع مختلف پایه شعاعی با توابع دیگر از جمله توابع خطی امکان پذیر است که کاتزا در معرفی این روش از همین نکته بهره برده است. باید اشاره نمود که با هدف احتراز از بدو وضعی ماتریس ضرایب، می توان نقاط مورد استفاده در تعریف تابع برای اعمال معادله حاکم در یک نقطه معین را به تعدادی نقاط اطراف آن نقطه محدود نمود که در مورد آن تحقیقاتی صورت گرفته است و البته اغلب کارساز نیست. در رویکرد بدون شبکه، برخلاف روش های با شبکه مانند روش های اجزاء محدود و حجم محدود، گره ها دامنه را نمایندگی می کنند و پاسخ ها با استفاده از توابع پایه شعاعی تخمین زده و در معادلات حاکم جایگذاری می شوند. همچنین توابع پایه شعاعی برای تقریب داده های پراکنده در ابعاد فضایی دو و سه بعدی، موفقیت چشمگیری را به دست آورده اند [۱۴، ۱۵]. به دلیل مزایای ذکر شده، در مطالعات جدید، روش های توابع پایه شعاعی به مسائل کاربردی متنوعی توسعه داده شده اند [۱۶، ۱۷]. با این حال روش های بدون شبکه، اغلب با مشکل قابلیت حل پذیری مواجه هستند و برای جلوگیری از ایجاد ماتریس تکین، به شدت به متغیر شکل و تعداد گره های برهم نهی* انتخابی وابسته می باشند. اهمیت انتخاب متغیر شکل در Tarwater [۱۸] ذکر شده است. برای رفع مشکل حل پذیری مسئله، رویکردهای متعددی شامل استفاده از روش بدون شبکه محلی توصیه شده است [۱۹]. همچنین تاکنون تحقیقات گسترده ای در زمینه انتخاب متغیر شکل انجام گرفته است [۲۰، ۲۱]. با این حال همچنان روش جامعی برای انتخاب متغیر شکل وجود ندارد. به همین سبب مقایسه بیشتر روش های بدون شبکه با روش هایی مانند حجم محدود برای آزمون همگرایی و کارایی آنها مفید و حتی ضروری است.

۲- معادلات حاکم

معادله موج دو بعدی به شکل زیر بیان می شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

که در آن، u متغیر پایستار مجهول (از جنس سرعت یا جابجایی)، x و y مختصات مکانی، t زمان و c نیز ثابت سرعت (انتقال موج) هستند.

۳- حل معادله موج دو بعدی

۳-۱- روش جداسازی متغیرها[†]

برای تحلیل از طریق روش جداسازی متغیرها، معادله موج را در یک دامنه مستطیلی $\Omega \in [0, L_x] \times [0, L_y]$ با شرایط مرزی دیریکله و شرایط اولیه به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= u(L_x, y, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0, t) &= u(x, L_y, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, y, 0) &= f(x, y) \\ u_t(x, y, 0) &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

در روش جداسازی متغیرها فرض می شود که راه حل به صورت حاصل ضرب توابع متغیرهای جداگانه است. در این حالت تابع $u(x, y, t)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$u(x, y, t) = T(t)X(x)Y(y) \quad (3)$$

که در آن سه تابع T ، X و Y توابع مستقل و تابع به ترتیب متغیرهای t ، x و y هستند. با جایگذاری آن در معادله موج (۱) رابطه

* Collocation Nodes

† Separation of Variables

زیر بدست می‌آید:

$$T''(t)X(x)Y(y) = c^2 [T(t)X''(x)Y(y) + T(t)X(x)Y''(y)] \quad (4)$$

که در آن، اندیس‌های بالانویس نشان‌دهنده مشتقات جزئی دوم نسبت به متغیرهای مربوطه‌اند. از رابطه (۴)، معادله دیفرانسیل معمولی زیر دست می‌آید:

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2 \quad (5)$$

از آنجایی که هر دو سمت این رابطه برابر یکدیگرند، این دو عبارت همچنین می‌توانند مساوی یک مقدار ثابت مثل $-\lambda^2$ باشند. با توجه به این مقدار ثابت، عبارت $T(t)$ یک معادله دیفرانسیل همگن به شکل زیر را تشکیل می‌دهد:

$$T''(t) + c^2 \lambda^2 T(t) = 0 \quad (6)$$

رابطه (۶) را می‌توان با چند جمله مشخصه حاصل از آن به شکل کلی زیر حل کرد:

$$T(t) = k_1 \cos(c\lambda t) + k_2 \sin(c\lambda t) \quad (7)$$

همچنین با حل دو عبارت $X(x)$ و $Y(y)$ مانند حالت قبل روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} X(x) &= k_3 \cos(vx) + k_4 \sin(vx) \\ Y(y) &= k_5 \cos(\mu y) + k_6 \sin(\mu y) \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن v و μ مقادیر ثابت هستند. با جایگذاری این سه عبارت در راه حل کلی، معادله موج (۳) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u(x, y, t) = [k_1 \cos(c\lambda t) + k_2 \sin(c\lambda t)] \times [k_3 \cos(\mu x) + k_4 \sin(\mu x)] \times [k_5 \cos(vy) + k_6 \sin(vy)] \quad (9)$$

که شامل ۶ ضریب ثابت k_j است که باید محاسبه شود. با اعمال شرایط مرزی دیریکله و شروع از مرز، پاسخ به صورت مجموعه‌ای از حاصل جمع حل‌های $u_{mn}(x, y, t)$ به دست می‌آید. در عین حال با اعمال شرایط اولیه، مقادیر ثابت نیز تعیین و فرم کلی زیر برای پاسخ معادله موج دوبعدی به دست می‌آید:

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \cos(c\lambda_{mn} t) + B_{mn} \sin(c\lambda_{mn} t)] \times \sin(\mu_m x) \sin(v_n y) \quad (10)$$

