

Development of Gauss-Legendre-Hermite-3Point (GLH-3P) Formulation for Linear and Nonlinear Analysis of Earthquake-Affected Structures

Mehdi Babaei^{1*}, Mohammad Reza Hanafi², Alireza Rahai²

¹ Department of Civil Engineering, University of Bonab, Bonab, Iran.

² Department of Civil and Environmental Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran, Iran.

ABSTRACT: The dynamic response of structures under seismic loading is a critical issue in civil engineering that requires precise and efficient analytical methods. This research presents an efficient formulation for the nonlinear dynamic analysis of structures termed the Gauss-Legendre-Hermite Three-Point (GLH-3P) method. This method is based on the three-point implicit Gauss integration rule and employs third-order Hermite interpolation for sub-step approximations. The proposed formulation is capable of analyzing systems with geometric and material nonlinearities and covers various loading patterns. Results obtained from the new method were compared with established techniques such as the semi-analytical Duhamel integral and the pseudo-analytical Newmark-beta and Wilson-theta methods. The results indicate that the proposed method reduces the root mean square (RMS) error by up to 18% in linear systems and up to 93% in nonlinear systems compared to the Newmark method. The formulation demonstrates significant superiority in terms of accuracy, stability, convergence, and computational cost.

Review History:

Received: Jun. 03, 2023

Revised: Jan. 26, 2026

Accepted: Feb. 07, 2026

Available Online: Feb. 18, 2026

Keywords:

Time-History Analysis

Nonlinear Analysis

Newmark Method

Gauss-Legendre Quadrature

Hermite Interpolation

1- Introduction

The oscillatory motion of an ideal mass-spring-damper system is modeled by a second-order ODE¹ known as the DEOM². To predict the behavior of this system over time, the DEOM must be solved within a specific time interval. While analytical solutions are generally preferred, they are often difficult to obtain in practical engineering due to irregular time-varying excitation functions (e.g., earthquakes) and nonlinear system behavior [1].

Step-by-step time integration methods provide a comprehensive framework for analyzing both linear and nonlinear systems. Traditional methods such as Central Difference, Newmark-beta, Houbolt, and Wilson-theta are widely used in structural dynamics [2, 5]. However, developing more efficient formulations that provide higher accuracy with larger time steps remains a persistent challenge for researchers [3].

The main objective of this study is to generalize the Gauss-Legendre integration method and combine it with Hermite interpolation formulas to create a novel approach for solving the equation of motion for SDOF³ systems. The innovation

lies in the development of specific Hermite interpolation coefficients and an optimized iterative algorithm that increases the order of accuracy to $O(h^6)$, whereas standard methods like Newmark typically provide $O(h^2)$ accuracy [4].

2- Methodology

The formulation of the proposed GLH-3P⁴ method requires four mathematical tools: time-domain discretization, Gauss-Legendre integration, Hermite interpolation formulas, and Taylor series predictors.

2- 1- Time-Domain Discretization

The continuous time domain is discretized into N steps of length $h = \Delta t$. The discrete form of the equation of motion at time t_{i+1} is expressed as: The basic elements of the extended abstract are listed below in the order in which they should appear:

$$m\ddot{u}_{i+1} + f_D(\dot{u}_{i+1}) + f_S(u_{i+1}) = P_{i+1} \quad (1)$$

Where m is mass, f_D is damping force, and f_S is restoring force.

1. Ordinary Differential Equation

2. Dynamic Equation of Motion

3. Single Degree of Freedom

4. Gauss-Legendre-Hermite 3Point

*Corresponding author's email: m.babaei@ubonab.ac.ir



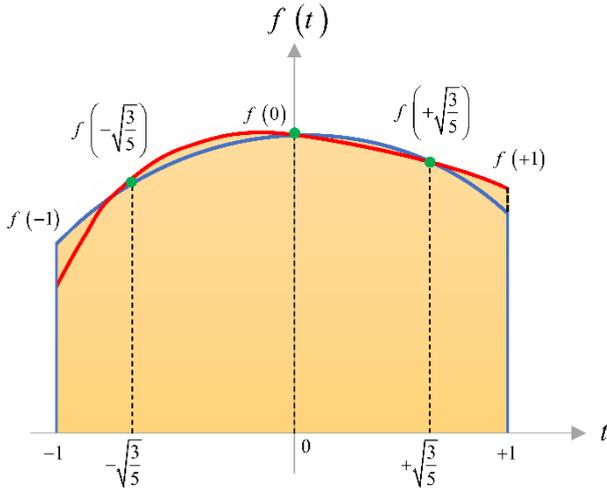


Fig. 1. Schematic diagram of the three-point Gauss-Legendre method for sub-step integration.

Table 1. Hermite interpolation coefficients for calculating velocity and displacement at sub-steps.

Velocity Interpolation coefficients		
$A = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{15}}{25} \cong \frac{219}{227}$	$B = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{15}}{25} \cong \frac{533}{15124}$	$E = \frac{1}{2}$
Displacement Interpolation coefficients		
$G = \frac{1}{2} + \frac{63\sqrt{15}}{500} \cong \frac{1070}{1083}$	$H = \frac{1}{2} - \frac{63\sqrt{15}}{500} \cong \frac{82}{6831}$	$M = \frac{1}{2}$
$I = \frac{11}{200} + \frac{13\sqrt{15}}{1000} \cong \frac{518}{4917}$	$J = \frac{11}{200} - \frac{13\sqrt{15}}{1000} \cong \frac{409}{87934}$	$N = \frac{5}{32}$
$K = \frac{1}{400} + \frac{\sqrt{15}}{2000} \cong \frac{62}{13975}$	$L = \frac{1}{400} - \frac{\sqrt{15}}{2000} \cong \frac{67}{118898}$	$O = \frac{1}{64}$

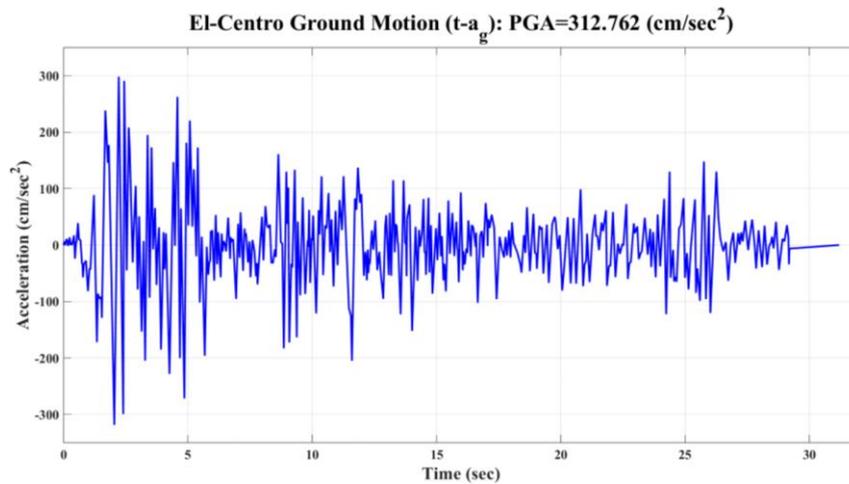


Fig. 2. El-Centro earthquake record used in the loading of structural systems.

2- 2- Gauss-Legendre-Hermite Integration

The core of the algorithm involves calculating the response at three internal Gaussian points within each time step. These points are defined as τ_1 , τ_2 and τ_3 based on the three-point Gauss-Legendre rule. The geometric representation of this method is illustrated in Figure 1, which shows the distribution of Gaussian points within the normalized time interval.

2- 3- Hermite Interpolation Coefficients

Unique coefficients for velocity and displacement interpolation at internal sub-steps were developed for the first time in this study. These coefficients, based on function approximation theory, allow for high-precision estimation of the system’s state using end-point information. The

coefficients used in the proposed algorithm are summarized in Table 1.

3- Results and Discussion

Two numerical models were implemented in MATLAB to evaluate the GLH-3P method using the El Centro earthquake record (Figure 2).

3- 1- Model I: Linear System

A linear undamped system with a natural period of 0.113 s was analyzed. The GLH-3P method provided results nearly identical to the exact Duhamel integral solution, whereas the Newmark and Wilson methods showed significant phase shift errors. As shown in Table 2, the RMS error for GLH-3P was significantly lower than that of conventional methods.

