



Hydrodynamic Pressure Analysis in Dams with Infinite Reservoirs Considering Dam–Reservoir Interaction

Ali Mohammadi Kordkheyli, Mohsen Bozorgnasab, Ali Asgari * , Reza Taghipour

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Technology, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

ABSTRACT: Dams, due to their critical importance for a country’s infrastructure, must be analyzed and evaluated with high precision. One of the key considerations for dam analysis in seismic regions is the estimation of hydrodynamic pressures and dam deformations. In this study, an analytical method was developed to assess the responses of two types of dams—rigid and flexible—connected to a reservoir of infinite length. Frequencies, pressure distribution, and deformation for a dam–reservoir system with an incompressible, irrotational, and non-adhesive fluid were calculated using the differential transform method. In the analyzed dams, surface waves were neglected, and the reservoir floor was assumed to be perfectly rigid and horizontal. The analyses considered the effects of dam–reservoir interaction. The influences of parameters such as dam height, fluid density, horizontal ground acceleration, and elasticity modulus on the hydrodynamic pressure and dam deformation were evaluated for both rigid and flexible dams. The most significant effect of dam–reservoir interaction on hydrodynamic pressure was the absence of maximum pressure at the base of the flexible dam. Results also indicate that, in the flexible dam, a 40% increase in dam thickness reduces displacement, while the maximum pressure on the dam increases by more than 150%. Increasing the elasticity modulus by 20% leads to an approximately 22% increase in maximum pressure. Moreover, with increasing dam height, displacement increases due to the softer behavior of the dam, resulting in a reduction in hydrodynamic pressure. The findings indicate that the thickness of a flexible dam has a more pronounced effect than other parameters. In rigid dams with an infinitely long reservoir, increasing fluid density, horizontal ground acceleration, and dam height leads to higher pressure on the dam.

Review History:

Received: Apr. 09, 2025
Revised: Jan. 21, 2026
Accepted: Feb. 13, 2026
Available Online: Mar. 01, 2026

Keywords:

Hydrodynamic Pressure
Dam–Reservoir Interaction
Differential Transform Method
Rigid Dam
Flexible Dam

1- Introduction

The determination of hydrodynamic pressures exerted on concrete gravity dams during earthquakes has always attracted significant attention from researchers. For the first time, Westergaard (1933) presented an analytical method for calculating the hydrodynamic pressure of an inviscid fluid acting on rigid vertical dams subjected to harmonic excitation. His solution was formulated in a two-dimensional framework assuming an incompressible fluid, a vertical upstream face, and a horizontal reservoir bottom, and was performed in the frequency domain.

Navayineya et al. (2009) investigated the effect of fluid viscosity on hydrodynamic pressure acting on concrete gravity dams under dynamic loading in the time domain. Their results showed that neglecting fluid viscosity leads to different hydrodynamic pressure values compared to the viscous case. Rezaiee-Pajand et al. (2016) analyzed the coupled dam–reservoir system and presented pressure and frequency values on both sides of the reservoir by solving

the Laplace equation and coupling the governing equations of flexible beams. They computed the hydrodynamic pressure acting on the dam body. In another study, Rezaiee-Pajand et al. (2018) investigated beam–fluid interaction using the Differential Transform Method (DTM) and demonstrated that this method is simpler and more efficient compared to the finite element method. Pasbani Khiavi et al. (2023) proposed a probabilistic model to evaluate the dynamic behavior of concrete gravity dams considering fluid–structure interaction. In their study, the governing equation was of Helmholtz type, and the effect of wave propagation velocity was considered in hydrodynamic pressure calculations. The hydrodynamic pressures at different dam heights were extracted and presented. Kouhdasti and Bouaanani (2024) analyzed the dynamic response of concrete gravity dams using modified ground motion accelerations that account for hydrodynamic effects. They calculated key response indices including displacement and stress variations and evaluated gravitational effects. Additionally, modal shape variations of the dam were

*Corresponding author’s email: a.asgari@umz.ac.ir



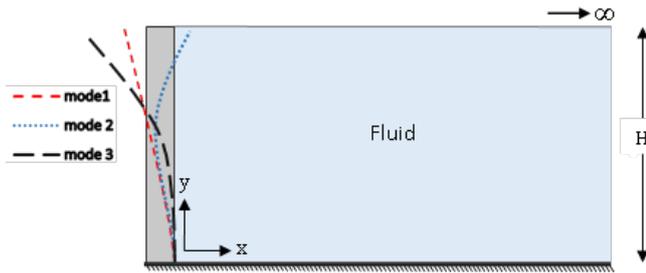


Fig. 1. Flexible Dam with Infinite Length.

examined in different vibration modes.

The present study continues previous research by investigating the hydrodynamic behavior of dam–reservoir systems. First, the rigid dam–reservoir system with finite reservoir length is analyzed. Then, the flexible dam–reservoir system with infinite reservoir length is examined. The reservoir is assumed to contain incompressible, inviscid, and irrotational fluid, and surface wave effects are neglected. In both systems, the reservoir bottom is considered completely rigid and horizontal. The main objective of this study is the accurate analysis and comparison of rigid and flexible dam–reservoir systems using the Differential Transform Method (DTM).

2- Governing equations

In this research, the pressure equation is first derived for a rigid dam and then extended to a flexible dam–reservoir system. Wave propagation effects are considered, while surface waves and fluid viscosity are neglected. The governing two-dimensional Laplace equation for hydrodynamic pressure is:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

Four boundary conditions are required to solve the above equation. For the rigid dam, after applying the boundary conditions, the pressure distribution is obtained as:

$$p(x,y) = \frac{2\rho_f \alpha_g}{H} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\lambda_j^2} \exp(-\lambda_j x) \cos(\lambda_j y) \tag{2}$$

For the flexible dam–reservoir system, considering fluid–structure interaction, two coupled governing equations must be solved. The hydrodynamic pressure acts as a distributed load on the dam body. The pressure solution, after applying three boundary conditions, is obtained as:

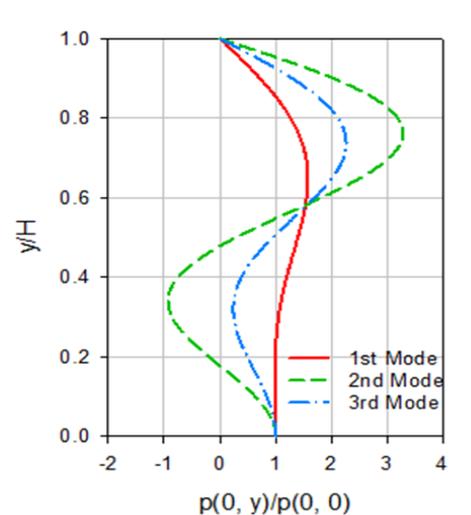


Fig. 2. Dimensionless Pressure Variations on the Dam Body for Three Modes.

$$p(x,y,\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j e^{-\lambda_j x} \cos(\lambda_j y) \tag{3}$$

At x=0, the interaction boundary condition is applied. The governing equation of the flexible dam, modeled as an Euler–Bernoulli beam in the frequency domain, is:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \rho A \omega^2 u = -p(0,y,\omega) \tag{4}$$

Using the Differential Transform Method (DTM), the above equation can be transformed into the following recursive relation: Fourth beam boundary conditions are applied to obtain the complete solution.

$$U_{k+4} = \frac{\omega^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)EI} (\rho A U_k + \sum_{l=0}^{\infty} e_k^l U_l) \tag{5}$$

$$e_k^l = \frac{2\rho_f}{H} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_j}\right) b_l^j g_k^j,$$

$$b_k^j = \int_0^H \cos(\lambda_j y) y^k dy, \quad g_k^j = \cos(\lambda_j y)$$

3- Results and Discussion

In this study, the rigid and flexible dam–reservoir systems were analyzed considering interaction effects. After obtaining the pressure equation, hydrodynamic pressure and displacement were evaluated numerically. For the rigid dam, pressure values at different heights and corresponding

contour lines were presented. The effects of parameters including water mass density, horizontal ground acceleration coefficient, and dam height on hydrodynamic pressure were investigated. For the flexible dam with infinite reservoir length, in addition to hydrodynamic pressure, the system frequency and equivalent beam displacement were evaluated. By setting the determinant of the coefficients equal to zero, the eigenvalue (natural frequency of the system) was calculated. Subsequently, displacement and hydrodynamic pressure were obtained. First, the natural frequency of the equivalent flexible beam was computed for both empty and full reservoir conditions. Then, using the system frequency in the recursive relation, hydrodynamic pressure and displacement values were calculated and presented in tabular and graphical forms. Furthermore, the effects of parameters such as dam height, elastic modulus, and dam thickness on hydrodynamic pressure were examined and illustrated. It should be noted that in all analyses, surface wave effects were neglected, the reservoir bottom was assumed rigid and horizontal, and the fluid was considered incompressible, inviscid, and irrotational. The Differential Transform Method was employed to solve the governing equations.

4- Conclusion

In the rigid dam case, increasing water mass density, horizontal seismic acceleration coefficient, and dam height led to an increase in hydrodynamic pressure acting on the dam body. The maximum pressure generally occurred at the reservoir bottom. In contrast, for the flexible dam with infinite reservoir length, increasing dam height reduced the equivalent beam stiffness and increased structural displacement. Increasing dam thickness and elastic modulus enhanced structural stiffness. With increasing system stiffness, displacement decreased and consequently hydrodynamic pressure acting on the dam was reduced. One important

result of this study is that, due to dam–reservoir interaction in flexible dams, the maximum pressure does not necessarily occur at the reservoir bottom, highlighting the fundamental difference between rigid and flexible dam behavior.

References

- [1] H.M. Westergaard, Water pressures on dams during earthquakes, *Transactions of the American society of Civil Engineers*, 98(2) (1933) 418-433, <https://doi.org/10.1061/TACEAT.0004496>.
- [2] B. Navayineya, J.V. Amiri, M.A. Ardeshir, A closed form solution for hydrodynamic pressure of gravity dams reservoir with effect of viscosity under dynamic loading, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 58 (2009) 416-420, <https://doi.org/10.5281/zenodo.1080840>.
- [3] M. Rezaiee-Pajand, A. Aftabi S, M.S. Kazemiyani, Analytical solution for free vibration of flexible 2D rectangular tanks, *Ocean Engineering*, 122 (2016) 118-135, <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.05.052>.
- [4] M. Rezaiee-Pajand, M.S. Kazemiyani, A. Aftabi S, Solving coupled beam-fluid interaction by DTM, *Ocean Engineering*, 167 (2018) 380-396, <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.04.020>.
- [5] M. Pasbani Khiavi, A. Ferdousi, A. Moallemi Khiavi, A probabilistic model for evaluation of the dynamic behavior of a concrete gravity dam considering the fluid-structure interaction, *Advances in Civil Engineering*, 2023(1) (2023) 9927608, <https://doi.org/10.1155/2023/9927608>.
- [6] R. Kouhdasti, N. Bouaanani, Responsespectrumandmodal dynamic analyses of gravity dams using ground motion accelerations modified to account for hydrodynamic effects, *Earthquake Spectra*, 40(4) (2024) 2761-2804, <https://doi.org/10.1177/87552930241246016>.