که در آن، λ_{mn} ، μ_m و v_n به ترتیب برابر هستند با:

$$\lambda_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2}, \quad \mu_m = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right), \quad v_n = \left(\frac{n\pi}{L_y}\right) \quad (11)$$

و ضرایب سری فوریه A_{mn} و B_{mn} نیز برابر عبارات زیر هستند:

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy \\ B_{mn} &= \frac{4}{L_x L_y c\lambda} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} g(x, y) \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) dx dy \end{aligned} \quad (12)$$

۳-۲- روش‌های عددی

۳-۲-۱- روش حجم محدود سلول مرکزی*

اعمال روش حجم محدود از طریق شکل انتگرالی معادله قوانین پایستگی[†] قابل انجام است:

$$\int_V \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dV - \int_V \nabla \cdot (c^2 \nabla u) dV = 0 \quad (13)$$

* Cell-Centered Finite Volume Method

† Integral form of Conservation Laws

با استفاده از قضیه دیورژانس (قضیه گرین) و تبدیل انتگرال حجم به سطح می‌توان رابطه (۱۳) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V u dV - \int_S (c^2 \vec{\nabla} u) \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (14)$$

که در آن، S سطح، V حجم و $\vec{n}$ بردار نرمال واحد هستند. در حالت کلی رویکرد حجم محدود نیازمند جداسازی دامنه درون حجم کنترل‌های مجاور هم و حل عددی معادله درون این حجم کنترل‌ها است. در این تحقیق برای گسسته‌سازی عددی دامنه از تکنیک سلول مرکزی با شبکه‌های سه‌وجهی (مثلثی) منظم و بی‌سازمان استفاده می‌شود (شکل ۱). حال اگر به طور مشابه برای معادله پایستگی جرم (موج درجه یک) فرم انتگرالی زیر وجود داشته باشد:

$$\frac{1}{\rho} \int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot f dV = 0 \quad (15)$$

با استفاده از قضیه دیورژانس (قضیه گرین) می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V p dV + \int_S f \cdot \vec{n} ds = 0 \quad (16)$$

با جایگذاری $p = \rho \frac{\partial u}{\partial t}$ و $f = -c^2 \vec{\nabla} u$ در رابطه (۱۶) به عنوان شار عبوری از مرز کنترل می‌توان معادله (۱۴) را بازسازی کرد. حال شار عددی را می‌توان با استفاده از یک حل گر مناسب برای معادلات هذلولوی خطی حل کرد. در اینجا برای گسسته‌سازی مشتق مکانی از روش مرکزی معمول «میانگین شار عددی» و برای گسسته‌سازی مشتق زمانی با استفاده از روش صریح، معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$\bar{u}^{n+1} = 2\bar{u}^n - \bar{u}^{n-1} - \frac{\Delta t}{V_i} \left(\sum_{j=1}^m \bar{f}_i \bar{n}_{ij} |s| \right) \quad (17)$$

که در آن، $\bar{u} = \frac{1}{V_i} \int_V u dV$ و $\bar{f}^n = \delta \bar{u}_{i,j}^n$ در مرز سلولی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\delta \bar{u}_{i,j}^n = \frac{1}{l_{i,j}} (u_i - u_j) \quad (18)$$

که در آن $l_{i,j}$ فاصله بین دو نقطه i و j است.

۳-۲-۲- روش بدون شبکه RBF-MQ

برای حل معادله موج از طریق روش بدون شبکه پایه شعاعی چندربعی (به اختصار RBF-MQ)، ابتدا معادله موج دوبعدی در شکل نیمه‌گسسته زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = L \quad (19)$$

$$L = c^2 \nabla^2 u$$

در شکل نیمه‌گسسته، معادله دیفرانسیل جزئی به دو معادله دیفرانسیلی معمولی ODE تبدیل شده که در این حالت ابتدا رابطه از طریق درون‌یابی حل و سپس با اعمال یک گسسته‌سازی زمانی صریح یا ضمنی نتایج عددی در گام‌های زمانی بعدی محاسبه می‌شود. درون‌یابی از طریق توابع پایه شعاعی به نسبت سایر توابع مانند چند جمله‌ای از دقت و انعطاف پذیری بالاتری برخوردار است. علاوه بر این، انواع مختلفی از توابع پایه شعاعی توسعه داده شده است. در حالت کلی هر تابع به شکل معادله (۲۰) می‌تواند یک تقریب با استفاده از تابع پایه شعاعی در نظر گرفته شود که در آن $r = \|X_i - X\|$ فاصله اقلیدسی است:

$$\Phi(x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(\|X_i - X\|) \quad (20)$$

که در آن X_i و X به ترتیب موقعیت نقطه مورد محاسبه و نقطه گوسی است.

توابع پایه شعاعی متداول شامل توابع گوسی، صفحه نازک، اسپلاین، چندربعی و چندربعی معکوس هستند. از میان این توابع، تابع چندربعی که اولین بار توسط هاردی ارائه شد در روش‌های بدون شبکه مبتنی بر RBF، به‌ویژه روش Kansa، به‌طور گسترده برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی از جمله معادلات موج مورد استفاده قرار گرفته است. مطالعات نشان دادند که این تابع، در صورت

انتخاب مناسب پارامتر شکل، از خواص همگرایی و دقت عددی مطلوبی در تقریب توابع برخوردار است [۲۲]. تابع چند ربعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2} \quad (21)$$

که در آن ε متغیر شکل است. مقدار این متغیر می‌تواند دقت و پایداری نتایج RBF-MQ را به شدت تحت تاثیر قرار دهد. متأسفانه هیچ روش جامعی برای تعیین متغیر شکل وجود ندارد. اغلب این متغیر به صورت تجربی تعیین می‌شود. با جایگذاری تابع درونیابی در معادله (۱۹)، شکل نیمه‌گسسته زیر به دست می‌آید:

$$L(\Phi) = c^2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \nabla^2 \phi(\|X_i - X\|). \quad (22)$$