Table 2. Comparison of maximum response and RMS error for Model I (Linear System).

Evaluation Component	Duhamel (Exact)	GLH-3P (Proposed)	Newmark- β	Wilson- θ
Max Displacement (cm)	0.2618	0.2697	0.4612	0.4613
Max Velocity (cm/s)	5.7611	5.6972	7.1815	7.1812
RMS Error	0.0879	0.1039	0.328	0.3278

3- 2- Model II: Nonlinear System

A nonlinear damped system with a natural period of 0.08 s and elastoplastic behavior with kinematic hardening was investigated. The proposed method demonstrated superior stability and accuracy in capturing the hysteresis loops compared to the Newmark method. Notably, the GLH-3P method does not require matrix inversion in the iterative cycle, reducing computational complexity for certain applications.

4- Conclusion

The GLH-3P method provides a robust and efficient framework for the time-history analysis of SDOF structures.

Key advantages include:

Reduction of RMS error by up to 93% in nonlinear systems compared to the Newmark method.

A unified formulation that handles both linear and nonlinear analysis without changing the underlying algorithm.

High accuracy in identifying jump points and high-frequency oscillations in nonlinear response curves.

While the method is more computationally intensive for high-frequency systems due to its iterative nature, its precision makes it a reliable tool for seismic analysis.

References

- [1] K.-J. Bathe, *Finite element procedures*, 2nd ed., Prentice Hall, New Jersey, USA, 1996.
- [2] R. Clough, J. Penzien, *Dynamics of Structures*, 3rd ed., Computers & Structures, Inc, Berkeley, California, USA, 1995.
- [3] J. Humar, *Dynamics of structures*, 3rd ed., CRC Press (Taylor & Francis Group), London, UK, 2012.
- [4] J. Houbolt, A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, *Journal of the Aeronautical Sciences*, 17(9) (1950) 540-550. <https://doi.org/10.2514/8.1722>.
- [5] M. Dokainish, K. Subbaraj, A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—I. Explicit methods, *Computers & Structures*, 32(6) (1989) 1371-1386. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90314-3](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90314-3).



توسعه فرمول بندی گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای (GLH-3P) برای تحلیل خطی و غیرخطی ارتعاشات سازه‌ها تحت اثر تحریک زلزله

مهدی بابائی قلعه جوق^{۱*}، محمدرضا حنفی^۲، علیرضا رهایی^۲

۱- دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بناب، بناب، ایران.

۲- دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۱۴

بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۰۶

پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۱۷

ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۱۱/۲۸

کلمات کلیدی:

تحلیل تاریخچه زمانی

تحلیل غیرخطی

روش گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای

روش نیومارک-بتا

انتگرال گاوس-لژاندر

دینامیک سازه‌ها، درون یاب هرمیت

خلاصه: پاسخ دینامیکی سازه‌ها تحت اثر زلزله یکی از مسائل مهم مهندسی عمران است که نیازمند روش‌های تحلیلی دقیق و کارآمد می‌باشد. در این پژوهش، فرمول بندی کارآمدی برای تحلیل دینامیکی غیرخطی سازه‌ها تحت عنوان روش گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای ارائه می‌گردد که مبتنی بر قاعده انتگرال گیری ضمنی سه نقطه‌ای گاوس می‌باشد که از درون یابی مرتبه سوم به روش هرمیت برای تقریب میان گام‌ها استفاده می‌کند. فرمول ارائه شده قابلیت تحلیل سیستم‌های غیرخطی هندسی و مصالح را دارا بوده و انواع مختلفی الگوهای بارگذاری را پوشش می‌دهد. نتایج به دست آمده از تحلیل‌های روش جدید، با نتایج روش‌های رایج دیگر مانند روش نیمه تحلیلی انتگرال دو هامل و روش شبه تحلیلی نیومارک-بتا و ویلسون-تتا مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان داد، روش ارائه شده خطای مجذور میانگین مربعات را در سیستم‌های خطی تا ۱۸٪ و در سیستم‌های غیرخطی تا ۹۳٪ نسبت به روش نیومارک کاهش می‌دهد. فرمول بندی ارائه شده از نظر دقت، پایداری، هم گرایی و هزینه محاسباتی برتری قابل توجهی نسبت به سایر روش‌ها دارد و می‌توان آن را در نرم افزارهای اجزای محدود پیاده سازی و برای تحلیل تاریخچه زمانی غیرخطی سازه‌های یک درجه آزادی استفاده نمود.

۱- مقدمه

حرکت نوسانی یک سیستم مکانیکی جرم-فنر-میراگر ایده آل با یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (ODE) مدل سازی می‌شود که معروف به معادله دیفرانسیل حرکت (DEOM) می‌باشد. برای شناسایی و پیش بینی رفتار این سیستم در طول زمان، بایستی معادله دیفرانسیل حرکت در طول بازه زمانی مشخصی حل شود. به طور کلی، هر معادله دیفرانسیلی را می‌توان به صورت تحلیلی یا عددی حل کرد که غالباً راه حل‌های تحلیلی ارجح هستند. باین حال، دستیابی به جواب تحلیلی در معادلات کاربردی به سختی ممکن است؛ چراکه اولاً، تابع تحریک معمولاً در یک ورودی نامنظم متغیر با زمان قرار می‌گیرد و ثانیاً، رفتار اجزای سیستم ممکن است در موقعیت‌های مختلف زمانی و مکانی متغیر باشد؛ بنابراین، نیازمند استفاده از روش‌های عددی برای حل این معادله می‌باشد. براین اساس، گستره‌ی وسیعی از روش‌های تحلیل

خطی و غیرخطی برای حل عددی آن معرفی شده‌اند. باین حال، همواره ارائه فرمول بندی کارآمدتر و دقیق تر برای تحلیل مؤثرتر سیستم‌های دینامیکی غیرخطی با طول گام‌های درشت تر، عرصه‌ای دیرپا در تحقیقات مهندسی مکانیک و سازه بوده است. روش‌های عددی تحلیل دینامیکی سازه‌ها مبتنی بر اصل جمع آثار قوا بوده و یا از روش‌های انتگرال گیری گام به گام می‌باشند. انتگرال دو هامل^۳ و تبدیل فوریه دو روش شناخته شده در دسته اول بوده و روش‌های تفاضلات مرکزی^۴، نیومارک-بتا^۵، هوبولت^۶، ویلسون-تتا^۷ و همه روش‌های رانگ-کوتا^۸ از دسته دوم هستند [۱]. فرمول بندی‌های انتگرال گیری گام به گام روش‌هایی جامع برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی و خطی ارائه می‌دهند. در این روش‌ها اگر گام‌های زمانی به اندازه کافی کوچک اختیار شوند، می‌توان اثرات غیرخطی را با هر دقت دلخواه در پاسخ محاسبه