بررسی فشار هیدرودینامیکی در سدها با مخزن بی‌نهایت با در نظر گرفتن اثر تعامل سد و مخزن

علی محمدی کردخیلی، محسن بزرگ‌نساب، علی عسگری*^{ID}، رضا تقی‌پور

گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۴/۰۱/۲۰
بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۰۳
پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۲۴
ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۱۲/۱۰

کلمات کلیدی:

سد صلب و انعطاف‌پذیر
فشار هیدرودینامیکی
اندرکنش سد-مخزن
روش تبدیل دینامیکی
تغییر شکل سد

خلاصه: سدها به دلیل اهمیت فراوانی که برای زیر ساخت‌های یک کشور دارند، باید به‌طور دقیق تحلیل و بررسی شوند. از مهم‌ترین بحث‌های مورد نیاز برای تحلیل سدها در مناطق لرزه‌ای، برآورد فشارهای هیدرودینامیکی و تغییر شکل سد می‌باشد. در این پژوهش، یک روش تحلیلی برای ارزیابی پاسخ‌های دو نوع سد صلب و انعطاف‌پذیر با مخزنی به طول بی‌نهایت انجام شد. فرکانس‌ها، معادله فشار و تغییر شکل برای یک سیستم سد-مخزن با شاره تراکم ناپذیر، ناچرخی و بدون چسبندگی با کمک روش تبدیل دینامیکی محاسبه شد. در سدهای مورد بررسی، از امواج سطحی صرف‌نظر و کف مخزن کاملاً صلب و بدون شیب در نظر گرفته شده است. تحلیل‌ها با در نظر گرفتن اثرات اندرکنش سد-مخزن انجام شد. اثرات پارامترهای نظیر ارتفاع سد، چگالی جرمی سیال، ضریب شتاب افقی زمین و ضریب کشسانی برای سدهای صلب و منعطف بر فشار هیدرودینامیکی و تغییر شکل سدها مورد ارزیابی قرار گرفت. مهم‌ترین اثرات اندرکنش سد و مخزن بر فشار هیدرودینامیکی عدم رخداد فشار بیشینه در تراز کف سد منعطف می‌باشد. همچنین نتایج نشان می‌دهد که در سد منعطف با افزایش ۴۰ درصدی از ضخامت سد، مقدار جابه‌جایی کاهش یافته ولی بیشینه فشار وارده به سد بیش از ۱۵۰ درصد افزایش یافت. با افزایش ۲۰ درصدی از ضریب کشسانی سد، بیشینه فشار حدوداً ۲۲ درصد افزایش یافت. همچنین با افزایش ارتفاع، با توجه به نرم‌تر شدن سد، جابه‌جایی افزایش می‌یابد و در نتیجه فشار هیدرودینامیکی، کمتر شد. نتایج گویای اینست که اثرات ضخامت سد منعطف نسبت به دیگر پارامترهای مورد بررسی، موثرتر است. در سد صلب با طول مخزن بی‌نهایت، با افزایش چگالی جرمی سیال، شتاب افقی زمین و ارتفاع سد، مقدار فشار وارد شده به سد افزایش یافت.

۱- مقدمه

با توجه به موقعیت جغرافیایی و اقلیمی کشور ایران و همچنین محدودیت منابع آب و کمبود میزان بارندگی، احداث سدها و سرریزهای مناسب به منظور ذخیره و مدیریت آب‌های سطحی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [۱]. با این حال، در صورت عدم پیش‌بینی و تحلیل صحیح رفتار سازه‌ای سدها، به‌ویژه تحت بارهای لرزه‌ای، این سازه‌ها می‌توانند منجر به خسارات جانی و مالی قابل توجهی شوند. از این‌رو، مسئله ایمنی سدها همواره به‌عنوان یکی از موضوعات حیاتی در مهندسی عمران و مهندسی زلزله مطرح بوده است. قرارگیری هم‌زمان سد و مخزن موجب بروز پدیده‌های فیزیکی پیچیده‌ای در سیستم می‌شود؛ به‌گونه‌ای که در بخش جامد، تغییرات تنش و در بخش سیال، تغییرات فشار ایجاد می‌گردد. این اثرات متقابل تحت عنوان اندرکنش سد-مخزن شناخته می‌شوند [۲].

تعیین فشار هیدرودینامیکی وارد بر سدهای بتنی وزنی در هنگام زلزله، همواره مورد توجه پژوهشگران بسیاری بوده است. برای نخستین بار، وسترگارد (۱۹۳۳) یک روش تحلیلی برای محاسبه فشار هیدرودینامیکی سیال غیرلجج بر سدهای صلب قائم تحت تحریک هارمونیک ارائه کرد. این تحلیل در قالب یک مدل دوبعدی با فرض سیال تراکم‌ناپذیر، بالادست قائم و کف افقی صلب، در حوزه فرکانس انجام شد [۳]. کوتسوبو (۱۹۵۷) نشان داد که پاسخ وسترگارد تنها در شرایطی معتبر است که دوره تناوب تحریک هارمونیک بزرگ‌تر از دوره تناوب طبیعی مخزن باشد [۴]. چوپرا (۱۹۶۷) با در نظر گرفتن تراکم‌پذیری سیال و صرف‌نظر از امواج سطحی، یک حل تحلیلی برای محاسبه فشار هیدرودینامیکی سدهای صلب قائم تحت شتاب هارمونیک ارائه کرد. وی همچنین اثر مؤلفه‌های افقی و عمودی شتاب زلزله را بررسی نمود و کاهش فرکانس‌های طبیعی سیستم تحت تحریک افقی زمین را گزارش داد [۵]. آویلز (۱۹۹۸) یک روش شبه‌تحلیلی برای

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: a.asgari@umz.ac.ir



انجام داده و با تفکیک تیر به چند بخش، فرکانس‌های طبیعی سیستم تیر کنسولی را استخراج کردند [۱۵]. رضایی‌پژند و همکاران (۲۰۱۶) تحلیل یک سیستم سد-مخزن با وجود تیرهای انعطاف‌پذیر در دو طرف مخزن را ارائه کرده و با حل همبسته معادلات حاکم بر تیر و معادله لاپلاس، مقادیر فرکانس‌ها و فشار هیدرودینامیکی وارد بر بدنه سد را محاسبه نمودند [۱۶]. جعفری و لطفی (۲۰۱۸) تحلیل دینامیکی سد بتنی وزنی با در نظر گرفتن اندرکنش سد-مخزن را انجام داده و اثر حرکت و شتاب افقی زمین را بر فرکانس‌های طبیعی و فشار هیدرودینامیکی بررسی کردند [۱۷]. رضایی‌پژند و همکاران (۲۰۱۸) نیز با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل (DTM)، اندرکنش سازه-سیال را مطالعه کرده و بیان نمودند که این روش در مقایسه با روش المان محدود، از سادگی و کارایی بیشتری برای محاسبه فشار هیدرودینامیکی برخوردار است [۱۸]. در نهایت، مزیتی و میهوبی (۲۰۱۸) اثر شیب بستر بالادست را بر فشار هیدرودینامیکی وارد بر سدهای بتنی وزنی بررسی کرده و نشان دادند که این پارامتر تأثیر قابل‌توجهی بر پایداری سد دارد [۱۹]. ونگ و همکاران (۲۰۱۸) نیز با استفاده از فرمول اصلاح‌شده وسترگارد، فشار هیدرودینامیکی را در ارتفاع‌های مختلف بررسی کرده و اثر پارامترهایی نظیر طول و ارتفاع مخزن را بر توزیع فشار هیدرودینامیکی و اختلاف نتایج با روش تحلیلی مورد ارزیابی قرار دادند [۲۰]. اکسو و همکاران (۲۰۱۸) یک تحلیل غیرخطی بر روی مخزنی با سیال تراکم‌پذیر انجام دادند. آن‌ها معادله حاکم را به صورت معادله لاپلاس، با در نظر گرفتن اثر سرعت انتشار موج، فرموله کردند و فشار هیدرودینامیکی سیستم را تحت شتاب‌های گرانشی مختلف مورد بررسی و مقایسه قرار دادند [۲۱]. ونگ و همکاران (۲۰۱۹) با استفاده از روش المان محدود و با لحاظ تراکم‌پذیری آب، فشار هیدرودینامیکی وارد بر سدهای قوسی را تحلیل کردند و نشان دادند که هندسه سد تأثیر قابل‌توجهی بر توزیع فشار هیدرودینامیکی دارد [۲۲]. پاسبانی و همکاران (۲۰۱۹) با بهره‌گیری از شبیه‌سازی عددی به روش المان محدود و تکنیک نمونه‌گیری هایپرکیوب لاتین (LHS)، پژوهشی را برای تعیین فرکانس‌ها و فشار هیدرودینامیکی وارد بر سد بتنی وزنی ارائه کردند. در مثال عددی آن‌ها، فشار هیدرودینامیکی، تغییر شکل و تنش‌های ایجادشده در سد برای فرکانس‌های مختلف محاسبه شد [۲۳]. پاسبانی و ساری (۲۰۲۱) توزیع فشار هیدرودینامیکی در مخزن سد بتنی وزنی تحت ارتعاش قائم را بررسی کردند. آن‌ها فشارهای هیدرولیکی ایجادشده در مخزن ناشی از اندرکنش پی و مخزن را محاسبه کرده و تغییرات فشار

تعیین فشار هیدرودینامیکی بر سدهای صلب با شیب بالادست ارائه داد که در آن اثرات ویسکوزیته، روانگرایی و تراکم‌پذیری سیال لحاظ شده بود [۶]. زینگالس (۲۰۰۳) با استفاده از تحلیل تصادفی، فشار هیدرودینامیکی سیستم سد-مخزن را تحت اثر زلزله بررسی کرد. در این مطالعه، سیال به صورت تراکم‌پذیر و مخزن به صورت نامتناهی مدل‌سازی شد و تحریک لرزه‌ای به عنوان یک بار تصادفی به بستر صلب و افقی سد اعمال گردید. لازم به ذکر است که در این تحلیل، اثر امواج سطحی نادیده گرفته شد و تغییرات زمانی فشار هیدرودینامیکی مورد ارزیابی قرار گرفت [۷].