برای گسسته‌سازی زمانی شکل نیمه‌گسسته (۱۹) نیز می‌توان از روش صریح مرکزی استفاده کرد:

$$u^{n+1} = 2u^n - u^{n-1} + \Delta t^2 L^n(\Phi) \quad (23)$$

با استفاده از اعمال معادله دیفرانسیل حاکم (۲۲) در N نقطه برهم‌نهی، مقادیر ضرایب ثابت تابع u^n یعنی α_i ، از طریق حل دستگاه معادلات خطی زیر بدست می‌آید:

$$[A][\alpha_i] = [f_i] \quad (24)$$

که در آن خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} \phi(\|X_1 - X_1\|) & \cdots & \phi(\|X_1 - X_N\|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(\|X_N - X_1\|) & \cdots & \phi(\|X_N - X_N\|) \end{bmatrix} \quad (25)$$

و $[f_i]$ بردار مقادیر معلوم سمت راست معادله است. در نهایت با استفاده از ضرایب به دست آمده، تابع u^{n+1} به دست می‌آید.

۳-۲-۳- شرایط مرزی

شرایط مرزی اصلی در هر دو روش عددی باشبکه و بدون شبکه، شامل شرایط مرزی دیریکله، نیومن و ترکیبی (رابین) است. برای اعمال شرایط مرزی دیریکله مقدار متغیر حل مسئله در مرز به طور مستقیم اعمال می‌شود:

$$u_i = u_{boundary} \quad (26)$$

که در آن، u_i مقدار متغیر اسکالر برای نقطه یا گره در روش پایه شعاعی MQ یا سلول مورد نظر در روش حجم محدود است و $u_{boundary}$ مقدار شرایط مرزی منظور شده است. برای شرایط مرزی نیومن گرادین، شار یا نرخ جریان متغیر مسئله در مرز اعمال می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_{boundary} \quad (27)$$

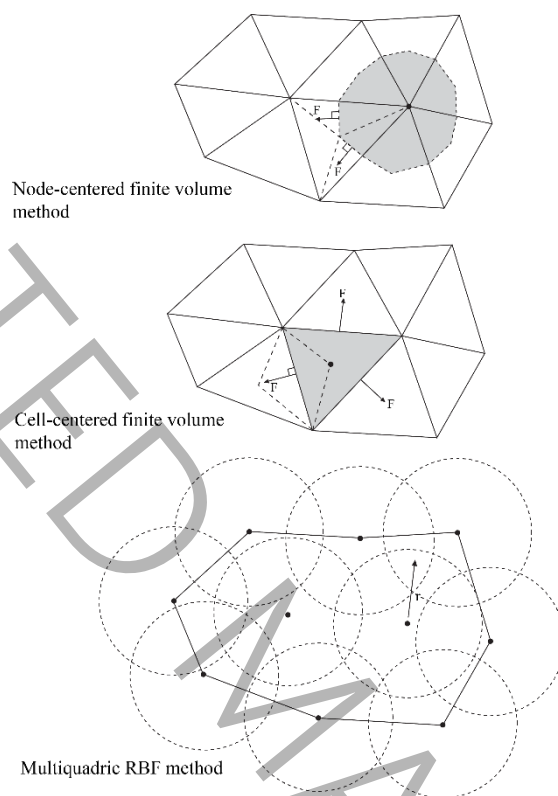
که در آن، $\frac{\partial u}{\partial n}$ گرادین (مشتق) u در جهت بردار نرمال و $f_{boundary}$ مقدار منظور شده است. در رویکرد باشبکه حجم محدود دوبعدی، این امر اغلب مستلزم تعریف سلول اضافی و اعمال شرایط مرزی بر وجه سلول با توجه به بردار نرمال آن است. اما در رویکرد بدون شبکه شرایط مرزی مستقیماً بر هر گره روی مرز اعمال می‌شود. شرایط مرزی ترکیبی نیز که به آن شرایط رابین گفته می‌شود شامل ترکیب خطی از شرایط مرزی دیریکله و نیومن است.

۳-۲-۴- شرایط پایداری

در یک روش عددی شرط پایداری یا شرط کورانت برای تضمین ناپایدار نشدن پاسخ‌ها اهمیت اساسی دارد. شرط پایداری کورانت تضمین می‌کند که گام زمانی شبیه‌سازی به اندازه کافی کوچک باشد که در گام‌های زمانی متوالی پاسخ‌ها واگرا نشود. شرط کورانت معمولاً به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta t \leq \frac{C_{CFL} \cdot d_{min}}{\max(|c|)} \quad (28)$$

که در آن، Δt گام زمانی، $d_{\min}$ کمینه گام مکانی (کوچکترین اندازه سلول در حجم محدود و یا تابعی از فاصله نقاط در روش بدون شبکه پایه شعاعی)، C_{CFL} عدد کورانت و $\max(|c|)$ بیشینه سرعت موج است. برای حفظ پایداری در طول شبیه‌سازی، مقدار گام زمانی از رابطه (۱) تعیین می‌شود که در آن مقدار عدد کورانت معمولاً در محدوده $0 < C_{CFL} \leq 1$ است، اگرچه در انواع مختلف گسسته سازی ممکن است متفاوت باشد. با ارضاء این شرط، اطلاعات پخش شده همیشه نسبتی از فاصله (گام) مکانی بر گام زمانی است.



شکل ۱: نحوه گسسته‌سازی روش بر مبنای شبکه حجم محدود NC (بالا) و حجم محدود CC (وسط) و روش بدون شبکه پایه شعاعی MQ (پایین).