3. Duhamel integration
4. Central difference
5. Newmark- β
6. Hubault
7. Wilson- θ
8. Range-Kutta

1. Ordinary differential equation
2. Differential equation of motion

* نویسنده عهده دار مکاتبات: m.babaei@ubonab.ac.ir



مطالعاتی را انجام دادند. این روش می‌تواند میزان خطای عددی توسط کاربر را کنترل کرده و در عین حال اتلاف در بسامدهای پایین را به حداقل برساند [۲۲]. پس از آن، چانگ و همکاران^{۱۱} به بررسی عملکرد روش نیومارک برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی با استفاده از روشی جدید پرداخته و ویژگی‌های عددی روش نیومارک، مانند خطای برش موضعی، مرتبه دقت، و پایداری را برای هر دو سیستم ارتجاعی خطی و غیرخطی را مورد بررسی قرار دادند [۲۳]. باته و همکاران^{۱۲} روشی جدید و تلفیقی برای تحلیل دینامیکی غیرخطی پایدار سازه‌ها ارائه کردند. این روش قاعده دوزنقه و روش ویلسون-تتا را به گونه‌ای ترکیب می‌کند که از ناپایداری روش اول و دقت پایین روش دوم جلوگیری کند [۲۴]. سپس، روشی پای‌ستار برای انرژی و ضربه ارائه داد. این روش مشابه روش قبلی بود ولی از ناپایداری جلوگیری می‌کرد [۲۵]. آن‌ها پس از آن برخی از ویژگی‌های روش توسعه‌یافته قبلی خود را که در سال‌های ۲۰۰۵ تا ۲۰۰۷ ارائه کرده بودند را مورد بررسی قرار داده و کارایی روش‌ها را در تحلیل سیستم‌های سازه‌ای خطی آزمودند [۲۶]. پس از آن روش انتگرال‌گیری زمانی باته و فرم پارامتری آن بررسی و بهبود داده شد و تلاش شد افت دامنه‌ی نوسان و افزایش طول دوره‌ی تناوب سیستم در انتگرال‌گیری عددی توجیح گردد [۲۷، ۲۸]. کاتسیک‌ادلیس^{۱۳} چندین مقاله در مورد روش‌های انتگرال‌گیری زمانی برای تحلیل دینامیکی سیستم‌های سازه‌ای منتشر کرده است [۲۲-۲۷]. ژانگ و همکاران^{۱۴} روش جدیدی برای تحلیل هم‌گرایی روش‌های مرکب تعمیم‌یافته پیشنهاد کردند و خطاهای برش موضعی شتاب، سرعت و تغییر مکان را ارزیابی کردند. همچنین آن‌ها نشان دادند روش خطی دو گامی بهینه در دینامیک سازه عملکرد مطلوبی دارد [۲۹-۳۱]. اخیراً نیز چندین روش تحلیلی و آزمایشگاهی جدید برای تحلیل دینامیکی سیستم‌های سازه‌ای یک و چند درجه آزادی با استفاده از فرمول‌های درون‌یابی و روش‌های بهینه‌سازی توسط نویسندگان پژوهش حاضر ارائه شده است [۳۲-۴۸]. مالاتی و همکاران^{۱۵} نیز یک روش ضمنی بهبودیافته دارای الگوریتم کاربرپسند نوآورانه برای تاریخچه زمانی غیرارتجاعی سیستم‌های سازه‌ای یک درجه آزادی ارائه کردند که در نرم‌افزار لب ویو^{۱۶} پیاده‌سازی شده است [۴۹].

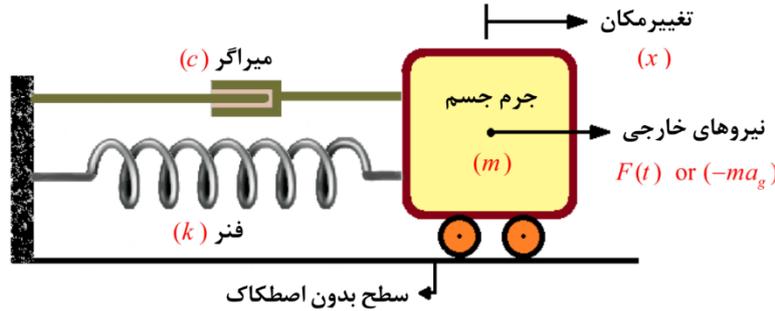
پژوهش حاضر، فرمول‌بندی جدیدی برای تحلیل تاریخچه زمانی غیرخطی سازه‌های یک درجه آزادی تحت اثر زلزله ارائه می‌دهد. هدف

شده منعکس کرد [۲، ۳]. علاوه بر آن، مزیت بزرگ روش‌های گام‌به‌گام این است که فرمول‌بندی آنها که برای سیستم‌های یک درجه آزادی (SDOF) ارائه شده‌اند را می‌توان با جایگزینی مقادیر عددی با کمیت‌های برداری و ماتریسی متناظرشان، برای سیستم‌های چند درجه آزادی (MDOF) نیز تعمیم داد.

اولین روش انتگرال‌گیری زمانی گام‌به‌گام سال ۱۹۵۰ توسط مهندس هوا-فضا جان کورنلیوس هوبولت^۳ که روشی کارآمد برای حل مسئله‌ای مهم و پیچیده در مهندسی هوا-فضا بود، ارائه شده است [۴]. در اواخر قرن بیستم، دقت و پایداری روش‌های جدید توسط مهندسان به دقت مورد بررسی قرار گرفت [۵] و نتایج به دست آمده در متون فنی ارائه شد [۶، ۱]. بعدها، روشی ساده و کاربردی توسط نیومارک و ولتسوس^۴ برای حل طیف گسترده‌ای از مسائل دینامیک سازه برای تحلیل لرزه‌ای سیستم‌های سازه‌ای معرفی شد [۷]. در حال حاضر منابعی بسیار غنی و مشهوری در زمینه دینامیک سازه‌ها وجود دارد که به موضوعات مختلفی در این زمینه و کاربردهای آنها پرداخته‌اند [۷-۱۶]. روش‌های جدید انتگرال‌گیری توسط هیلبر و همکاران^۵ ارائه شد که پایدار نامشروط بوده و در مقایسه با روش‌های مشابه موجود نیومارک-بتا، هوبولت و ویلسون-تتا از دقت و کارایی مناسبی برخوردار بودند [۱۷]. بروسا و همکاران^۶ روش پایدار نامشروط مبتنی بر روش‌های انتگرال‌گیری زمانی تک‌گامی را جهت حل معادله دیفرانسیل حرکت معرفی کردند. این روش ضمنی بوده و مزایای آن نسبت به روش‌های موجود دیگر نشان داده شد [۱۸]. زینکوویچ و همکاران^۷ فرمول‌بندی عمومی‌تری مبتنی بر انتگرال‌گیری زمانی تک‌گامی تحت عنوان روش‌های SSPJ را برای استفاده در معادلات نفوذ و ارتعاشات پیشنهاد دادند [۱۹]. بخش دوم تحقیقات آن‌ها نیز توسط وود^۸ انجام شد [۲۰]. هاف و پال^۹ الگوریتمی تک‌گامی جهت حل معادله دیفرانسیل حرکت سیستم‌های سازه‌ای دینامیکی ارائه دادند. الگوریتم جدیدی به نام SS33 که می‌تواند به دقت و پایداری بالایی برای انتگرال‌گیری مستقیم معادلات دینامیکی سازه‌ای دست یابد [۲۱]. چانگ و هولبرت^{۱۱} نیز بر روی روش جدید انتگرال‌گیری زمانی ضمنی تک‌گامی

1. Single degree of freedom
2. Multiple degree of freedom
3. John Cornelius Hubault
4. Newmark & Veletsos
5. Hibler et al.
6. Brusa et al.
7. Zeinkiewicz et al.
8. Wood
9. Hoff & Pahl
10. Chung & Hulbert

11. Chung et al.
12. Bathe et al.
13. Katsikadelis
14. Zhang et al.
15. Malathy et al.
16. LabVIEW software



شکل ۱. مدل ارتعاش سیستم جرم-فنر تحت اثر تحریکات خارجی وابسته به زمان.

Fig. 1. Ideal model of a mass-spring system subjected to time-dependent external excitation.

معادله تعادل براساس قانون دوم نیوتن تدوین می‌شود و شامل نیروی لختی (اینرسی)، نیروی میرایی و نیروی ارتجاعی در برابر نیروی خارجی می‌باشد. در کاربردهای مهندسی زلزله، این مدل کمک می‌کند تا رفتار سازه در برابر شتاب‌های لرزه‌ای پیش‌بینی شده و مؤلفه‌هایی مانند دوره تناوب و میرایی بحرانی محاسبه گردد.