نوایی‌نیا و همکاران (۲۰۰۹) تأثیر گرانیوی سیال بر فشار هیدرودینامیکی وارد بر سدهای بتنی وزنی تحت بارگذاری دینامیکی را در حوزه زمان بررسی کردند. نتایج این پژوهش نشان داد که فرض سیال گرانبه منجر به مقادیر متفاوتی از فشار هیدرودینامیکی نسبت به حالت سیال غیرگرانبه می‌شود [۸]. ژائولین و همکاران (۲۰۱۰) اثر جذب رسوبات مخزن و تندی انتشار موج را بر فشار هیدرودینامیکی و فرکانس سیستم تحت تحریک‌های هارمونیک افقی و عمودی بررسی کردند [۹].

عطارنژاد و باقری (۲۰۱۱) اثرات مؤلفه‌های افقی و عمودی شتاب زلزله بر فشار هیدرودینامیکی ناشی از اندرکنش سد-مخزن را ارزیابی کرده و نقش قابل‌توجه جابه‌جایی قائم زمین را در افزایش فشار هیدرودینامیکی گزارش نمودند [۱۰]. کاراکا و همکاران (۲۰۱۲) با بهره‌گیری از روش تحلیل هموتوبی، فشار هیدرودینامیکی سیستم سد-مخزن را برای یک سد با طول بی‌نهایت و کف صلب افقی، بدون در نظر گرفتن امواج سطحی، محاسبه کرده و کارایی این روش را با مثال عددی تأیید کردند [۱۱]. نوایی‌نیا و همکاران (۲۰۱۳) با در نظر گرفتن گرانیوی سیال و جذب موج مخزن، فشار هیدرودینامیکی سدها را در حوزه زمان تحلیل کردند. نتایج نشان داد که در صورتی که دوره تحریک بزرگ‌تر از دوره طبیعی مخزن باشد، اثر گرانیوی بر فشار هیدرودینامیکی ناچیز است؛ همچنین تأثیر گرانیوی در تحریک افقی بیشتر از تحریک عمودی گزارش شد [۱۲]. بونانی و رناد (۲۰۱۴) اثرات اندرکنش سازه-سیال و شتاب گرانشی را بر سدهای بتنی وزنی بررسی کرده و تأثیر هندسه مخزن بر تابع پاسخ فرکانسی سیستم را مورد ارزیابی قرار دادند [۱۳]. تارینژاد (۲۰۱۵) با استفاده از روش عددی المان طیفی، اندرکنش سد-مخزن را بررسی کرد و نشان داد که در هنگام زلزله، علاوه بر فشار هیدرواستاتیکی، فشار هیدرودینامیکی قابل‌توجهی در ناحیه تماس سد و سیال ایجاد می‌شود [۱۴].

جعفری و ایمانی (۲۰۱۵) تحلیل ارتعاش آزاد یک سیستم تیر-آب را

1. Differential Transform Method
2. Latin Hypercube Sampling

را در نسبت‌های مختلف فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی سیستم و در ارتفاع‌های متفاوت سد ارزیابی نمودند [۲۴].

حریری و همکاران (۲۰۲۲) اثر فشار هیدرودینامیکی بر سدهای بتنی وزنی را مورد مطالعه قرار دادند. در این پژوهش، تابع فشار پیشنهادی وسترگارد برای سدهایی با ارتفاع‌های مختلف محاسبه و نتایج با مطالعات پیشین مقایسه شد [۲۵]. یه و همکاران (۲۰۲۳) فشار هیدرودینامیکی وارد بر سدها را تحت ارتعاش لرزه‌ای هارمونیک بررسی کردند و نشان دادند که امواج سطحی ناشی از اثر جاذبه در مخزن ایجاد می‌شود. آن‌ها فشار هیدرودینامیکی را در ارتفاع‌ها، دوره‌های تناوب و شتاب‌های افقی مختلف محاسبه و مقایسه کردند [۲۶]. پاسبانی و همکاران (۲۰۲۳) یک مدل احتمالی برای ارزیابی رفتار دینامیکی سد بتنی وزنی با در نظر گرفتن اندرکنش سازه-سیال ارائه دادند. در این مطالعه، معادله حاکم از نوع هلمولتز بوده و اثر سرعت انتشار موج در محاسبه فشار لحاظ شده است. فشار هیدرودینامیکی در ارتفاع‌های مختلف سد نمایش داده شد و رابطه‌ای میان فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی سیستم استخراج گردید [۲۷].

اوزاندا و همکاران (۲۰۲۳) با استفاده از ساده‌سازی لاگرانژی، تأثیر فشار هیدرودینامیکی بر جابه‌جایی و فرکانس‌های طبیعی سدهای بتنی وزنی را بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که با افزایش فشار هیدرودینامیکی، فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش می‌یابد [۲۸]. کوهدهستی و بونانی (۲۰۲۴) پاسخ و تحلیل دینامیکی سدهای بتنی گرانشی را تحت شتاب حرکت زمین ارزیابی کردند. آن‌ها با ارائه روشی نوین، شتاب‌های لرزه‌ای اصلاح‌شده تحت اثرات هیدرودینامیکی را محاسبه کرده و شاخص‌های کلیدی از جمله جابه‌جایی‌های نسبی و تغییرات تنش در سدهای گرانشی را بررسی نمودند. همچنین در یک تحلیل عددی، تغییرشکل‌های سد در مودهای مختلف ارتعاشی به نمایش درآمد [۲۹]. سرمت و همکاران (۲۰۲۴) اثر فشار هیدرودینامیکی بر جابه‌جایی‌ها و تنش‌های وارد بر سد بتنی وزنی را بررسی کرده و نشان دادند که افزایش فشار هیدرودینامیکی موجب افزایش جابه‌جایی‌ها می‌شود، در حالی که اثر جاذبه می‌تواند عملکرد کلی سد را بهبود بخشد [۳۰].

در ادامه مطالعات پیشین، پژوهش حاضر به بررسی رفتار هیدرودینامیکی سیستم سد-مخزن می‌پردازد. در این مطالعه ابتدا یک سیستم سد صلب-مخزن با طول بی‌نهایت به روش تحلیلی بررسی شده

است. سپس، یک سیستم سد انعطاف‌پذیر مدل‌شده به صورت یک تیر معادل و مخزنی با طول بی‌نهایت ارزیابی شده است. در هر دو سیستم، اثر امواج سطحی نادیده گرفته شده و سیال به صورت تراکم‌ناپذیر، ناچرخشی و بدون ویسکوزیته فرض شده است. هدف اصلی پژوهش تحلیل دقیق و مقایسه سیستم‌های سد صلب-مخزن و سد انعطاف‌پذیر-مخزن با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل (DTM) است. اهداف فرعی پژوهش شامل موارد زیر می‌باشد:

- ارائه یک چارچوب تحلیلی ساده و سریع برای پیش‌بینی فشار هیدرودینامیکی و پاسخ سیستم تحت تحریک لرزه‌ای؛
- استخراج روابط تحلیلی فشار هیدرودینامیکی، فرکانس‌های طبیعی و جابه‌جایی سد تحت شرایط مرزی یک‌سر گیردار-یک‌سر آزاد؛
- بررسی تأثیر انعطاف‌پذیری سد بر رفتار دینامیکی سیستم و مقایسه آن با سد صلب.

مطالعات پیشین در این زمینه عمدتاً به سدهای صلب و یا تحلیل‌های عددی محدود شده‌اند و اغلب اثر انعطاف‌پذیری سد و تعامل آن با مخزن به طور کامل مورد بررسی قرار نگرفته است. از طرفی، بسیاری از پژوهش‌ها نیاز به روش‌های پیچیده عددی دارند که زمان‌بر بوده و قابلیت تعمیم کمی دارند. بنابراین، پژوهش حاضر با رویکرد تحلیلی و استفاده از DTM، با تمرکز بر سدهای انعطاف‌پذیر و صلب و تعامل آن‌ها با مخزن، گامی جدید در جهت ارائه نتایج تحلیلی سریع و قابل اعتماد برداشته است.

۲- روش تبدیل دیفرانسیلی

روش تبدیل دیفرانسیلی بر گرفته از سری توانی [۳۱] یک روش نسبتاً کارا و با دقت برای حل شبه تحلیلی معادلات دیفرانسیل است. به طور کلی می‌توان گفت، با اعمال روش DTM روی معادله دیفرانسیل، جواب مسئله که همان تابع مجهول است، به یک تابع چند جمله‌ای تبدیل می‌شود. مجموعه روابط DTM در جدول (۱) آمده است [۳۲].

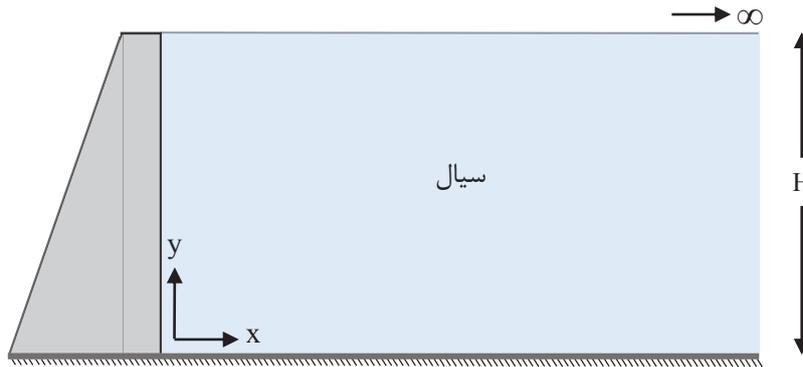
۳- معادلات حاکم

در این بخش، ابتدا معادله فشار برای یک سد صلب و سپس، برای یک سد منعطف محاسبه می‌شود و پس از آن، فرکانس و جابه‌جایی برای یک سیستم اندرکنشی با سد تحلیل می‌شود. در این پژوهش یک مخزن با طول بی‌نهایت مطابق با شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود.