Figure 1: Discretization scheme of the mesh-based node-centered (NC) finite volume (top), cell-centered (CC) finite volume (middle), and multiquadric (MQ) radial basis function meshless (bottom) methods.

۴- نتایج عددی

در این بخش برای مقایسه نتایج روش‌های عددی باشبکه حجم محدود سلول مرکزی و بدون شبکه پایه شعاعی چندربعی تعدادی آزمون عددی ارائه می‌شود. نتایج عددی بدست آمده برای هر دو روش عددی در صورت امکان با نتایج تحلیلی نیز مقایسه شده است. برای روش‌های عددی مدل‌سازی شده در این قسمت، شرط پایداری کورانت برابر با 0.5 در نظر گرفته می‌شود. خطاهای عددی این دو روش نیز از طریق معیار خطاهای L_2 و L_∞ و میانگین درصد قدرمطلق خطای نسبی محاسبه شده که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L_2 = \sqrt{\sum \frac{1}{N} (\hat{u}_i - u_i)^2}$$

$$L_\infty = \max |\hat{u}_i - u_i|$$

$$MAPE = \frac{\sum \frac{|\hat{u}_i - u_i|}{\hat{u}_i} \times 100}{N} \quad (29)$$

که در آن u_i و $\hat{u}_i$ به ترتیب مقدار متغیر محاسبه شده و مقدار متغیر مبنای مقایسه است.

۴-۱- مثال ۱: یک غشاء مستطیلی با شرایط مرزی دیریکله (حل تحلیلی)

شرایط اولیه و مرزی این آزمون در دو حالت زیر در دامنه مربعی شکل به طول و عرض یکسان $[0.1] \times [0.1]$ اعمال می‌شود:
حالت الف)

شرایط اولیه مسئله یک موج گوسی شکل به صورت رابطه (۳۰) است:

$$u(x, y, 0) = \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2}{2\sigma^2}} \quad (30)$$

و مقدار $\sigma = 0.1$ می‌باشد. همچنین شرایط مرزی دیریکله با مقدار صفر در چهار سوی دامنه انتخاب شده است:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, & u(L, y, t) &= 0 \\ u(x, 0, t) &= 0, & u(x, L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

حالت ب)

شرایط اولیه مسئله موج سینوسی شکل متقارن در دامنه به صورت رابطه (۳۲) است:

$$u(x, y, 0) = \sin(px) \sin(qy) \quad (32)$$

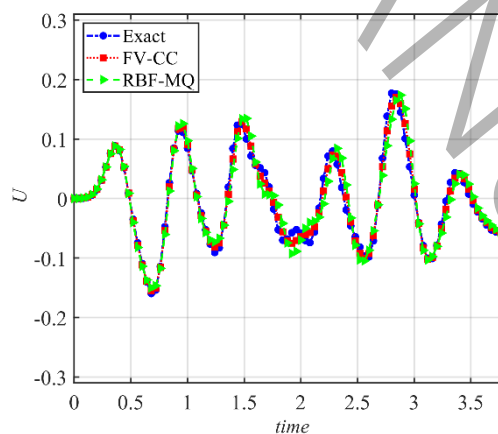
که در آن مقادیر $p = 3$ و $q = 2$ می‌باشد. در این حالت شرایط مرزی دیریکله با مقدار صفر در چهار سوی دامنه به صورت روابط (۳۳) انتخاب شده است:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, & u(L_x, y, t) &= 0 \\ u(x, 0, t) &= 0, & u(x, L_y, t) &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

حل تحلیلی معادله موج دوبعدی در حالات الف و ب با استفاده از جمع سری فوریه (۱۰) به صورت رابطه (۳۴) قابل محاسبه است:

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \left[\frac{4}{L_x L_y} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f(x, y) \sin(v_n x) \sin(\mu_m y) dx dy \cos(c \lambda_{nm} t) \times \sin(v_n x) \sin(\mu_m y) \right] \quad (34)$$

که در آن $f(x, y)$ تابع شرایط اولیه است. برای حل عددی از روش بدون شبکه پایه شعاعی MQ و روش حجم محدود سلول مرکزی CC با سلولهای سه‌وجهی (مثلثی) منظم استفاده شده است. نتایج عددی این آزمون با روش اختلاف محدود نیز مقایسه شده است.

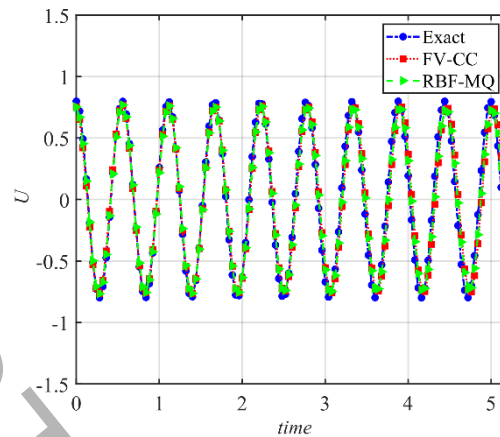


شکل ۲: نتایج حالت ۱-الف برای یک نقطه مشخص محاسبه شده با روش‌های عددی و حل دقیق.

Figure 2: Case 1-a Results for a specific point calculated using numerical methods and the exact solution.

با توجه به شکل (۲) نتایج روش‌های عددی و حل دقیق تا زمان $t = 3.8s$ برای یک نقطه مشخص شبیه‌سازی شده است. خطاهای عددی و زمان محاسبات برای روش حجم محدود CC و پایه شعاعی MQ نیز در جدول ۱ گزارش شده است. طبق نتایج ارائه شده در جدول ۱ ملاحظه می‌شود که در این مثال روش عددی پایه شعاعی MQ با متغیر شکل بهینه $\varepsilon = 11.1$ هزینه محاسباتی بسیار کمتری نسبت به روش حجم محدود دارد.