با استناد به مرجع کتاب دینامیک سازه‌های چوپرا و سایر متون فنی موجود [۱۴، ۵۵]، و با فرض اینکه مؤلفه جابه‌جایی نسبی سیستم (تغییر شکل فنر) را با u ، سرعت نسبی آنرا با \dot{u} و شتاب نسبی سیستم را با \ddot{u} ، نشان دهیم، معادله دیفرانسیل حرکت سیستم‌های غیرخطی تحت اثر زلزله، به صورت زیر ارائه می‌گردد [۵۶، ۵۷]:

$$m\ddot{u} + F_D(u, \dot{u}) + F_S(u, \dot{u}) = -ma_g \quad (1)$$

رابطه (۱)، رایج‌ترین شکل معادله ارتعاش می‌باشد. عبارت (u, \dot{u}) ، صرفاً برای تأکید بر غیرخطی بودن کمیت‌های متناظرشان هستند. با فرض رفتار خطی فنر، $F_S = ku$ و رفتار میرایی ویسکوز، $F_D = c\dot{u}$ ، برای یک سیستم خطی می‌توان نوشت:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -ma_g \quad (2)$$

که در آن k ثابت فنر، c ضریب میرایی یا ثابت میرایی ویسکوز، m جرم سیستم می‌باشد که در طول ارتعاش مقداری ثابت می‌باشد. با تقسیم طرفین رابطه (۲) به مؤلفه جرم سیستم (m)، معادله دیفرانسیل

اصلی، تعمیم روش انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر و ترکیب آن با فرمول‌های درون‌یابی هرمیت^۱ دو مشتقه برای ایجاد روشی جدید برای حل معادله حرکت سیستم‌های سازه‌ای یک درجه آزادی می‌باشد. منطق موجود در ترکیب دو فرمول‌بندی در مقالات ریاضی توسط نویسنده اول پژوهش حاضر منتشر و تبیین شده است [۵۰-۵۴]. و علت نام‌گذاری این روش تحت عنوان گاوس-لژاندر-هرمیت-سه‌نقطه‌ای (GLH-3P)^۲، ترکیب فرمول‌های انتگرال‌گیری گاوس-لژاندر سه‌نقطه‌ای با درون‌یاب‌های هرمیت می‌باشد. همچنین، ایده و نوآوری پژوهش حاضر توسعه فرمول‌بندی‌های جدید درون‌یابی و انتگرال‌گیری عددی و توسعه ضرایب اختصاصی درون‌یابی هرمیت (جدول ۱) برای اولین بار و ارائه الگوریتم بهینه‌شده تحلیل می‌باشد که مرتبه دقت را به $O(h^6)$ افزایش می‌دهد و تعداد تکرارها را تا ۵۰٪ کاهش می‌دهد، درحالی‌که روش‌های متداول مانند نیومارک از مرتبه $O(h^2)$ می‌باشد.

۲- بیان مسئله

شکل (۱) یک سیستم جرم-فنر-میراگر خطی را تحت تأثیر نیروهای خارجی تابع زمان نشان می‌دهد. این سیستم از سه جزء جرم، فنر و میراگر تشکیل شده است. با نوشتن معادله تعادل دینامیکی در سیستم، معادله ارتعاش حاصل می‌گردد که حل عددی آن محور اصلی در پژوهش حاضر می‌باشد. پاسخ این معادله می‌تواند اطلاعاتی در مورد بسامد طبیعی، نسبت میرایی، شکل مود و پاسخ سیستم را ارائه دهد. این سیستم ایده‌آل، مدل پایه‌ای برای تحلیل ارتعاشات سازه‌های واقعی مانند ساختمان‌ها یا پل‌ها است، جایی که جرم نشان‌دهنده جرم سازه، فنر معرف سختی ارتجاعی (الاستیک) و میراگر بخش جذب انرژی ناشی از اصطکاک یا گران‌روی (ویسکوزیته) می‌باشد.

1. Hermite Interpolation
2. Gauss-Legendre-Hermit-3Point Method

گام‌های زمانی معمولاً یکسان در نظر گرفته می‌شود که با $h = t_{i+1} - t_i$ نشان داده می‌شود. باتوجه به گسسته‌سازی دامنه زمانی، تابع پاسخ گسسته‌سازی شده نیز به صورت دنباله زیر ارائه می‌شود:

$$\{u\} := \{u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{N-1}, u_N\} \quad (5)$$

مقدار شتاب سیستم در نقاط گرهی نقش ویژه‌ای در سطح دقت و سایر ویژگی‌های روش‌های عددی مانند پایداری، سرعت و هم‌گرایی پاسخ ایفا می‌کند؛ بنابراین، مقادیر شتاب گرهی باید مستقیماً توسط معادله دیفرانسیل حرکت محاسبه شوند تا دارای بیشترین دقت باشند. از سوی دیگر در تحلیل تاریخچه زمانی زلزله، مقادیر شتاب (به‌عنوان تابع تحریک خارجی) اغلب در گام‌های زمانی دارای طول یکسان^۳ ارائه می‌شود که همین نقاط، به‌عنوان نقاط گرهی در نظر گرفته می‌شوند. از آنجایی که معادله دیفرانسیل حرکت در تمامی لحظات برقرار است، شکل گسسته رابطه (۱) را برای لحظه t_{i+1} به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$m\ddot{u}_{i+1} + F_{D,i+1} + F_{S,i+1} = -ma_{g,i+1} \quad (6)$$

که در آن $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}(t_{i+1})$ ، شتاب در لحظه t_{i+1} می‌باشد. با بازآرایی رابطه m می‌توان نوشت:

$$\ddot{u}_{i+1} = -m^{-1} (ma_{g,i+1} + F_{D,i+1} + F_{S,i+1}) \quad (7)$$

حال بایستی علاوه بر \ddot{u}_{i+1} ، باید مقادیر شتاب را در دو نقاط داخلی میان‌گام‌های زمانی نیز محاسبه شود. جهت تعیین شتاب در این نقاط، ابتدا بایستی موقعیت نقاط انتگرال‌گیری فرمول گاوس-لژاندر-سه‌نقطه‌ای را مشخص شود. حال فرض کنید سه مؤلفه‌ی موقعیت مکانی λ ، κ و η به صورت زیر معرفی شوند:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \cong \frac{496}{4401} \quad (8)$$

حرکت سیستم‌های خطی تحت اثر شتاب زلزله به صورت زیر فرمول‌بندی خواهد شد:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = -a_g \quad (3)$$

رابطه (۴)، شکل دیگری از معادله ارتعاش مورد استفاده در مطالعه حاضر می‌باشد که در آن $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ بسامد زاویه‌ای طبیعی سیستم و $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$ نسبت میرایی سیستم می‌باشد. در این معادلات، زلزله به صورت تابعی گسسته از زمان ارائه می‌شود که در N لحظه‌ی زمانی داده می‌شود. در ادامه، با استفاده از رابطه (۳) و سایر ابزارهای مورد نیاز، مبانی نظری روش جدید برای محاسبه پاسخ لرزه‌ای سیستم‌های تک درجه آزاد در لحظه t_{i+1} پایه گذاری می‌گردد.

۳- روش تحقیق

در فرمول‌بندی روش حاضر، تحلیل دینامیکی نیاز به چندین ابزار ریاضی می‌باشد که عبارت‌اند از: (۱) روابط گسسته‌سازی دامنه زمانی، (۲) انتگرال‌گیر گاوس-لژاندر، (۳) فرمول‌های درون‌یابی هرمیت و (۴) چندجمله‌ای‌های پیشگوی سری تیلور^۱.

انتگرال‌گیر گاوس-لژاندر سه‌نقطه‌ای و فرمول درون‌یابی هرمیت بدنه اصلی این الگوریتم را تشکیل می‌دهند. علاوه بر آن، چندجمله‌ای‌های تیلور نیز تقریب مناسبی برای شروع فرایند تکرار ارائه می‌دهند. ذیلاً، به بررسی روابط مربوط به این ابزارها پرداخته می‌شود.

۳-۱- گسسته‌سازی دامنه زمانی

در روش‌های عددی انتگرال‌گیری زمانی گام‌به‌گام تحلیل دینامیکی، تابع پاسخ در لحظه‌های زمانی گسسته یا نقاط گرهی^۲ ارائه می‌شود. با در نظر گرفتن تعداد N گام زمانی، دامنه پیوسته زمانی به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$\{t\} := \{t_1, t_2, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{N-1}, t_N\} \quad (4)$$

که به تعداد $N - 1$ گام زمانی را در بازه زمانی حل ایجاد می‌کند. طول

$$a_{g,i+\eta} = (1-\eta)a_{g,i} + \eta a_{g,i+1} \quad (۱۶)$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \quad (۹)$$

به‌طور مشابه، در سیستم‌های خطی، می‌توان شتاب را با استفاده از معادلات زیر محاسبه کرد:

$$\eta = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \cong \frac{۴۹۶}{۵۵۹} \quad (۱۰)$$

$$\ddot{u}_{i+\lambda} = - \left(a_{g,i+\lambda} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+\lambda} + \omega_n^2 u_{i+\lambda} \right) \quad (۱۷)$$

$$\ddot{u}_{i+\kappa} = - \left(a_{g,i+\kappa} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+\kappa} + \omega_n^2 u_{i+\kappa} \right) \quad (۱۸)$$

$$\ddot{u}_{i+\eta} = - \left(a_{g,i+\eta} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+\eta} + \omega_n^2 u_{i+\eta} \right) \quad (۱۹)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = - \left(a_{g,i+1} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+1} + \omega_n^2 u_{i+1} \right) \quad (۲۰)$$