جدول ۱. توابع اصلی و توابع مبدل در روش تبدیل دیفرانسیلی [۳۲].

Table 1. Basic functions and transform functions in the differential transform method [32].

Original function	Transformed function
$x(t) = \alpha f(t) \pm \beta g(t)$	$X(k) = \alpha F(k) \pm \beta G(k)$
$x(t) = \frac{df(t)}{dt}$	$X(k) = (k + 1)F(k + 1)$
$x(t) = \frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$X(k) = (k + 1)(k + 2)F(k + 2)$
$x(t) = (1 + t)^m$	$X(k) = \frac{m(m + 1) \dots (m - k + 1)}{k!}$
$x(t) = \text{Sin}(\omega t + \alpha)$	$X(k) = \frac{\omega^k}{k!} \text{Sin}\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$
$x(t) = \text{Cos}(\omega t + \alpha)$	$X(k) = \frac{\omega^k}{k!} \text{Cos}\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$
$x(t) = \frac{d^m f(t)}{dt^m}$	$X(k) = (k + 1)(k + 2) \dots (k + m)F(k + m)$
$x(t) = f(t)^m$	$X(k) = \sum_{l=0}^k F(l)^{m-1} F(k - l)$
$x(t) = e^t$	$X(k) = \frac{k}{k!}$
$x(t) = f(t) \cdot g(t)$	$X(k) = \sum_{l=0}^k F(l)G(k - l)$
$x(t) = t^m$	$X(k) = \delta(k - m) = \begin{cases} 0. & k = m \\ 1. & k \neq m \end{cases}$



شکل ۱. سیستم سد مخزن با طول بی‌نهایت.

Fig. 1. Dam-reservoir system with infinite length.

بی‌نهایت صفر لحاظ می‌گردد.

۳-۱- معادله حاکم فشار برای یک سد صلب

معادله حاکم برای این مسئله معادله لاپلاس دو بعدی می‌باشد:

$$p(x, H) = 0 \quad (4)$$

$x \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

شار فشار در قسمت تماس تیر صلب و سیال به صورت زیر می‌باشد:

برای حل معادله بالا نیاز به چهار شرط است که به صورت زیر بیان

شده است.

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{(0,y)} = -\rho_f \alpha_g \quad (5)$$

۳-۱-۱- شرایط مرزی [۷]

که در آن چگالی جرمی سیال و α_g ضریب شتاب افقی زمین می‌باشد. با داشتن شروط بالا می‌توان معادله لاپلاس را برای سد مورد نظر حل کرد. ابتدا معادله فشار به روش تفکیک‌پذیر به شکل زیر می‌شود:

در سطح آزاد سیال از امواج سطحی صرف‌نظر می‌شود، بنابراین فشار در

سطح آزاد برابر صفر است:

$$p(x, H) = 0 \quad (2)$$

در معادله بالا p و H به ترتیب فشار سیال و ارتفاع تیر است و چون

مخزن پر فرض شده است، بنابراین ارتفاع تیر و مخزن با هم برابرند.

همچنین جریان شار فشار در کف مخزن نیز برابر با صفر می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$p(x, y) = Z(x)K(y) \quad (6)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۶) در معادله (۱) و اعمال شرایط مرزی به برابری

زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{(x,0)} = 0 \quad (3)$$

در سمت راست مخزن، چون طول بی‌نهایت است، فشار وارده را

$$p(x, y) = \frac{2\rho_f \alpha_g H}{m \rightarrow \infty} \times \sum_{j=1}^{m \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{j+1}}{\lambda_j^2} \exp(-\lambda_j x) \cos(\lambda_j y) \quad (7)$$

جدول ۲. اضافه فشار در $x = 0$ (بدنه‌ی سد) در ترازهای مختلف (پاسکال) از کف سد برحسب M های مختلف

Table 2. Excess water pressure at $x = 0$ (dam body) at different levels (Pa) from the dam base for different M values.

ارتفاع (متر)	تغییرات فشار (پاسکال)						خطای نسبی بین دو جمله ۱۰۰۰۰ و قبل آن
	M=1	M=5	M=10	M=100	M=1000	M=10000	
y=0	3975.8459	3209.8026	3636.7965	3641.6859	3641.7351	3641.7356	-2.7296×10^{-9}
y=1	3781.2547	3522.6042	3537.6359	3542.763	3542.8147	3542.8152	-2.6685×10^{-9}
y=2	3215.9338	3258.7839	3235.4341	3235.4341	3235.4949	3235.4955	-2.4856×10^{-9}
y=3	2336.9382	2651.0642	2673.1919	2681.2897	2681.3734	2681.3743	-2.1791×10^{-9}
y=4	1228.6044	1825.8372	1764.4498	1778.6407	1778.7997	1778.8013	-1.7269×10^{-9}
y=5	0	0	0	0	0	0	0

۳-۱-۲- مثال عددی سد صلب-مخزن

در گام بعدی، با توجه به معادله (۷)، خم‌های هم‌تراز تا $X=5$ در شکل (۳) نشان داده می‌شود. زرد رنگ نشانه بیشترین اضافه فشار (حدوداً ۳۶۴۰ پاسکال) و رنگ بنفش نشانه حداقل اضافه فشار است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش فاصله از بدنه‌ی سد صلب، اضافه فشار ایجاد شده ناشی از شتاب افقی در سیال کاهش می‌یابد.

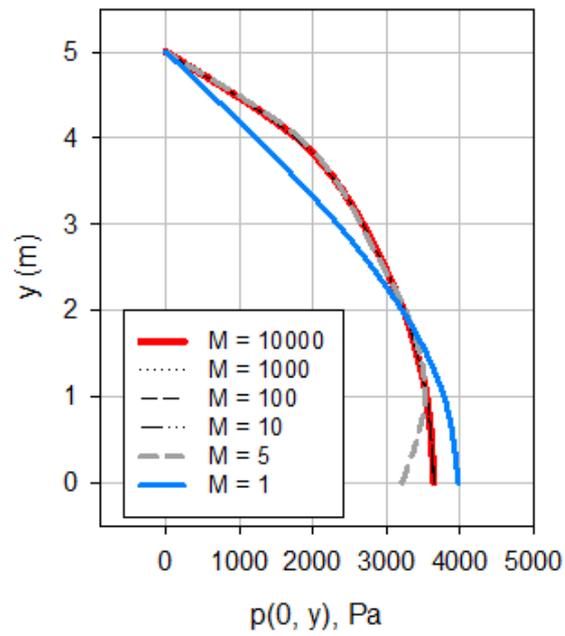
در ادامه، تاثیر پارامترهای مختلف نظیر جرم مخصوص سیال پشت سد (که با رسوبات ناشی از سیلاب‌ها در طول عمر سد افزایش می‌یابد)، ارتفاع مخزن و ضریب شتاب افقی بر توزیع فشار بر سد، در شکل ۴ نشان داده شد. همان‌طور که در شکل (۴) مشاهده می‌شود با افزایش چگالی جرمی سیال، ارتفاع سد، و ضریب شتاب افقی زمین، مقدار فشار وارد شده به بدنه‌ی سد افزایش یافت. این نکته قابل ذکر است که فشارهای ترسیم شده، همان فشار هیدرودینامیکی خالص بر بدنه‌ی سد است. شکل ۴ با فرض $M=100$ ، تحلیل و ترسیم شده است.

۳-۲- معادلات حاکم بر سد منعطف-مخزن

در این بخش، معادله فشار، فرکانس و تغییر شکل با در نظر گرفتن اثرات اندرکنش بین سد منعطف و مخزن تعیین می‌شود. برای این پژوهش مطابق با شکل (۵) یک سد منعطف با مخزن به طول بی‌نهایت فرض شده است.

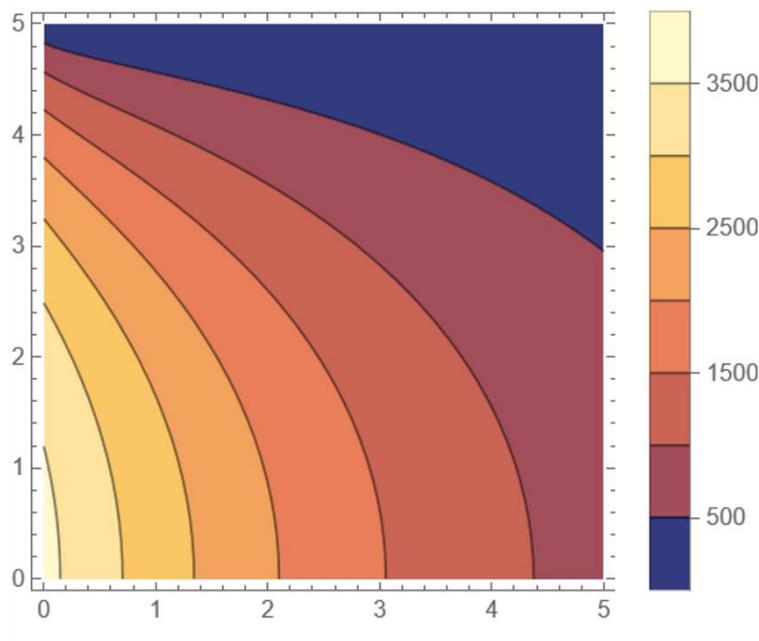
یک سیستم سد-مخزن، با سد صلب و با طول مخزن بی‌نهایت مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید. چگالی سیال آن ۱۰۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب است. ارتفاع شاره برابر با بلندای سد معادل ۵ متر در نظر گرفته شد. ضریب شتاب افقی زمین برابر با $g/10$ فرض شده است. هدف، تعیین فشار اضافی وارده بر بدنه سد صلب است. در معادله فشار مطابق با رابطه (۷) تعداد جمله‌های J از یک تا $m=M$ محدود می‌شود. لازم به ذکر است که هر چقدر M تعداد جملات بیشتری از سری لحاظ شود میزان خطا کاهش می‌یابد. جدول (۲) مقادیر اضافه فشار وارده ناشی از شتاب افقی را بر نقاط مختلفی از بدنه سد صلب، با M های مختلف ارائه می‌دهد. با کنترل نتایج این جدول، مقادیر اضافه فشار با $M=10$ از دقت نسبتاً خوبی برخوردار شد. بیشینه خطای نسبی برای $M=10$ کمتر از ۰٫۳ درصد است. این میزان خطا با افزایش M ، به شدت کاهش می‌یابد.