در مثال ۱-ب نتایج عددی و حل دقیق برای نقطه $x = 0.25$ و $y = 0.25$ در زمان‌های مختلف در شکل ۳ گزارش شده است.

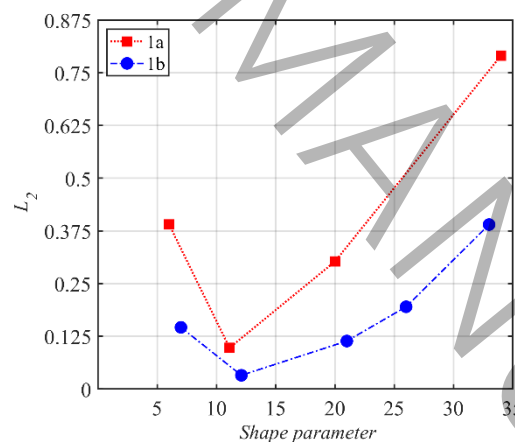


شکل ۳: نتایج حالت ۱-ب برای یک نقطه مشخص محاسبه شده با روش‌های عددی و حل دقیق.

Figure 3: Case 1-b Results for a specific point calculated using numerical methods and the exact solution.

این شبیه‌سازی تا زمان $t = 5.2s$ می‌باشد. همان‌طور که از نتایج مندرج در جدول ۱ ملاحظه می‌شود روش عددی حجم محدود سلول مرکزی با سلول مثلثی هزینه محاسباتی بیشتری نسبت به روش اختلاف محدود با شبکه کارتزین چهاروجهی مربعی و روش پایه شعاعی MQ با متغیر شکل بهینه $\varepsilon = 12.5$ داشته است. در این مثال هزینه محاسباتی روش پایه شعاعی MQ در مقایسه با روش حجم محدود به میزان قابل توجهی کمتر (یک دهم) است.

همچنین حساسیت روش عددی پایه شعاعی نسبت به متغیر شکل در شکل ۴ گزارش شده است.



شکل ۴: حساسیت روش پایه شعاعی MQ به مقادیر مختلف متغیر شکل برای آزمون عددی ۱.

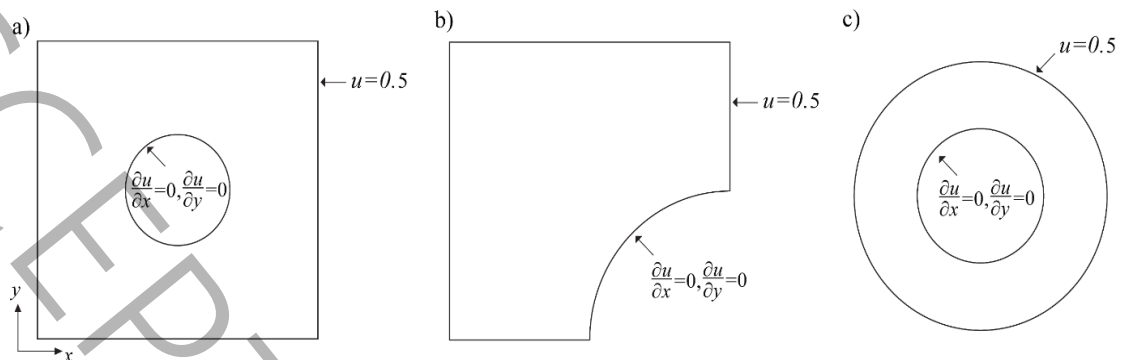
Figure 4: Sensitivity of the multiquadric (MQ) radial basis function method to various shape parameter values for numerical test 1.

مقدار متغیر شکل بهینه با روش‌های پیشین توصیه شده [۲۲] با فرمول پیشنهادی $\varepsilon = \frac{0.8\sqrt{N}}{D}$ برابر $11/9$ بوده است که با مقدار بهینه حاصل از روش تکرار در دو حالت مثال اول اختلاف چندانی نداشته است.

۴-۲- آزمون عددی ۲: یک غشاء مستطیلی با برش دایره‌ای در مرکز

در این آزمون یک غشاء مستطیلی به عرض و طول یکسان یک متر با یک برش دایره‌ای در مرکز غشاء به شعاع 0.2 متر در نظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی مسئله در شکل ۵ نشان داده شده است و شرایط اولیه آن صفر می‌باشد.

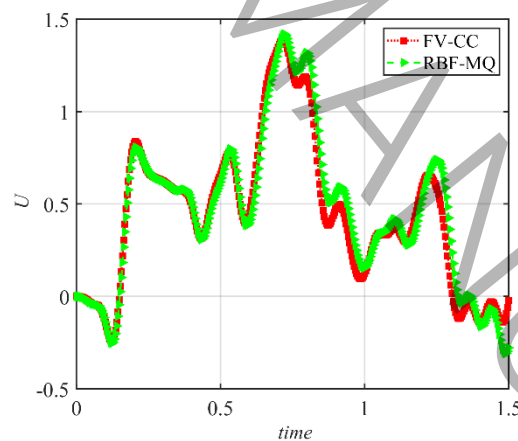
در این آزمون برای مقایسه تاثیر شرایط مرزی مختلف از شرایط مرزی دیریکله در مرز خارجی و نیومن در اطراف حفره دایره استفاده شده است.



شکل ۵: نمای کلی از غشاء شبیه‌سازی شده برای آزمون‌های عددی ۲ و ۳ و ۴ همراه با شرایط مرزی مسئله.

Figure 5: General view of the simulated membrane for numerical tests 2, 3, and 4, along with the boundary conditions of the problem.