که موقعیت نسبی میانگام‌های گاوس را در طول یک گام معین می‌کنند. بنابراین، موقعیت مطلق نقاط داخلی انتگرال گاوس-لژاندر-سه‌نقطه‌ای به‌صورت $t_{i+\eta} = t_i + \eta h$ و $t_{i+\kappa} = t_i + \kappa h$ ، $t_{i+\lambda} = t_i + \lambda h$ شناسایی خواهد شد. با استفاده از روابط فوق و با الگو برداری از (۷)، می‌توان روابط زیر را جهت محاسبه مقادیر شتاب $\ddot{u}_{i+\lambda}$ ، $\ddot{u}_{i+\kappa}$ و $\ddot{u}_{i+\eta}$ در این نقاط ارائه کرد:

$$\ddot{u}_{i+\lambda} = -m^{-1} \left(ma_{g,i+\lambda} + F_{D,i+\lambda} + F_{S,i+\lambda} \right) \quad (۱۱)$$

$$\ddot{u}_{i+\kappa} = -m^{-1} \left(ma_{g,i+\kappa} + F_{D,i+\kappa} + F_{S,i+\kappa} \right) \quad (۱۲)$$

$$\ddot{u}_{i+\eta} = -m^{-1} \left(ma_{g,i+\eta} + F_{D,i+\eta} + F_{S,i+\eta} \right) \quad (۱۳)$$

روابط فوق تمام فرمول‌های موردنیاز برای گسسته‌سازی دامنه در فرمول‌بندی تحلیل دینامیکی جدید را در این مقاله فراهم می‌کنند.

۳-۲-۳- انتگرال گاوس-لژاندر-هرمیت-سه‌نقطه‌ای (3P-GLH)

برای آشنایی و درک بهتر فرمول‌بندی روش گاوس-لژاندر-هرمیت-سه‌نقطه‌ای، شکل (۲) مفهوم هندسی انتگرال گاوس-لژاندر-سه‌نقطه‌ای در بازه $[-1, +1]$ نشان می‌دهد. در ادامه روابط بین مؤلفه‌های تغییرمکان نسبی، سرعت نسبی و شتاب نسبی فرمول‌بندی می‌شوند.

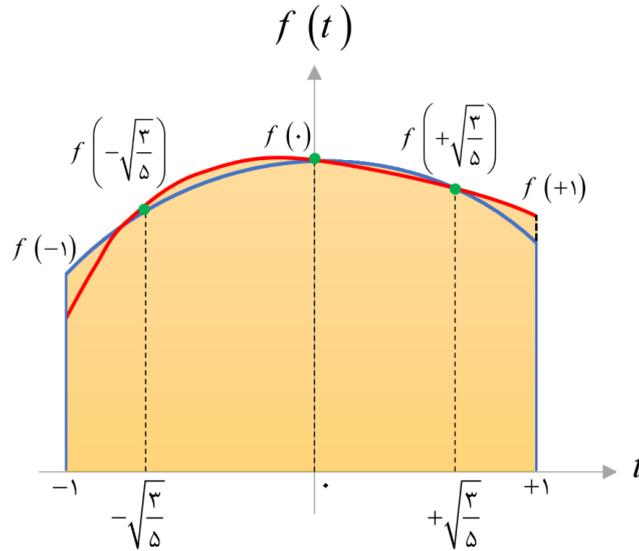
تمامی روش‌های گام‌به‌گام از فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی برای پیشروی در زمان از t_i به t_{i+1} استفاده می‌کنند. اساس این روش‌ها دو معادله انتگرالی بنیادی هستند. اگر مؤلفه تغییر مکان جانبی را با $u = u(t)$ و مؤلفه سرعت $\dot{u} = \dot{u}(t)$ و مؤلفه شتاب $\ddot{u} = \ddot{u}(t)$ نشان دهیم؛ این دو معادله به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{u}(t) dt \quad (۲۱)$$

که در آن $\ddot{u}_{i+\lambda} = \ddot{u}(t_{i+\lambda})$ ، $a_{g,i+\lambda} = a_g(t_{i+\lambda})$ ، $F_{D,i+\lambda} = F_D(u_{i+\lambda} + \dot{u}_{i+\lambda})$ و $F_{S,i+\lambda} = F_S(u_{i+\lambda} + \dot{u}_{i+\lambda})$ به‌ترتیب شتاب سیستم، شتاب حرکت زمین، نیروی بازگرداننده (فنریت) و میرایی در لحظه $t_{i+\lambda}$ می‌باشد. به‌طور مشابه، سایر کمیت‌های موجود در روابط (۱۱) تا (۱۳) را می‌توان برای لحظات $t_{i+\kappa}$ و $t_{i+\eta}$ تعریف کرد. همچنین، شتاب حرکت زمین در نقاط داخلی با استفاده از درون‌یابی خطی و با استفاده از روابط ساده زیر به‌دست می‌آید:

$$a_{g,i+\lambda} = (1-\lambda)a_{g,i} + \lambda a_{g,i+1} \quad (۱۴)$$

$$a_{g,i+\kappa} = (1-\kappa)a_{g,i} + \kappa a_{g,i+1} \quad (۱۵)$$



شکل ۲. نمودار شماتیک روش گاوس-لژاندر-سه نقطه‌ای

Fig. 2. Schematic diagram of 3-point Gauss-Legendre quadrature

$$\dot{u}_{i+1} \cong \dot{u}_i + h \left(\frac{5}{18} \ddot{u}_{i+\lambda} + \frac{4}{9} \ddot{u}_{i+\kappa} + \frac{5}{18} \ddot{u}_{i+\eta} \right) \quad (23)$$

$$u_{i+1} = u_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{u}(t) dt \quad (22)$$

$$u_{i+1} \cong u_i + \left[h \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{10} \dot{u}_i + \frac{25}{63} \dot{u}_{i+\lambda} \\ + \frac{128}{315} \dot{u}_{i+\kappa} + \frac{25}{63} \dot{u}_{i+\eta} - \frac{1}{10} \dot{u}_{i+1} \end{array} \right) \right] \quad (24)$$

$$+ \left[h^2 \left(-\frac{1}{140} \ddot{u}_i + \frac{1}{140} \ddot{u}_{i+1} \right) \right]$$

که در آن، $\ddot{u}_{i+\eta} = \ddot{u}(t_{i+\eta})$ ، $\ddot{u}_{i+\kappa} = \ddot{u}(t_{i+\kappa})$ ، $\ddot{u}_{i+\lambda} = \ddot{u}(t_{i+\lambda})$ ،
 $\dot{u}_{i+\eta} = \dot{u}(t_{i+\eta})$ و $\dot{u}_{i+\kappa} = \dot{u}(t_{i+\kappa})$ ، $\dot{u}_{i+\lambda} = \dot{u}(t_{i+\lambda})$ ،

۳-۳ فرمول‌های درون‌یابی هرمیت

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، نقاط داخلی در انتگرال گاوس-لژاندر-سه نقطه‌ای باید با روشی دقیق مورد ارزیابی قرار گیرند. همان‌طور که پیشنهاد شد، فرمول درون‌یابی هرمیت می‌تواند یک ابزار کارآمد باشد؛ در حالی که، در مطالعات قبلی به‌طور جدی به اهمیت این موضوع پرداخته نشده است. فرمول درون‌یابی هرمیت اطلاعات نقاط انتهایی گام را گرفته و تغییر مکان و سرعت نقاط داخلی را تخمین می‌زند. حال، فرمول‌های مرتبه اول درون‌یابی هرمیت