همچنین شکل ۲ تغییرات اضافه فشار سیال ناشی از اثرات شتاب افقی بر روی بدنه‌ی سد صلب را بر حسب ارتفاع سد را در M های مختلف نشان می‌دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، به دلیل صرف نظر کردن از امواج سطحی، فشار تاج سد برابر با صفر می‌باشد و فشار بیشینه در کف مخزن رخ می‌دهد.



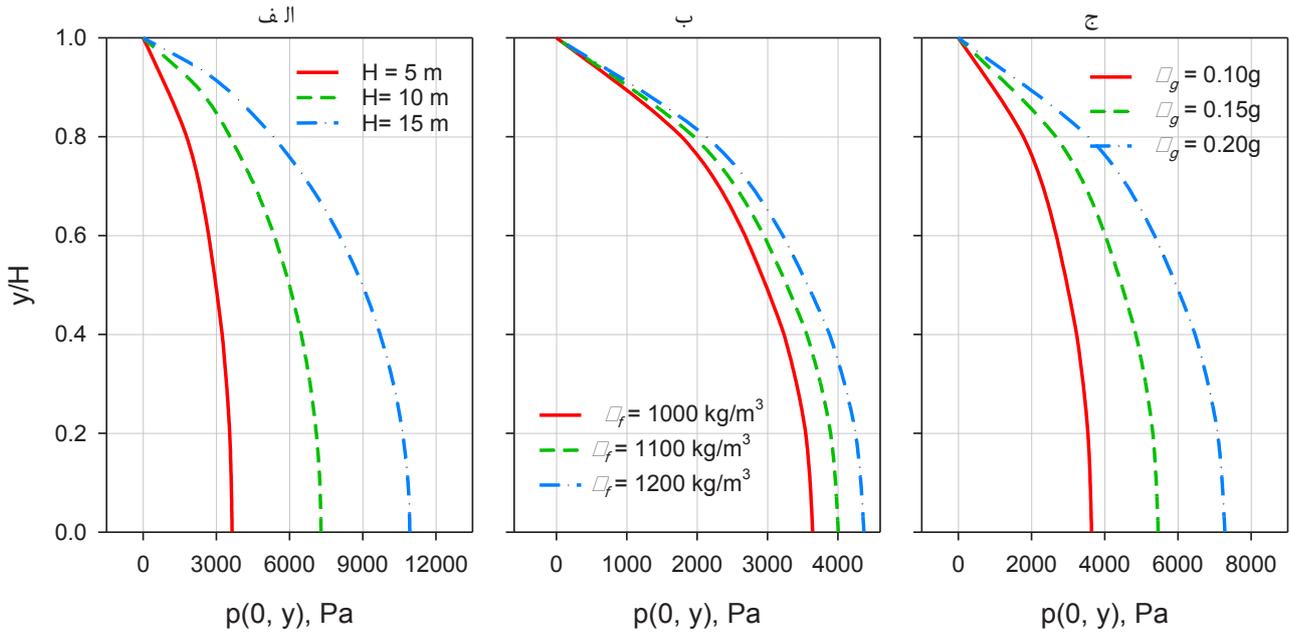
شکل ۲. تغییرات اضافه فشار در تراز ارتفاع سد صلب بر حسب تعداد جملات سری

Fig. 2. Variations of excess pressure at the rigid dam height level with respect to the number of series terms.



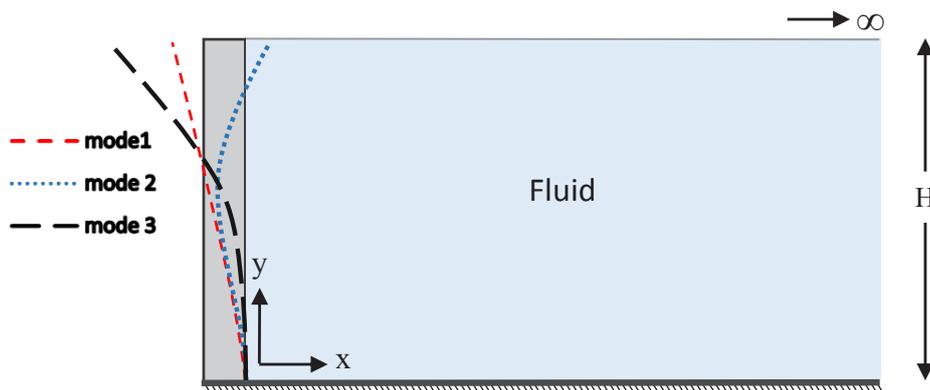
شکل ۳. خم‌های هم‌تراز اضافه فشار (پاسکال) بر حسب محورهای افقی x (متر) و قائم y (متر) با $M = 100$.

Fig. 3. Excess pressure (Pa) contours as a function of horizontal axis, x (m), and vertical axis, y (m), with $M = 100$.



شکل ۴. تاثیرات پارامترهای مختلف بر فشار هیدرودینامیکی (واحد: پاسکال) سد صلب: الف) تاثیر ارتفاع سد ($H = 5, 10, 15$ m) با جرم مخصوص سیال $\rho_f = 1000$ kg/m³ و شتاب افقی $\alpha g = 0.1g$ ثابت، ب) تاثیر جرم مخصوص سیال ($\rho_f = 1000, 1100, 1200$ kg/m³) با ارتفاع سد $H = 5$ m و شتاب افقی $\alpha g = 0.1g$ ثابت، ج) تاثیر شتاب افقی زمین ($\alpha g = 0.1g, 0.15g, 0.2g$) با ارتفاع سد $H = 5$ m و جرم مخصوص سیال $\rho_f = 1000$ kg/m³ ثابت.

Fig. 4. Effects of various parameters on hydrodynamic pressure (unit: Pa) of the rigid dam: (a) effect of dam height ($H = 5, 10, 15$ m) with fluid density $\rho_f = 1000$ kg/m³ and horizontal acceleration $\alpha g = 0.1g$ constant; (b) effect of fluid density ($\rho_f = 1000, 1100, 1200$ kg/m³) with dam height $H = 5$ m and horizontal acceleration $\alpha g = 0.1g$ constant; (c) effect of ground horizontal acceleration ($\alpha g = 0.1g, 0.15g, 0.2g$) with dam height $H = 5$ m and fluid density $\rho_f = 1000$ kg/m³ constant.



شکل ۵. سد منعطف با طول بی‌نهایت.

Fig. 5. Flexible dam with infinite length.

$$p(x, H, \omega) = 0 \quad (12)$$

$x \rightarrow \infty$

شرط مرزی اندرکنشی در این سیستم به صورت زیر می‌باشد [۱۷، ۱۸]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{(0, y, \omega)} = \rho_f \omega^2 u(y) \quad (13)$$

که $u(y)$ تابع تغییر شکل تیر انعطاف پذیر است. حالا با داشتن شروط بالا معادله لاپلاس برای سد مورد نظر قابل تحلیل است. ابتدا فشار به روش تفکیک پذیر به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$p(x, y, \omega) = Z(x, \omega) K(y, \omega) \quad (14)$$

زین پس برای اختصار به جای $Z(x, \omega)$ و $K(y, \omega)$ به ترتیب از Z و K استفاده می‌شود. با قرار دادن معادله بالا در معادله (۸) برابری زیر پدید می‌آید:

$$\frac{Z''}{Z} = -\frac{K''}{K} \quad (15)$$

معادله بالا برابر با عامل λ^2 لحاظ می‌شود:

$$\frac{Z''}{Z} = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z'' - \lambda^2 Z = 0 \\ K'' + \lambda^2 K = 0 \end{cases} \quad (16)$$

پاسخ معادلات بالا به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} Z(x, \omega) &= Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x} \quad (I) \\ K(y, \omega) &= C \sin(\lambda y) + D \cos(\lambda y) \quad (II) \end{aligned} \quad (17)$$

از اثرات امواج سطحی، پخش موج و ویسکوزیته در این مسئله صرف نظر شده است.

معادله حاکم بر یک سیستم سد منعطف-مخزن با توجه به شکل ۵، به صورت معادله‌های همبسته لاپلاس و تیر برنولی در نظر گرفته شد. با در نظر گرفتن اندرکنش سد-مخزن، دو معادله حاکم، با هم مرتبط می‌شوند، به طوری که بار وارده به تیر انعطاف پذیر با میزان فشار اعمال شده توسط سیال به بدنه‌ی سد برابر است [۱۷، ۱۸]. این معادله‌های به صورت زیر آورده شده است:

$$\frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (8)$$

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \rho A \omega^2 u = -p(0, y, \omega) \quad (9)$$

برای حل معادله‌های بالا نیاز به چهار شرط مرزی برای معادله لاپلاس و چهار شرط تکیه‌گاهی برای معادله تیر برنولی است. در سطح آزاد سیال، از امواج سطحی صرف نظر می‌شود؛ بنابراین فشار در سطح آزاد برابر صفر است [۱۷، ۱۸]:

$$p(x, H, \omega) = 0 \quad (10)$$

در معادله بالا H ارتفاع تیر است و چون مخزن پر می‌باشد، ارتفاع تیر و مخزن با هم برابرند. بدلیل اینکه سرعت سیال در کف مخزن در جهت قائم برابر با صفر است بنابراین گرادیان هیدرولیکی نیز برابر با صفر می‌باشد [۱۷، ۱۸]:

$$\frac{\partial p}{\partial (y)} \Big|_{(x, 0, \omega)} = 0 \quad (11)$$

در سمت راست سد، چون طول مخزن بی‌نهایت در نظر گرفته شد، بنابراین فشار وارده در بی‌نهایت برابر با صفر می‌باشد.

$$u(y) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k y^k \quad (24)$$

بنابراین فرم معادله (۲۳) به صورت زیر درمی‌آید.

$$\sum_{j=1}^{\infty} -B_j \lambda_j \cos(\lambda_j y) = \rho_f \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} U_k y^k \quad (25)$$

برای بدست آوردن B_j می‌توان از خاصیت تعامد کسینوس‌ها استفاده کرد. بنابراین معادله بالا در $\cos(\lambda_j y)$ ضرب می‌شود و در بازه 0 تا H انتگرال گیری می‌شود:

$$\int_0^H -B_j \lambda_j \cos(\lambda_j y) \times \cos(\lambda_j y) dy = \int_0^H \rho_f \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} U_k y^k \times \cos(\lambda_j y) dy \quad (26)$$

$$B_j = -\frac{2\rho_f \omega^2}{\lambda_j H} \sum_{k=0}^{\infty} b_k^j U_k \quad (27)$$

که b_k^j برابر است با:

$$b_k^j = \int_0^H \cos(\lambda_j y) y^k dy \quad (28)$$

بنابراین تابع فشار در نقطه $x=0$ بدست می‌آید.

$$p(0, y, \omega) = -\frac{2\rho_f \omega^2}{H} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \sum_{k=0}^{\infty} b_k^j U_k \cos(\lambda_j y) \quad (29)$$

حال با داشتن تابع فشار و جایگذاری آن در معادله (۹)، معادله تیر به صورت زیر در می‌آید.