حل تحلیلی این مسئله موجود نیست. بنابراین نتایج عددی FVM-CC و RBF-MQ با یکدیگر مقایسه شده‌اند. دامنه برای روش حجم محدود و بدون شبکه به ترتیب درون سلول‌های مثلثی و گره‌ها گسسته شده است. برای مقایسه بهتر گسسته‌سازی‌های عددی روش حجم محدود با شبکه سه‌وجهی مثلثی نامنظم و روش بدون شبکه و نقاط پراکنده به نحوی استفاده شده تا مرکز سلول‌ها و نقاط پراکنده در موقعیت‌های مشابه قرار گیرند. همچنین از آن‌جا که حل تحلیلی مسئله وجود ندارد، یک حل با شبکه ریزتر با دو برابر تعداد سلول حالت اولیه از طریق روش حجم محدود سلول مرکزی به عنوان پاسخ مرجع، محاسبه شده است.



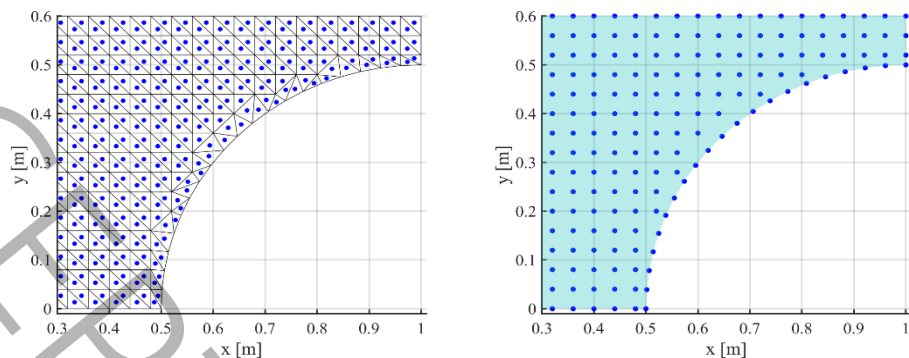
شکل ۶: نتایج آزمون ۲ برای یک نقطه مشخص محاسبه شده با روش‌های عددی.

Figure 6: Test 2 results for a specific point calculated using numerical methods.

در شکل ۶ نتایج عددی دو روش حجم محدود و روش پایه شعاعی برای یک نقطه مشخص در زمان‌های مختلف شبیه‌سازی شده است. خطای عددی روش حجم محدود و روش پایه شعاعی با متغیر شکل بهینه $\varepsilon = 20$ نسبت به پاسخ مرجع و هزینه محاسباتی آن‌ها در جدول ۱ گزارش شده است. چنانکه در جدول ۱ ملاحظه می‌شود روش چندربعی به ازای دقت تقریباً یکسان، نسبت به روش حجم محدود دارای سرعت بسیار بیشتری (نه برابر) است.

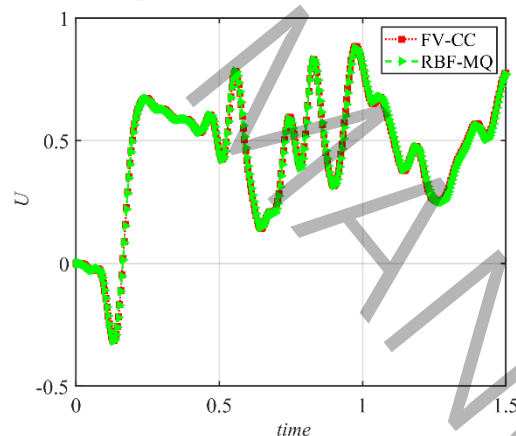
۴-۳- آزمون عددی ۳: یک غشاء با برش ربع دایره در گوشه

در این آزمون یک غشاء مستطیلی با طول و عرض ۰/۶ متر اما با یک برش ربع‌دایره به شعاع ۰/۵ متر در گوشه سمت راست پایین تولید می‌شود. شرایط مرزی مسئله در شکل ۵ نشان داده شده است و شرایط اولیه آن صفر می‌باشد.



شکل ۷: نمای نزدیک از دامنه گسسته سازی شده آزمون عددی ۳ برای روش حجم محدود CC (چپ) و روش پایه شعاعی MQ (راست).
Figure 7: Close-up view of the discretized domain of numerical test 3 for the CC finite volume method (left) and the MQ radial basis function method (right).

از آن‌جا که پاسخ تحلیلی این آزمون در دسترس نیست نتایج عددی FVM-CC و RBF-MQ با یک پاسخ مرجع از طریق روش حجم محدود با شبکه ریزتر مقایسه شده است. برای مقایسه بهتر، تعداد و موقعیت سلول‌ها و نقاط پراکنده به طور یکسان انتخاب شده اند.



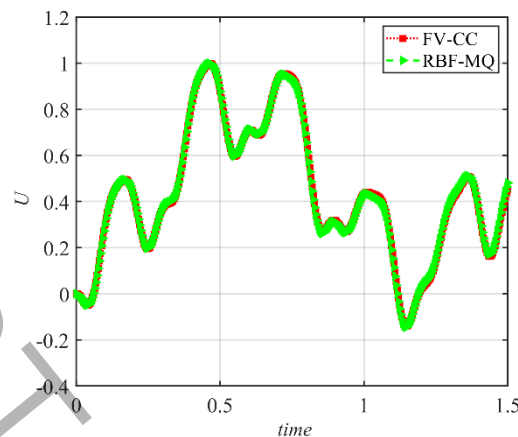
شکل ۸: نتایج آزمون ۳ برای یک نقطه مشخص محاسبه شده با روش‌های عددی حجم محدود و چندربعی.
Figure 8: Test 3 results for a specific point calculated using finite volume and multiquadric (MQ) numerical methods.