که در آن $t_{i+1} = t_i + h$ ، t_i ، نقاط ابتدایی و انتهایی گام i -ام و نیز $\dot{u}_i = \dot{u}(t_i)$ و $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}(t_{i+1})$ مقادیر سرعت در این نقاط می‌باشند. $u_i = u(t_i)$ و $u_{i+1} = u(t_{i+1})$ نیز تغییر مکان در نقاط انتهایی گام می‌باشند. تفاوت بین روش‌های گام‌به‌گام در فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی مورد استفاده برای تخمین جمله انتگرالی در معادلات (۲۱) و (۲۲) مشهود است. لازم به ذکر است، کارایی این روش‌ها به فرمول‌های استفاده شده جهت ارزیابی عددی انتگرال‌ها بستگی دارد. اکثر روش‌های انتگرال‌گیری زمانی گام‌به‌گام که قبلاً توسعه داده شده‌اند، از اطلاعات نقاط انتهایی در فرمول‌های انتگرال‌گیری استفاده کرده‌اند و به‌ندرت نقاط داخلی گام را در فرمول‌بندی وارد کرده‌اند. حال، پژوهش حاضر با الهام از روش‌های رانگ-کوتا، در حال ایجاد انتگرال‌گیر گاوس-لژاندر-سه نقطه‌ای در روابط (۱۷) و (۱۸) می‌باشد. اما دست‌یابی به مقادیر دقیق تغییر مکان و سرعت در نقاط داخلی نیازمند روشی قوی‌تر می‌باشد. حال، با یادآوری اینکه مؤلفه‌های λ ، κ و η موقعیت مکانی نقاط میانی انتگرال گاوس-لژاندر-سه نقطه‌ای را مشخص می‌کنند؛ فرمول‌های انتگرال‌گیری زیر برای نقاط گاوس-لژاندر-سه نقطه‌ای توسعه می‌یابد:

مقادیر سرعت را در لحظات $t_{i+\lambda}$ ، $t_{i+\kappa}$ و $t_{i+\eta}$ به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\dot{u}_{i+\lambda} \cong (A\dot{u}_i + B\dot{u}_{i+1}) + h(C\ddot{u}_i - D\ddot{u}_{i+1}) \quad (25)$$

$$\dot{u}_{i+\kappa} \cong E(\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}) + hF(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i+1}) \quad (26)$$

$$\dot{u}_{i+\eta} \cong (B\dot{u}_i + A\dot{u}_{i+1}) + h(D\ddot{u}_i - C\ddot{u}_{i+1}) \quad (27)$$

به طور مشابه، تغییرمکان‌ها با درون‌یاب‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$u_{i+\lambda} \cong (Gu_i + Hu_{i+1}) + h(I\dot{u}_i - J\dot{u}_{i+1}) + h^2(K\ddot{u}_i + L\ddot{u}_{i+1}) \quad (28)$$

$$u_{i+\kappa} \cong M(u_i + u_{i+1}) + Nh(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) + Oh^2(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (29)$$

$$u_{i+\eta} \cong (Hu_i + Gu_{i+1}) + h(J\dot{u}_i - I\dot{u}_{i+1}) + h^2(L\ddot{u}_i + K\ddot{u}_{i+1}) \quad (30)$$

مقادیر دقیق و تقریبی ضرایب مورد استفاده در فرمول‌های درون‌یابی هرمیت برای محاسبه سرعت و تغییرمکان با استفاده از نظریه تقریب توابع و مبانی برازش منحنی طبق مراجع [۵۸، ۵۹] و با انجام محاسبات دقیق و پیچیده جبری محاسبه و در جدول (۱) ارائه شده‌اند. باید توجه داشت که درون‌یاب‌های تغییرمکان از مقادیر مشتق مرتبه بالاتر بهره می‌برند. لازم به ذکر است، تمامی فرمول‌های درون‌یابی توسط مؤلفین توسعه یافته‌اند و برای نخستین بار در این مقاله گزارش می‌شوند. این فرمول‌ها بر پایه اصول ریاضیاتی پیشرفته در نظریه تقریب توابع و روش‌های برازش منحنی بنا نهاده شده‌اند و با محاسبات جبری دقیق، ضرایب منحصر به فردی برای درون‌یابی سرعت و تغییرمکان در نقاط داخلی گام زمانی استخراج گردیده است.

برای روشن شدن چگونگی ساخت فرمول‌بندی درون‌یاب‌های هرمیت، یک مورد از آنها را مختصراً توضیح می‌دهیم. در استخراج این درون‌یاب‌ها، از شرایط مرزی معین در نقاط دو انتهایی گام زمانی و برازش چندجمله‌ای‌ها استفاده شده است. به عنوان مثال، برای فرمول‌بندی درون‌یاب سرعت در نقطه $t_{i+\lambda}$ ، ضرایب چندجمله‌ای درجه سه به ترتیب ذیل در نظر گرفته می‌شود:

$$\ddot{u}(t) = a + at + at^2 + at^3 \quad (31)$$

که ابتدا با اعمال شرایط مرزی زیر:

جدول ۱. ضرایب درون‌یاب هرمیت برای محاسبه سرعت و تغییرمکان.

Table 1. Hermite interpolating coefficients for velocity and displacement calculations.

ضرایب مربوط به فرمول‌های (۲۵) تا (۲۷) در محل میان‌گام‌ها برای محاسبه سرعت					
$A = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{15}}{25} \cong \frac{219}{227}$	$B = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{15}}{25} \cong \frac{533}{15124}$	$C = \frac{1}{20} + \frac{\sqrt{15}}{100} \cong \frac{248}{2795}$	$D = \frac{1}{20} - \frac{\sqrt{15}}{100} \cong \frac{248}{2205}$	$E = \frac{1}{2}$	$F = \frac{1}{8}$
ضرایب مربوط به فرمول‌های (۲۸) تا (۳۰) در محل میان‌گام‌ها برای محاسبه تغییرمکان					
$G = \frac{1}{2} + \frac{63\sqrt{15}}{500} \cong \frac{1070}{1083}$	$H = \frac{1}{2} - \frac{63\sqrt{15}}{500} \cong \frac{82}{6831}$	$I = \frac{11}{200} + \frac{13\sqrt{15}}{1000} \cong \frac{518}{4917}$	$J = \frac{11}{200} - \frac{13\sqrt{15}}{1000} \cong \frac{409}{11934}$		
$K = \frac{1}{400} + \frac{\sqrt{15}}{2000} \cong \frac{62}{13975}$	$L = \frac{1}{400} - \frac{\sqrt{15}}{2000} \cong \frac{67}{118898}$	$M = \frac{1}{2}$	$N = \frac{5}{32}$	$O = \frac{1}{64}$	

موجود ارائه شده است که در نرم افزار متلب^۱ پیاده سازی شده اند. تحریک سیستم با رکورد زلزله ال سنترو^۲ مطابق شکل (۳) انجام می پذیرد. زلزله ال سنترو زلزله ای به بزرگی ۷/۱ در مقیاس بزرگی موج سطحی (MS) است که در تاریخ ۱۹ مه ۱۹۴۰ در منطقه ال سنترو در آمریکا رخ داد. این رکورد دارای شتاب بیشینه ۳۱۲/۷۶۲ سانتی متر بر مجذور ثانیه و مدت زمان ۲۹ ثانیه می باشد که به دلیل داشتن پالس های قوی و متعدد، مورد توجه محققان و مهندسان زلزله بوده و در برخی از آیین نامه ها به عنوان رکورد نمونه برای زلزله های حوزه نزدیک انتخاب شده است. در مدل سازی اول یک سیستم خطی پایستار (نامیرا) با دوره تناوب طبیعی ۰/۱۱۳ ثانیه و با مقدار ثابت فتر ۱۴۰۹/۶۴۷ کیلونیوتن بر سانتی متر و در مدل سازی دوم یک سیستم غیرخطی میرا با دوره تناوب طبیعی ۰/۰۸ ثانیه و با مقدار ثابت فتر ۲۸۱۲/۴۶۷ کیلونیوتن بر سانتی متر مورد بررسی قرار گرفته است. مشخصات کامل سیستم های خطی و غیرخطی مدل ها نیز در جدول (۴) آورده شده است. لازم به ذکر است، در مدل دوم، سیستمی شامل یک جرم و یک فنر غیرخطی را در نظر گرفته شده است. رفتار فنر الاستوپلاستیک با سخت شوندگی سینماتیک در نظر گرفته می شود که شامل اثر بوشینگر بدون زوال چرخه ای می باشد. نیروی بازگرداننده فنر $f_s(u)$ در ناحیه الاستیک به صورت $f_s = k \times u$ و در ناحیه پلاستیک به صورت $f_s = f_y + \alpha \times k \times (u - u_p)$ و با ضریب $\alpha = 1$ ارائه می گردد. که f_s نیروی فنر، k ضریب فنریت سیستم، u تغییر مکان نسبی سیستم در هر لحظه، f_y تنش تسلیم فنر، α نسبت تنش تسلیم در باربرداری نسبت به بارگذاری سیستم و u_p تغییر شکل فنر در لحظه تسلیم می باشد. لازم به ذکر است، با توجه به اساس صرفاً ریاضیاتی (و نه مبتنی بر مفاهیم مکانیک) فرمول بندی ارائه شده، هر مقدار دلخواه برای α اختیار گردد، روش پیشنهادی بدون کاستی و با دقت زیاد قادر به رهگیری نمودار پاسخ زمانی آن خواهد بود.