که A, B, C و D ضرایب ثابت هستند که با شروط مرزی بدست می‌آیند. با کمک شرایط مرزی و جایگذاری در معادله (II) (۱۷)، برابری‌های زیر پدید می‌آیند:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial (y)} \right|_{(x,0,\omega)=0} \Rightarrow C = 0 \quad (18)$$

$$p(x, H, \omega) = 0 \Rightarrow \lambda_j = \frac{(2j-1)\pi}{2H}; \quad j=1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

با جایگذاری مقادیر بدست آمده، جواب معادله (II) (۱۷)، به صورت زیر می‌شود:

$$K(y, \omega) = D \cos(\lambda_j y) \quad (20)$$

با اعمال معادله (۱۲) در معادله (I) (۱۷)، برابری زیر بدست می‌آید:

$$p(x, H, \omega) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (21)$$

بنابراین فرم کلی معادله فشار برابر می‌شود با:

$$p(x, y, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j e^{-\lambda_j x} \cos(\lambda_j y) \quad (22)$$

اکنون شرط اندرکنشی در معادله بالا قرار داده می‌شود.

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{(0,y,\omega)} = \rho_f \omega^2 u(y) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} -\lambda_j B_j \cos(\lambda_j y) = \rho_f \omega^2 u(y) \quad (23)$$

که تابع $u(y)$ را می‌توان به صورت بسط تیلور زیر نوشت.

$$U_{k+4} = \frac{\omega^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)EI} (\rho AU_k + \sum_{l=0}^{\infty} e_k^l U_l) \quad (۳۵)$$

که e_k^l به صورت زیر می‌باشد.

$$e_k^l = \frac{2\rho f}{H} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_j}\right) b_l^j g_k^j \quad (۳۶)$$

با داشتن معادلات بدست آمده، می‌توان با کمک شروط تکیه‌گاهی تیر معادل، به فرکانس‌های طبیعی سیستم با در نظر گرفتن اندرکنش سد-مخزن رسید و با داشتن فرکانس، می‌توان به توابع فشار و تغییرشکل دست یافت.

۳-۲-۱- مثال عددی

یک سیستم سد-مخزن، به طوری که یک تیر منعطف در سمت چپ مخزن و طول مخزن مطابق شکل (۵) بی نهایت است، در نظر گرفته می‌شود. ضریب کشسانی در تیر منعطف $10^7 \times 2$ نیوتن بر متر مربع می‌باشد که چگالی جرمی آن 2400 کیلوگرم بر متر مکعب است. ارتفاع شاره برابر با بلندی سد، 5 متر و ضخامت تیر 0.5 متر می‌باشد. چگالی سیال برابر با 1000 کیلوگرم بر متر مکعب است. مطابق روش اشاره شده در بخش قبل، ابتدا فرکانس‌های سیستم برای تیر طره انعطاف‌پذیر محاسبه می‌شود و سپس فشار با فرکانس‌های متناظر تعیین می‌شود. برای حل مسئله باید جملات k و z محدود شود. تعداد جملات k و z به ترتیب برابر با M و N در نظر گرفته می‌شود. در این مثال برای همگرایی کافی، M برابر با 3 و N برابر با 35 در نظر گرفته شده است. این مقادیر با تلاش و خطا بدست می‌آید. جدول (۳) مقادیر فرکانس‌های طبیعی یک سد بدون لحاظ کردن اثرات اندرکنش سیال-تیر (تیر یک سر گیردار-یک سر آزاد) و همچنین با در نظر گرفتن اثرات اندرکنش را ارائه می‌کند. همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر فرکانس در مود اول اندرکنشی کمتر شده است. دلیل آن اینست که وقتی اثرات اندرکنشی سیال دیده می‌شود، جرم سیستم بدلیل وجود سیال افزایش می‌یابد در حالیکه سختی سیستم تغییرات ناچیزی دارد. از آنجایی که جرم با فرکانس رابطه معکوس دارد، بنابراین منجر به کاهش فرکانس اندرکنشی در مود اول می‌شود. نکته قابل ذکر دیگر اینکه، در مود دوم، برخلاف مود اول، پاسخ سیال عمدتاً به صورت مقاومت در برابر تغییرشکل خمشی موضعی دیواره است، نه جابه‌جایی حجمی. این مقاومت باعث ایجاد

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \rho A \omega^2 u(y) = \frac{2\rho f \omega^2}{H} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} \sum_{k=0}^{\infty} b_k^j U_k \cos(\lambda_j y) \quad (۳۰)$$

معادله بالا را با کمک جدول (۱)، می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$EI(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)U_{k+4} - \rho A \omega^2 U_k = \frac{2\rho f \omega^2}{H} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \sum_{l=0}^{\infty} U_l b_l^j \frac{(\lambda_j)^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad (۳۱)$$

رابطه (۳۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$EI(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)U_{k+4} = \rho A \omega^2 U_k + \frac{2\rho f \omega^2}{H} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \sum_{l=0}^{\infty} U_l b_l^j \frac{(\lambda_j)^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \quad (۳۲)$$

اکنون دو طرف تساوی بر $(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$ تقسیم می‌شود و از ω^2 فاکتور گرفته می‌شود. بنابراین معادله (۳۰) به صورت زیر در می‌آید:

$$U_{k+4} = \frac{\omega^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)EI} (\rho AU_k + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \sum_{l=0}^{\infty} U_l b_l^j g_k^j) \quad (۳۳)$$

که در آن:

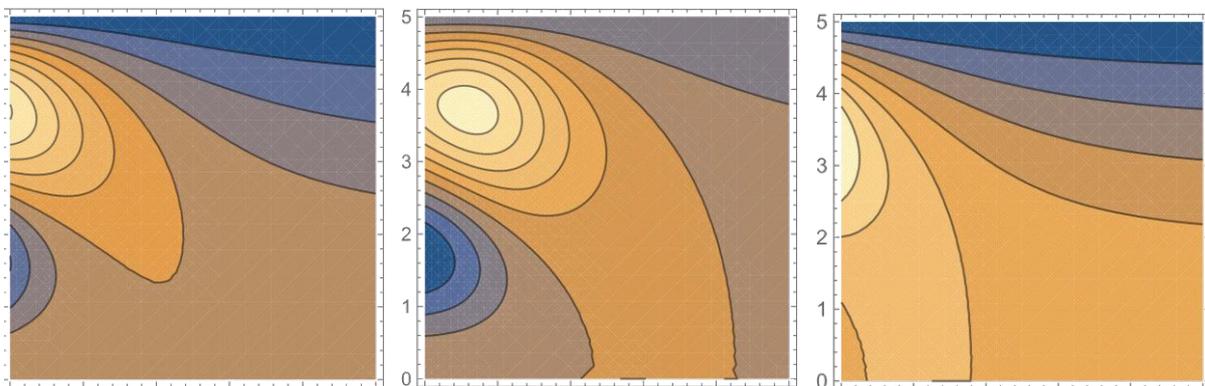
$$g_k^j = \frac{(\lambda_j)^k}{k!} \cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \cos(\lambda_j y) \quad (۳۴)$$

حال معادله (۳۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

جدول ۳. فرکانس‌های طبیعی تیر منعطف یک سر گیردار-یک سر آزاد سیستم یر حسب رادیان بر ثانیه.

Table 3. Natural frequencies of a cantilever beam system (rad/s).

فرکانس مخزن بدون شماره	فرکانس	شکل حالت
۵۸/۶	۴۹/۶۳	مود اول
۳۶۷/۲	۳۷۷/۸	مود دوم
۱۰۲۸/۳	۶۵۳/۶	مود سوم



شکل ۶. خم‌های هم‌تراز اضافه فشار (پاسکال) بر حسب محورهای افقی x (متر) و قائم y (متر) برای مخزن سد انعطاف پذیر برای مودهای اول، دوم و سوم به ترتیب از راست به چپ.

Fig. 6. Contours of excess pressure (Pa) as a function of horizontal x (m) and vertical y (m) axes for the flexible dam reservoir for the first, second, and third modes from right to left.

۳-۲-۱-۲- فشار هیدرودینامیکی بر روی سد منعطف

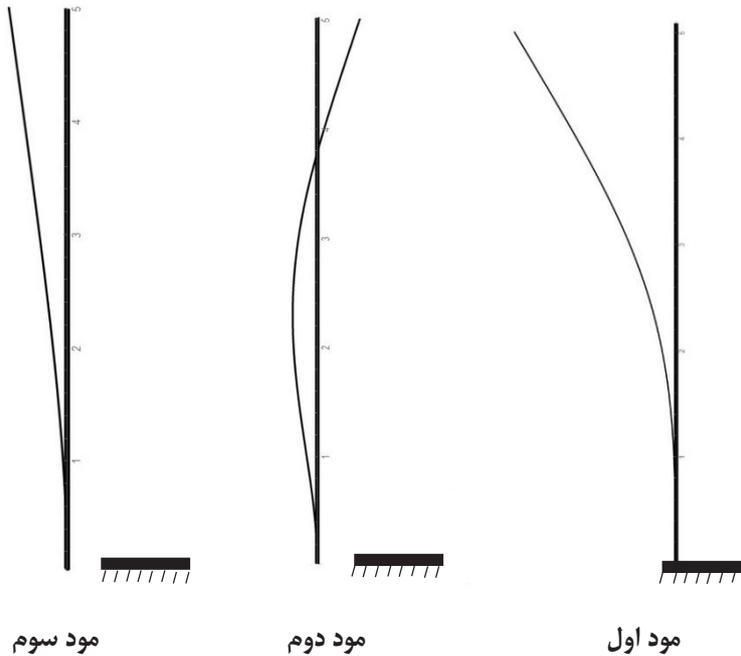
در گام پسین، پس از تعیین تابع تغییر شکل، و جایگذاری آن در معادله (۱۴)، تغییرات فشار در ارتفاع تیر معادل، در شکل ۸ نشان داده شده است. لازم به ذکر است، تابع فشار بر حسب مقادیر فشار در کف مخزن نرمال شده است. همان‌طور که در شکل ۸ نمایش داده شد، فشار در ارتفاع H برابر صفر می‌باشد و همچنین به دلیل وارد شدن اثرات اندرکنش سد-مخزن در این سیستم، بیشینه فشار در کف مخزن رخ نمی‌دهد.