همانطور که در شکل ۸ نشان داده شده است، نتایج عددی این مسئله برای یک نقطه مشخص تا زمان $t = 1.5s$ شبیه‌سازی شده است. نتایج خطاها و هزینه محاسباتی هر روش در جدول ۱ آمده است. همان‌طور که در جدول ۱ دیده می‌شود، در این مثال هم روش حجم محدود CC با زمان پردازش ۱/۵۲۷ ثانیه در مقایسه با روش پایه شعاعی با زمان پردازش ۰/۱۶۷ ثانیه، با وجود خطای تقریباً یکسان، دارای هزینه محاسباتی بیشتر (نه برابر) بوده است.

۴-۴- آزمون عددی ۴: یک غشاء حلقه‌ای

در این آزمون برای بررسی بیشتر عملکرد دو روش عددی حجم محدود و پایه شعاعی و درک بهتر نحوه رفتار این دو روش در دامنه‌های پیچیده، میدان موج در یک غشاء حلقوی با قطر داخلی ۰/۶ و قطر خارجی ۱ متر که در شکل ۵ نشان داده شده است مدل سازی می‌شود. شرایط مرزی مسئله در شکل ۵ نشان داده شده است و شرایط اولیه آن صفر می‌باشد. همچنین برای مقایسه بهتر

نتایج، یک حل مرجع با استفاده از روش حجم محدود با شبکه ریزتر تولید شده است. توزیع نقاط برهم‌نهی و سلول‌ها مانند آزمون‌های ۲ و ۳ در هر دو روش یکسان فرض می‌شود.



شکل ۹: نتایج آزمون ۴ برای یک نقطه مشخص محاسبه شده با روش‌های عددی حجم محدود و چنددریعی.

Figure 9: Test 4 results for a specific point calculated using finite volume and multiquadric (MQ) numerical methods.

در شکل ۹ نتایج عددی این مسئله برای یک نقطه مشخص تا زمان $t=1.5s$ شبیه‌سازی شده است. همچنین نتایج خطاها و هزینه محاسباتی هر روش در جدول ۱ گزارش شده است. همان‌طور که در جدول ۱ مشاهده می‌شود زمان پردازش روش حجم محدود برای این آزمون ۱/۱۱۹ ثانیه و برای روش پایه شعاعی ۰/۱۲۲ ثانیه می‌باشد که نشان‌دهنده هزینه محاسباتی بیشتر (همچنان‌که برای روش FV نسبت به روش MQ، به ازای مرتبه خطای تقریباً یکسان است. متغیر شکل بهینه برای این مثال $\varepsilon=9.5$ محاسبه شده است.

جدول ۱: خطا و کارایی روش‌های حجم محدود CC و بدون شبکه پایه شعاعی MQ نسبت به پاسخ دقیق برای آزمون‌های عددی ارائه شده

Table 1: Error and efficiency of CC finite volume and MQ radial basis function meshless methods relative to the exact solution for the presented numerical tests.

دقت و کارایی				نوع گسسته سازی	روش حل	شماره آزمون
CPU runtime (s)	MAPE %	L2	L ∞			
0.025s	6.94	0.0778	0.1634	مربعی-منظم	FDM-LF	آزمون ۱-الف
1.144s	8.96	0.1321	0.2459	مثلثی-منظم	FVM-CC	
0.109s	9.70	0.1476	0.321	بدون شبکه $\varepsilon=11.1$	RBF-MQ	
0.038s	5.07	0.0213	0.0472	مربعی-منظم	FDM-LF	آزمون ۱-ب
1.541s	6.98	0.0409	0.0723	مثلثی-منظم	FVM-CC	
0.156s	7.74	0.0525	0.087	بدون شبکه $\varepsilon=12.5$	RBF-MQ	
1.549s	5.41	0.0142	0.0326	مثلثی-بی سازمان	FVM-CC	آزمون ۲
0.172s	6.42	0.0251	0.0463	بدون شبکه $\varepsilon=20$	RBF-MQ	
1.527s	6.07	0.0237	0.0463	مثلثی-بی سازمان	FVM-CC	آزمون ۳
0.167s	7.68	0.0325	0.0764	بدون شبکه $\varepsilon=19$	RBF-MQ	
1.119s	5.52	0.0161	0.031	مثلثی-بی سازمان	FVM-CC	آزمون ۴
0.122s	7.02	0.0211	0.0431	بدون شبکه $\varepsilon=9.5$	RBF-MQ	

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، عملکرد روش بدون شبکه پایه شعاعی چنددریعی (MQ) در مقایسه با روش حجم محدود سلول مرکزی (FV) برای حل معادله موج دو بعدی بررسی شده است. پیاده‌سازی روش حجم محدود سلول مرکزی وابسته به تولید شبکه‌های مثلثی است و نیازمند صرف هزینه بالای تولید سلول‌ها به ویژه در هندسه‌های نامنظم و پیچیده است؛ در حالی‌که آماده‌سازی میدان در روش پایه