در سیستم های غیرخطی، عواملی مانند سختی متغیر فنر یا میرایی وابسته به سرعت می توانند منجر به پدیده هایی مانند تشدید غیرخطی یا رفتار آشوبی شوند که پیش بینی آن ها با روش های تحلیلی ساده امکان پذیر نیست. این ویژگی در کاربردهای مهندسی زلزله اهمیت زیادی دارد، زیرا سازه ها اغلب تحت بارهای لرزه ای وارد ناحیه غیرارتجاعی می شوند و نیاز به مدل سازی دقیق برای ارزیابی ایمنی دارند. علاوه بر آن، روش های عددی مانند روش ارائه شده در پژوهش حاضر، می توانند اثرات غیرخطی را با دقت

$$\begin{aligned} \dot{u}(t_i) &= \dot{u}_i, & \dot{u}(t_{i+1}) &= \dot{u}_{i+1}, \\ \ddot{u}(t_i) &= \ddot{u}_i, & \ddot{u}(t_{i+1}) &= \ddot{u}_{i+1} \end{aligned} \quad (32)$$

مقادیر این ضرایب محاسبه می شود. سپس، با جایگزین کردن $t_{i+\lambda} = t_i + \lambda h$ در تابع (۳۱) جملات تابع درون یاب بازچینی و مرتب می گردد تا ضرایب درون یاب A, B, C, D را به دست آمده و نهایتاً به فرم لاگرانژی ارائه گردند. سایر درون یاب ها نیز به روشی مشابه فرمول بندی و ساخته می شوند.

۳-۴- چند جمله ای های سری تیلور

جهت شروع فرایند تکرار با معادلات انتگرال گیری ضمنی روابط (۳۳) و (۳۴)، یک تخمین اولیه از تغییر مکان و سرعت در لحظه t_{i+1} مورد نیاز است و یا اینکه بایستی مقادیر آن ها را در شروع حلقه تکرار صفر در نظر گرفت. تخمین دقیق این مؤلفه ها تعداد تکرارها را کاهش می دهد و سرعت همگرایی الگوریتم را نیز تسریع می کند. بنابراین، تقریب هایی با سری تیلور برش خورده برای تخمین اولیه مقادیر پاسخ ارائه می شوند:

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i \quad (33)$$

$$u_{i+1} = u_i + [\dot{u}_i h] \quad (34)$$

$$u_{i+1} = u_i + \left[\dot{u}_i h + \frac{1}{2} \ddot{u}_i h^2 \right] \quad (35)$$

این روابط قبل از شروع فرایند تکرار در الگوریتم ارائه شده، استفاده می شوند. معادلات، روابط و فرمول های ارائه شده مبانی و مفاهیم روش جدید گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه ای را تشکیل می دهند. این روش قابلیت تحلیل سیستم های خطی و غیرخطی را خواهد داشت. الگوریتم نظام مند غیرخطی و خطی این روش به ترتیب در جداول (۲) و (۳) ارائه شده است.

۳-۵- مدل سازی های عددی

در این بخش، دو مدل عددی برای مقایسه روش جدید با سایر روش های

1. MATLAB Software
2. El-Centro earthquake
3. Magnitude Surface Wave

جدول ۲. الگوریتم روش گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای برای تحلیل دینامیکی سیستم‌های سازه‌ای غیرخطی یک درجه آزادی

Table 2. GLH-3P algorithm for dynamic analysis of nonlinear SDOF systems.

<p>(۱) مقداردهی اولیه با $i = 1$</p> <p>$t_1 = 0$, $\dot{u}_1 = \dot{u}(t_1)$, $u_1 = u(t_1)$, $F_{D,1} = F_D(\dot{u}_1)$, $F_{S,1} = F_S(u_1)$, $\ddot{u}_1 = -m^{-1}(ma_{g,1} + F_{S,1} + F_{D,1})$</p> <p>(۲) مقداردهی مؤلفه‌های زیر:</p> <p>- پارامترهای موقعیت مکانی نقاط میان‌گامی:</p> $\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) , \quad \kappa = \frac{1}{2} , \quad \eta = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}} \right)$ <p>- ضرایب فرمول‌های درون‌یابی هرمیت: ضرایب مورد استفاده برای محاسبه سرعت و تغییر مکان در جدول (۱)</p> <p>(۳) مقادیر شتاب زمین را در میان‌گام‌ها محاسبه کنید:</p> $a_{g,i+\lambda} = (1-\lambda)a_{g,i} + \lambda a_{g,i+1}$ $a_{g,i+\kappa} = (1-\kappa)a_{g,i} + \kappa a_{g,i+1}$ $a_{g,i+\eta} = (1-\eta)a_{g,i} + \eta a_{g,i+1}$ <p>(۴) پاسخ سیستم را در نقطه انتهایی تخمین بزنید (یا همه آن‌ها را صفر قرار دهید):</p> $u_{i+1} = u_i + \left[\dot{u}_i h + \frac{1}{2} \ddot{u}_i h^2 \right] , \quad \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [\ddot{u}_i h] , \quad \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i$ <p>(۵) روابط زیر را تا زمانی که x^{i+1} تا ارقام مورد نظر تثبیت شود، تکرار کنید:</p> <p>- محاسبه پاسخ گام‌های میانی با استفاده از فرمول درون‌یابی هرمیت:</p> $\dot{u}_{i+\lambda} \cong (A\dot{u}_i + B\dot{u}_{i+1}) + h(C\ddot{u}_i - D\ddot{u}_{i+1}) , \quad u_{i+\lambda} \cong (Gu_i + Hu_{i+1}) + h(I\dot{u}_i - J\dot{u}_{i+1}) + h^2(K\ddot{u}_i + L\ddot{u}_{i+1})$ $\dot{u}_{i+\kappa} \cong E(\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}) + Fh(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i+1}) , \quad u_{i+\kappa} \cong M(u_i + u_{i+1}) + Nh(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) + Oh^2(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$ $\dot{u}_{i+\eta} \cong (B\dot{u}_i + A\dot{u}_{i+1}) + h(D\ddot{u}_i - C\ddot{u}_{i+1}) , \quad u_{i+\eta} \cong (Hu_i + Gu_{i+1}) + h(J\dot{u}_i - I\dot{u}_{i+1}) + h^2(L\ddot{u}_i + K\ddot{u}_{i+1})$ <p>- محاسبه نیرو در اجزاء سیستم:</p> $F_{D,i+\lambda} = F_D(\dot{u}_{i+\lambda}) , \quad F_{S,i+\lambda} = F_S(u_{i+\lambda})$ $F_{D,i+\kappa} = F_D(\dot{u}_{i+\kappa}) , \quad F_{S,i+\kappa} = F_S(u_{i+\kappa})$ $F_{D,i+\eta} = F_D(\dot{u}_{i+\eta}) , \quad F_{S,i+\eta} = F_S(u_{i+\eta})$ <p>- به‌روزرسانی مقادیر شتاب سیستم:</p> $\ddot{u}_{i+\lambda} = -m^{-1}(ma_{g,i+\lambda} + F_{S,i+\lambda} + F_{D,i+\lambda})$ $\ddot{u}_{i+\kappa} = -m^{-1}(ma_{g,i+\kappa} + F_{S,i+\kappa} + F_{D,i+\kappa})$ $\ddot{u}_{i+\eta} = -m^{-1}(ma_{g,i+\eta} + F_{S,i+\eta} + F_{D,i+\eta})$ $\ddot{u}_{i+1} = -m^{-1}(ma_{g,i+1} + F_{S,i+1} + F_{D,i+1})$ <p>- به‌روزرسانی مقادیر تغییر مکان و سرعت در لحظه t^{i+1} با استفاده از فرمول‌های گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای:</p> $\dot{u}_{i+1} \cong \dot{u}_i + h \left(\frac{5}{18} \ddot{u}_{i+\lambda} + \frac{4}{9} \ddot{u}_{i+\kappa} + \frac{5}{18} \ddot{u}_{i+\eta} \right)$ $u_{i+1} \cong u_i + h \left(-\frac{1}{10} \dot{u}_i + \frac{25}{63} \dot{u}_{i+\lambda} + \frac{128}{315} \dot{u}_{i+\kappa} + \frac{25}{63} \dot{u}_{i+\eta} - \frac{1}{10} \dot{u}_{i+1} \right) + h^2 \left(-\frac{1}{140} \ddot{u}_i + \frac{1}{140} \ddot{u}_{i+1} \right)$ <p>(۶) مقدار $i = i + 1$ قرار داده و مراحل ۳ تا ۶ را برای گام بعدی تکرار کنید.</p> <p>• به‌طور متعارف فرض می‌شود که $F_D = F_D(\dot{u})$ و $F_S = F_S(u)$ است.</p>	
---	--