شکل ۹ اثرات پارامترهای مختلف نظیر ضخامت، مدول کشسانی، و ارتفاع سد منعطف بر تغییرات فشار هیدرودینامیکی نشان می‌دهد. به طور خلاصه، نتایج حاصل از این تحلیل را می‌توان این‌گونه بیان کرد که با افزایش مقدار ارتفاع از ۵ متر به ۱۰ و ۱۵ متر، به دلیل کمتر شدن سختی

سختی هیدرودینامیکی اضافی شده و سختی مؤثر سیستم را افزایش می‌دهد. بنابراین فرکانس مود دوم در مخزن پر از سیال بیشتر از فرکانس مود دوم در مخزن خالی است. برای سه مود اول، با توجه به معادله (۷)، خم‌های هم‌تراز در $x=5$ در شکل (۶) نشان داده شد. لازم به ذکر است که، کلیه فشارها بر فشار پایه همسان سازی شدند.

۳-۲-۱-۱- تغییر شکل تیر

شکل (۷) تغییر شکل تیر منعطف در سه مود اول نشان داده شده است. پس از محاسبه فرکانس از معادله (۲۰)، و قرار دادن آن در معادله (۹)، می‌توان به تغییر شکل تیر متناظر با فرکانس هر مود رسید.



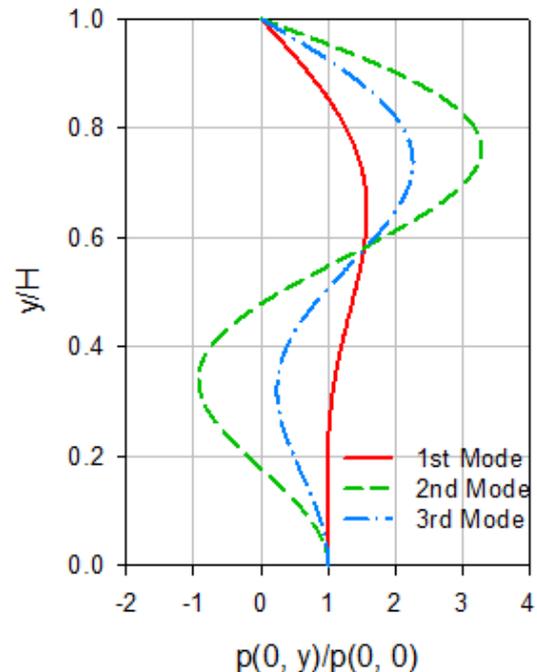
شکل ۷. تغییر شکل تیر منعطف برای سه مود اول.

Fig. 7. Deformation of the flexible beam for the first three modes.

تیر و پیرو آن کم شدن فرکانس تیر، جابه‌جایی تیر افزایش یافته و در نتیجه بیشینه فشار هیدرودینامیکی از $3/7$ مگاپاسکال به ترتیب به $1/28$ و $0/79$ مگاپاسکال کاهش یافته است. برخلاف اثر ارتفاع، با افزایش ضخامت از $0/5$ متر به $0/6$ و $0/7$ متر و یا همچنین افزایش ضریب کشسانی سد از 20 گیگاپاسکال به 22 و 24 گیگاپاسکال، به دلیل سخت‌تر شدن سد انعطاف‌پذیر، جابه‌جایی کم، و بیشینه فشار در برخی موارد بیش از 150 درصد افزایش یافته است. در جدول ۴، اطلاعات دقیقتری از میزان فشار هیدرودینامیکی بیشینه، نیروی معادل هیدرودینامیکی و محل اثر آن در حالت‌های مختلف مطالعات پارامتریک آورده شده است. مطابق با نتایج جدول ۴، محل اثر نیروی معادل دینامیکی، F ، کمی بیشتر از $0/5 H$ از کف سد تعیین شد؛ در حالیکه برآیند فشارهای هیدرواستاتیکی در $0/33 H$ اعمال می‌شود.

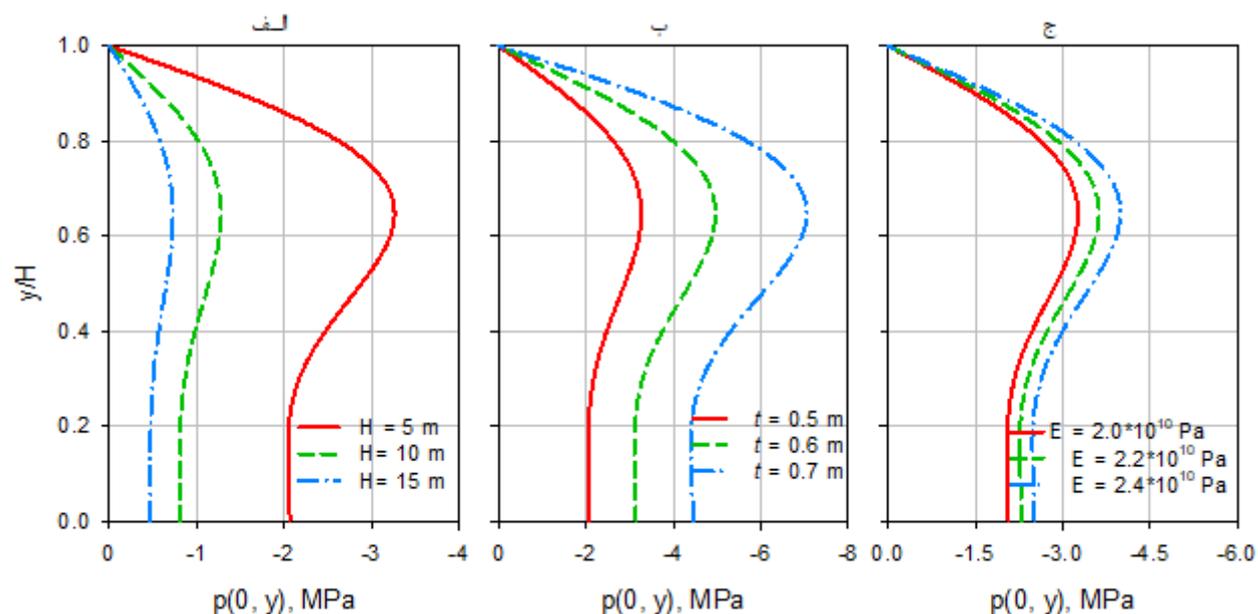
۴- نتیجه گیری

در این پژوهش، تحلیل سیستم‌های سد صلب و سد منعطف با در نظر گرفتن تعامل سد-مخزن انجام شد و فرکانس‌های طبیعی سیستم، جابه‌جایی‌ها و فشار هیدرودینامیکی مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج نشان



شکل ۸. تغییرات فشار بدون بعد شده بر بدنه سد در سه مود

Fig. 8. Dimensionless pressure variations on the dam body for three modes.



شکل ۹. اثرات پارامترهای ضخامت، مدول کشسانی، و ارتفاع سد منعطف بر تغییرات فشار هیدرودینامیکی بر حسب مگاپاسکال.

Fig. 9. Effects of thickness, elastic modulus, and flexible dam height on hydrodynamic pressure variations (MPa).

جدول ۴. اثرات پارامترهای ضخامت، مدول کشسانی، و ارتفاع سد منعطف بر بیشینه فشار هیدرودینامیکی، نیروی معادل و محل اثر آن.

Table 4. Influence of thickness, elastic modulus, and flexible dam height parameters on the maximum hydrodynamic pressure, the resultant force, and the location of its action.

پارامتر متغیر	پارامترهای ثابت	بیشینه فشار (مگاپاسکال)	محل اثر از کف سد (متر)	نیروی معادل واحد طول سد (مگانیوتن بر واحد متر)
H (m)	t, E	p_{max}	\bar{y}	F
5	t=0.5 m, E=20 GPa	3.26385	2.546	11.66
10		1.277	5.111	9.18
15		0.729	7.690	7.9
t (m)	H, E			
0.5	H=5 m, E=20 GPa	تکراری	تکراری	تکراری
0.6		4.966	2.5437	17.72
0.7		7.055	2.542	25.15
E (GPa)	H, t			
20	H=5 m, t=0.5 m	تکراری	تکراری	تکراری
22		3.623	2.543	12.93
24		3.989	2.541	14.21

<p>L طول مخزن (متر)</p> <p>M شماره جمله‌های پاسخ</p> <p>N تعداد جمله‌های بسط تیلور</p> <p>P فشار (پاسکال)</p> <p>p_{max} بیشینه فشار بر بدنه سد (پاسکال)</p> <p>F نیروی معادل (کیلونیوتن)</p> <p>\bar{y} محل اثر نیروی معادل (متر)</p> <p>$u(y)$ تابع تغییرشکل سد</p> <p>ρ_f چگالی جرمی سیال (کیلوگرم بر متر مکعب)</p> <p>ω فرکانس</p> <p>α_g ضریب شتاب افقی زمین (g)</p>	<p>داد که در سد صلب، افزایش چگالی جرمی آب، ضریب شتاب افقی زمین و ارتفاع سد منجر به افزایش فشار وارد بر بدنه شد و بیشینه فشار معمولاً در کف مخزن رخ داد. در مقابل، در سد منعطف با طول مخزن بی‌نهایت، افزایش ارتفاع سبب کاهش سختی معادل تیر و افزایش جابه‌جایی سد شد که منجر به کاهش فشار هیدرودینامیکی می‌گردد. با افزایش ضخامت و مدول الاستیسیته سد منعطف، سختی سیستم افزایش یافته، جابه‌جایی کاهش و فشار هیدرودینامیکی وارد بر سد افزایش می‌یابد. یکی از مهم‌ترین نتایج حاصل از تعامل سد و مخزن در سد منعطف، عدم رخداد فشار بیشینه در کف مخزن است که تفاوت اساسی آن با سد صلب را نشان می‌دهد.</p> <p>با توجه به مفروضات ساده‌کننده پژوهش شامل سیال تراکم‌ناپذیر و غیرلزج، کف صلب و بدون شیب، عدم در نظرگیری امواج سطحی و فرض طول بی‌نهایت مخزن، محدودیت‌هایی در تعمیم‌پذیری نتایج به شرایط واقعی وجود دارد. برای پژوهش‌های آینده، پیشنهاد می‌شود:</p> <ul style="list-style-type: none"> • بررسی سیستم‌های سد-مخزن با در نظر گرفتن اثرات ویسکوزیته، تراکم‌پذیری و امواج سطحی برای شبیه‌سازی شرایط واقعی‌تر. • انجام تحلیل‌های سه‌بعدی جهت ارزیابی تأثیر شکل هندسی سد، شامل شیب بدنه و کف، بر فشار هیدرودینامیکی و جابه‌جایی سد. • مطالعه سدهای انعطاف‌پذیر با طول مخزن محدود و کف با سختی متغیر برای تحلیل دقیق‌تر فشار و پاسخ دینامیکی. • ارزیابی اثرات ترکیبی پارامترهای کلیدی شامل ارتفاع سد، سختی سازه و ویژگی‌های سیال بر پاسخ سد برای ارائه دستورالعمل‌های عملیاتی طراحی. <p>این پیشنهادها می‌توانند مسیر پژوهش‌های آینده را به سمت تحلیل‌های دقیق‌تر و کاربردی‌تر سدهای بتنی در شرایط لرزه‌ای و هیدرودینامیکی هدایت کنند.</p>
--	---