شعاعی با استفاده از نقاط پراکنده دلخواه به مراتب ساده‌تر انجام می‌شود. پنج آزمون عددی معرفی شده در این تحقیق شامل مدل سازی موج در یک هندسه ساده مربعی شکل با شرایط مرزی دریکله، یک موج گوسی و سینوسی برای شرایط اولیه موج و مدل سازی حرکت موج در سه هندسه نامنظم با وجود شرایط مرزی دریکله و نیومن است. نتایج عددی به دست آمده نشان داد که هزینه محاسباتی در روش حجم محدود در مقایسه با روش پایه شعاعی به طور میانگین تا نه برابر بوده است. نتایج مدل سازی جریان در هندسه مربعی شکل برای روش‌های MQ و FV با نتایج حل تحلیلی از طریق جداسازی متغیرها و روش اختلاف محدود مقایسه شده است. نتایج در هر دو آزمون نشان می‌دهد که اگرچه روش اختلاف محدود در مقایسه با روش‌های عددی حجم محدود و پایه شعاعی دارای دقت و سهولت بالاتری است، با این وجود روش عددی اختلاف محدود و روش تحلیلی به سادگی قابل تعمیم برای هندسه‌های پیچیده و نامنظم نیست و استفاده از آن‌ها غالباً محدود به هندسه‌های ساده مربعی در مختصات کارتیزین یا دایروی در مختصات قطبی است. نتایج همچنین نشان از دقت اندکی بیشتر روش حجم محدود نسبت به روش پایه شعاعی دارد. یکی از دلایل این موضوع وابستگی روش پایه شعاعی MQ به مقدار پارامتر شکل انتخابی است. همچنین روابط توصیه شده در پژوهش‌های پیشین برای یافتن عدد شکل بهینه در دو حالت از مثال اول این پژوهش استفاده شده است. نتایج نشان داده است که دقت عددی روش پایه شعاعی با مقدار عدد شکل به دست آمده از این روابط با نتایج متغیر شکل بهینه محاسبه شده از روش تکرار اختلاف چندانی نداشته است. در مجموع می‌توان گفت که در مقایسه دو روش عددی حجم محدود و روش پایه شعاعی چندربعی که برای مسائل با هندسه‌های پیچیده، نامنظم و دامنه‌های گسترده که نیازمند صرف هزینه محاسباتی کمتر می‌باشند، استفاده از روش پایه شعاعی MQ اکیدا توصیه می‌شود. در مقابل برای میدان‌های کوچکتر، هندسه‌های منظم و مسائلی که دقت بالاتر مدنظر باشد، روش حجم محدود قابل توصیه است.

۶- فهرست علائم

علائم انگلیسی

x, y, z	متغیرهای مستقل مکان
t	متغیر مستقل زمان
X, Y	توابع مستقل به ترتیب بر حسب x, y
T	تابع مستقل به ترتیب بر حسب t
L_x, L_y	طول میدان در جهات x, y
α_i	ضرایب مجهول تابع چندربعی
u	متغیر پایستار از جنس جابجایی (m) یا سرعت (ms^{-1})
c	ضریب ثابت سرعت انتشار (ms^{-1})
Δt	گام زمانی
CFL	عدد کورانت

۷- منابع و مراجع

- [1] M. Akbari, B. Pirzadeh, Preserving stationary discontinuities in two-layer shallow water equations with a novel well-balanced approach, Journal of Hydroinformatics, 25(5) (2023) 1979-2003.
- [2] H. Kahid Basiri, R. Babaei, A. Fallah, E. Jabbari, Development of multiquadric method for solving dam break problem, Journal of Hydraulics, 14(4) (2020) 83-98. (in persian)
- [3] E.F. Toro, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [4] R.J. LeVeque, Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [5] P.D. Lax, Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1973.
- [6] A. Harten, J.M. Hyman, Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws, Journal of Computational Physics, 50(2) (1983) 235-269.

- [7] P.L. Roe, Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes, *Journal of Computational Physics*, 43(2) (1981) 357-372.
- [8] M. Akbari, B. Pirzadeh, Implementation of exactly well-balanced numerical schemes in the event of shockwaves: A 1D approach for the shallow water equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 94(7) (2022) 849-895.
- [9] M.E. Vázquez-Cendón, Improved Treatment of Source Terms in Upwind Schemes for the Shallow Water Equations in Channels with Irregular Geometry, *Journal of Computational Physics*, 148(2) (1999) 497-526.
- [10] R.J. LeVeque, Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods: The Quasi-Steady Wave-Propagation Algorithm, *Journal of Computational Physics*, 146(1) (1998) 346-365.
- [11] M. Akbari, B. Pirzadeh, A second order well-balanced and entropy consistent numerical scheme for one-dimensional shallow water equations, *Journal of Hydraulics*, 19(2) (2024) 1-17. (in persian)
- [12] R.L. Hardy, Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, *Journal of Geophysical Research* (1896-1977), 76(8) (1971) 1905-1915.
- [13] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, 19(8-9) (1990) 147-161.
- [14] E. Jabbari, A. Fallah, A Comparison Between Local and Global MQ-RBF, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, (2025).
- [15] M. Gholamipoor, M. Ghiasi, Numerical Simulation of Fully Non-linear Sloshing Waves in a Rectangular Tank Using Radial Basis Function-Finite Difference Method, *Water Waves*, (2025).
- [16] D. Mishra, N.B. Barik, T. Samantara, A Radial Basis Function and Its Application in Solving Partial Differential Equations—A Brief Review, in: K.N. Das, P. Biswas, I. Budinska, R. Mallipeddi (Eds.) *Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics and Applications*, Springer Nature Singapore, Singapore, 2026, pp. 107-117.
- [17] N. Tavakoli, R. Babaee, E. Jabbari, Solving the Inhomogeneous Second-Order Wave Equation with Asymmetric Boundary Conditions: Novel Analytical, Mesh-Based, and Meshless Approaches in Computational Fluid Dynamics, *Journal Of Iranian Water Engineering Research*, 3(3) (2023) -(in persian)
- [18] A.E. Tarwater, Parameter study of Hardy's multiquadric method for scattered data interpolation, *Lawrence Livermore National Laboratory, California, United States*, 1985.
- [19] B. Šarler, R. Vertnik, Meshfree explicit local radial basis function collocation method for diffusion problems, *Computers & Mathematics with Applications*, 51(8) (2006) 1269-1282.
- [20] A. Fallah, E. Jabbari, R. Babaee, Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization, *Computers & Mathematics with Applications*, 77(3) (2019) 815-829. (in persian)
- [21] M. Koushki, R. Babaee, E. Jabbari, Application of MQ-RBF method for solving seepage problems with a new algorithm for optimization of the shape parameter, *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, 52(4) (2020) 1009-1024. (in persian)
- [22] R. Franke, Scattered data interpolation: tests of some methods, *Mathematics of computation*, 38(157) (1982) 181-200.