منابع

- [1] J. Ahadian, A.R. Afzalian, Applied Analysis of Piano Key Weir (PKW) Structures as a Diversion Dam, Amirkabir Journal of Civil Engineering, 49(3) (2017) 463-476, <https://doi.org/10.22060/ceej.2016.694>.
- [2] A. Jafari, A. Aftabi Sani, Solving two classical fluid-structure interaction problem utilizing differential transform method, Journal of Solid and Fluid Mechanics, 10(3) (2020) 17-30, <https://doi.org/10.22044/jsfm.2020.9854.3213>.
- [3] H.M. Westergaard, Water pressures on dams during earthquakes, Transactions of the American society of Civil Engineers, 98(2) (1933) 418-433, <https://doi.org/10.1061/TACEAT.0004496>.
- [4] S. Kotsubo, Dynamic water pressure on dams due to irregular earthquakes, Transactions of the Japan Society of Civil Engineers, 1957(47) (1957) 38-45, https://doi.org/10.2208/jscej1949.1957.47_38.
- [5] A.K. Chopra, Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes, Journal of the Engineering Mechanics

۵- فهرست علائم

<p>A سطح مقطع (متر مربع)</p> <p>C_i, B_j عامل‌های ثابت</p> <p>E ضریب کشسانی (گیگاپاسکال)</p> <p>H ارتفاع سد (متر)</p> <p>t ضخامت سد (متر)</p> <p>I ممان اینرسی تیر (m^4)</p>
--

- Structures, 67 (2014) 1-18, <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.02.004>.
- [14] R. Tarinejad, S. Pirboudaghi, Legendre spectral element method for seismic analysis of dam-reservoir interaction, *IJCE*, 13(2) (2015) 148, <https://doi.org/10.22068/IJCE.13.2.148>.
- [15] R.-A. Jafari-Talookolaei, S. Lasemi-Imani, Free vibration analysis of a delaminated beam–fluid interaction system, *Ocean Engineering*, 107 (2015) 186-192, <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2015.07.053>.
- [16] M. Rezaiee-Pajand, A. Aftabi S, M.S. Kazemiyani, Analytical solution for free vibration of flexible 2D rectangular tanks, *Ocean Engineering*, 122 (2016) 118-135, <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2016.05.052>.
- [17] M. Jafari, V. Lotfi, Dynamic analysis of concrete gravity dam-reservoir systems by a wavenumber approach for the general reservoir base condition, *Scientia Iranica*, 25(6) (2018) 3054-3065, <https://doi.org/10.24200/sci.2017.4227>.
- [18] M. Rezaiee-Pajand, M.S. Kazemiyani, A. Aftabi S, Solving coupled beam-fluid interaction by DTM, *Ocean Engineering*, 167 (2018) 380-396, <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.04.020>.
- [19] H. Mazighi, M.K. Mihoubi, Study of the effect of upstream slope on water pressure in concrete gravity dam, *Procedia Structural Integrity*, 13 (2018) 1438-1441, <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2018.12.298>.
- [20] M. Wang, J. Chen, L. Wu, B. Song, Hydrodynamic pressure on gravity dams with different heights and the westergaard correction formula, *International Journal of Geomechanics*, 18(10) (2018) 04018134, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0001257](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0001257).
- [21] H. Xu, D. Zou, X. Kong, Z. Hu, X. Su, A nonlinear analysis of dynamic interactions of CFRD–compressible reservoir system based on FEM–SBFEM, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 112 (2018) 24-34, <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.04.057>.
- [22] Y. Wang, Z. Hu, W. Guo, Hydrodynamic pressures on arch dam faces with irregular reservoir geometry, *Journal Division*, 93(6) (1967) 205-223, <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000915>.
- [6] J. Avilés, X. Li, Analytical–numerical solution for hydrodynamic pressures on dams with sloping face considering compressibility and viscosity of water, *Computers & Structures*, 66(4) (1998) 481-488, [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(97\)00091-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(97)00091-6).
- [7] M. Zingales, Seismically induced, non-stationary hydrodynamic pressure in a dam-reservoir system, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 18(2) (2003) 151-163, [https://doi.org/10.1016/S0266-8920\(02\)00056-5](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(02)00056-5).
- [8] B. Navayineya, J.V. Amiri, M.A. Ardeshir, A closed form solution for hydrodynamic pressure of gravity dams reservoir with effect of viscosity under dynamic loading, *World Academy of Science, Engineering and Technology*, 58 (2009) 416-420, <https://doi.org/10.5281/zenodo.1080840>.
- [9] G. Lin, Y. Wang, Z. Hu, Hydrodynamic pressure on arch dam and gravity dam including absorption effect of reservoir sediments, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 10(1) (2010) 012234, <https://doi.org/10.1088/1757-899X/10/1/012234>.
- [10] R. Attarnejad, A. Bagheri, Dam-reservoir interaction including the effect of vertical component of earthquake acceleration on hydrodynamic pressure, *Advanced Materials Research*, 255-260 (2011) 3493-3499, <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.255-260.3493>.
- [11] M.A. Karaca, S. Küçükarslan, Analysis of dam-reservoir interaction by using homotopy analysis method, *KSCE Journal of Civil Engineering*, 16(1) (2012) 103-106, <https://doi.org/10.1007/s12205-012-0870-8>.
- [12] B. Navayi Neya, M.A. Ardeshir, An analytical solution for hydrodynamic pressure on dams considering the viscosity and wave absorption of the reservoir, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 38(8) (2013) 2023-2033, <https://doi.org/10.1007/s13369-013-0566-5>.
- [13] N. Bouaanani, S. Renaud, Effects of fluid–structure interaction modeling assumptions on seismic floor acceleration demands within gravity dams, *Engineering*

- of a concrete gravity dam considering the fluid-structure interaction, *Advances in Civil Engineering*, 2023(1) (2023) 9927608, <https://doi.org/10.1155/2023/9927608>.
- [28] D. Ouzandja, M. Messaad, A.T. Berrabah, M. Belharizi, Seismic analysis of Fractured Koyna Concrete Gravity Dam, *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, 70 (2023) 29-47, <https://doi.org/10.2478/heem-2023-0003>.
- [29] R. Kouhdasti, N. Bouaanani, Response spectrum and modal dynamic analyses of gravity dams using ground motion accelerations modified to account for hydrodynamic effects, *Earthquake Spectra*, 40(4) (2024) 2761-2804, <https://doi.org/10.1177/87552930241246016>.
- [30] F. Şermet, M.E. Kartal, M.E. Yiğit, E. Hökelekli, The effect of the gravity on the earthquake performance of roller compacted concrete dams, 2024, 15(1) (2024) 20-29, <https://doi.org/10.20528/cjcr1.2024.01.003>.
- [31] A. Asgari, Extended power series solution for Perkins-Kern-Nordgren model of hydraulic fracture, *AUT Journal of Civil Engineering*, 6(4) (2022) 461-468, <https://doi.org/10.22060/ajce.2023.19737.5814>.
- [32] M. Nourifar, A.A. Sani, A. Keyhani, Efficient multi-step differential transform method: Theory and its application to nonlinear oscillators, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 53 (2017) 154-183, <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.05.001>.
- of Vibration and Control, 25(3) (2018) 627-638, <https://doi.org/10.1177/1077546318791013>.
- [23] M. Pasbani Khiavi, A. Feizi, M. Jalali, Frequency analysis of concrete gravity dam with finite element model and LHS method *Numerical Methods in Civil Engineering*, 3(3) (2019) 13-19, <https://doi.org/10.29252/nmce.3.3.14>.
- [24] M. Pasbani Khiavi, A. Sari, Evaluation of hydrodynamic pressure distribution in reservoir of concrete gravity dam under vertical vibration using an analytical solution, *Mathematical Problems in Engineering*, 2021(1) (2021) 6669366, <https://doi.org/10.1155/2021/6669366>.
- [25] M.A. Hariri-Ardebili, J.W. Salamon, S.M. Seyed-Kolbadi, Discussion of “hydrodynamic pressure on gravity dams with different heights and the westergaard correction formula” by Mingming Wang, Jianyun Chen, Liang Wu, and Bingyue Song, *International Journal of Geomechanics*, 22(8) (2022) 07022006, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GM.1943-5622.0002396](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GM.1943-5622.0002396).
- [26] J. Ye, H. Zhou, X. Zhou, Hydrodynamic pressure on lateral side of dam excited by harmonic seismic vibration: A novel formulation, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 164 (2023) 107626, <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2022.107626>.
- [27] M. Pasbani Khiavi, A. Ferdousi, A. Moallemi Khiavi, A probabilistic model for evaluation of the dynamic behavior

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Mohammadi Kordkheyli, M. Bozorgnasab, A. Asgari, R Taghipour, *Hydrodynamic Pressure Analysis in Dams with Infinite Reservoirs Considering Dam-Reservoir Interaction, Amirkabir J. Civil Eng.*, 57(11) (2026) 1961-1980.

DOI: [10.22060/ceej.2026.24051.8251](https://doi.org/10.22060/ceej.2026.24051.8251)