جدول ۳. الگوریتم روش گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای برای تحلیل دینامیکی سیستم‌های سازه‌ای خطی یک درجه آزادی.

Table 3. GLH-3P algorithm for dynamic analysis of linear SDOF system.

(۱) مقداردهی اولیه با $i = 1$:

$$t_1 = 0, \quad \dot{u}_1 = \dot{u}(t_1), \quad u_1 = u(t_1), \quad \ddot{u}_1 = -(a_{g,1} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_1 + \omega_n^2 u_1)$$

(۲) مقداردهی مؤلفه‌های زیر:

- پارامترهای موقعیت مکانی نقاط میان گامی:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right), \quad \kappa = \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}} \right)$$

- ضرایب فرمول‌های درون‌یابی هرمیت: ضرایب مورد استفاده برای محاسبه سرعت و تغییر مکان در جدول (۱)

(۳) مقادیر شتاب زمین را در میان گام‌ها محاسبه کنید:

$$a_{g,i+\lambda} = (1-\lambda)a_{g,i} + \lambda a_{g,i+1}$$

$$a_{g,i+\kappa} = (1-\kappa)a_{g,i} + \kappa a_{g,i+1}$$

$$a_{g,i+\eta} = (1-\eta)a_{g,i} + \eta a_{g,i+1}$$

(۴) پاسخ سیستم را در نقطه انتهایی تخمین بزنید (یا همه آن‌ها را صفر قرار دهید):

$$u_{i+1} = u_i + \left[\dot{u}_i h + \frac{1}{2} \ddot{u}_i h^2 \right], \quad \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [\ddot{u}_i h], \quad \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i$$

(۵) روابط زیر را تا زمانی که x_{i+1} تا ارقام مورد نظر تثبیت شود، تکرار کنید:

- محاسبه پاسخ گام‌های میانی با استفاده از فرمول درون‌یابی هرمیت:

$$\dot{u}_{i+\lambda} \cong (A\dot{u}_i + B\dot{u}_{i+1}) + h(C\ddot{u}_i - D\ddot{u}_{i+1}), \quad u_{i+\lambda} \cong (Gu_i + Hu_{i+1}) + h(I\dot{u}_i - J\dot{u}_{i+1}) + h^2(K\ddot{u}_i + L\ddot{u}_{i+1})$$

$$\dot{u}_{i+\kappa} \cong E(\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}) + Fh(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i+1}), \quad u_{i+\kappa} \cong M(u_i + u_{i+1}) + Nh(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) + Oh^2(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$$

$$\dot{u}_{i+\eta} \cong (B\dot{u}_i + A\dot{u}_{i+1}) + h(D\ddot{u}_i - C\ddot{u}_{i+1}), \quad u_{i+\eta} \cong (Hu_i + Gu_{i+1}) + h(J\dot{u}_i - I\dot{u}_{i+1}) + h^2(L\ddot{u}_i + K\ddot{u}_{i+1})$$

- به‌روزرسانی مقادیر شتاب سیستم:

$$\ddot{u}_{i+\lambda} = -(a_{g,i+\lambda} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+\lambda} + \omega_n^2 u_{i+\lambda})$$

$$\ddot{u}_{i+\kappa} = -(a_{g,i+\kappa} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+\kappa} + \omega_n^2 u_{i+\kappa})$$

$$\ddot{u}_{i+\eta} = -(a_{g,i+\eta} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+\eta} + \omega_n^2 u_{i+\eta})$$

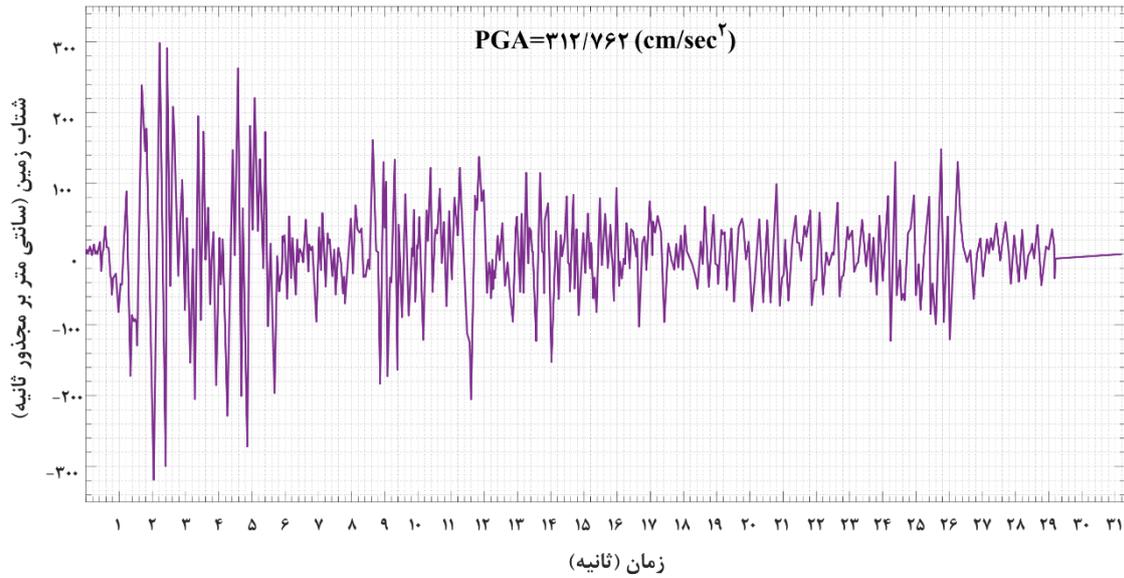
$$\ddot{u}_{i+1} = -(a_{g,i+1} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+1} + \omega_n^2 u_{i+1})$$

- به‌روزرسانی مقادیر تغییر مکان و سرعت در لحظه t_{i+1} با استفاده از فرمول‌های گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای:

$$\dot{u}_{i+1} \cong \dot{u}_i + h \left(\frac{5}{18} \ddot{u}_{i+\lambda} + \frac{4}{9} \ddot{u}_{i+\kappa} + \frac{5}{18} \ddot{u}_{i+\eta} \right)$$

$$u_{i+1} \cong u_i + h \left(-\frac{1}{10} \dot{u}_i + \frac{25}{63} \dot{u}_{i+\lambda} + \frac{128}{315} \dot{u}_{i+\kappa} + \frac{25}{63} \dot{u}_{i+\eta} - \frac{1}{10} \dot{u}_{i+1} \right) + h^2 \left(-\frac{1}{140} \ddot{u}_i + \frac{1}{140} \ddot{u}_{i+1} \right)$$

(۶) مقدار $i = i + 1$ قرار داده و مراحل ۳ تا ۶ را برای گام بعدی تکرار کنید.



شکل ۳. رکورد زلزله ال-سنترو مورد استفاده در بارگذاری سیستم‌های سازه‌ای.

Fig. 3. El-Centro earthquake ground motion record utilized for the loading of structural systems.

جدول ۴. مشخصات سیستم‌های خطی و غیرخطی در مدل‌سازی عددی.

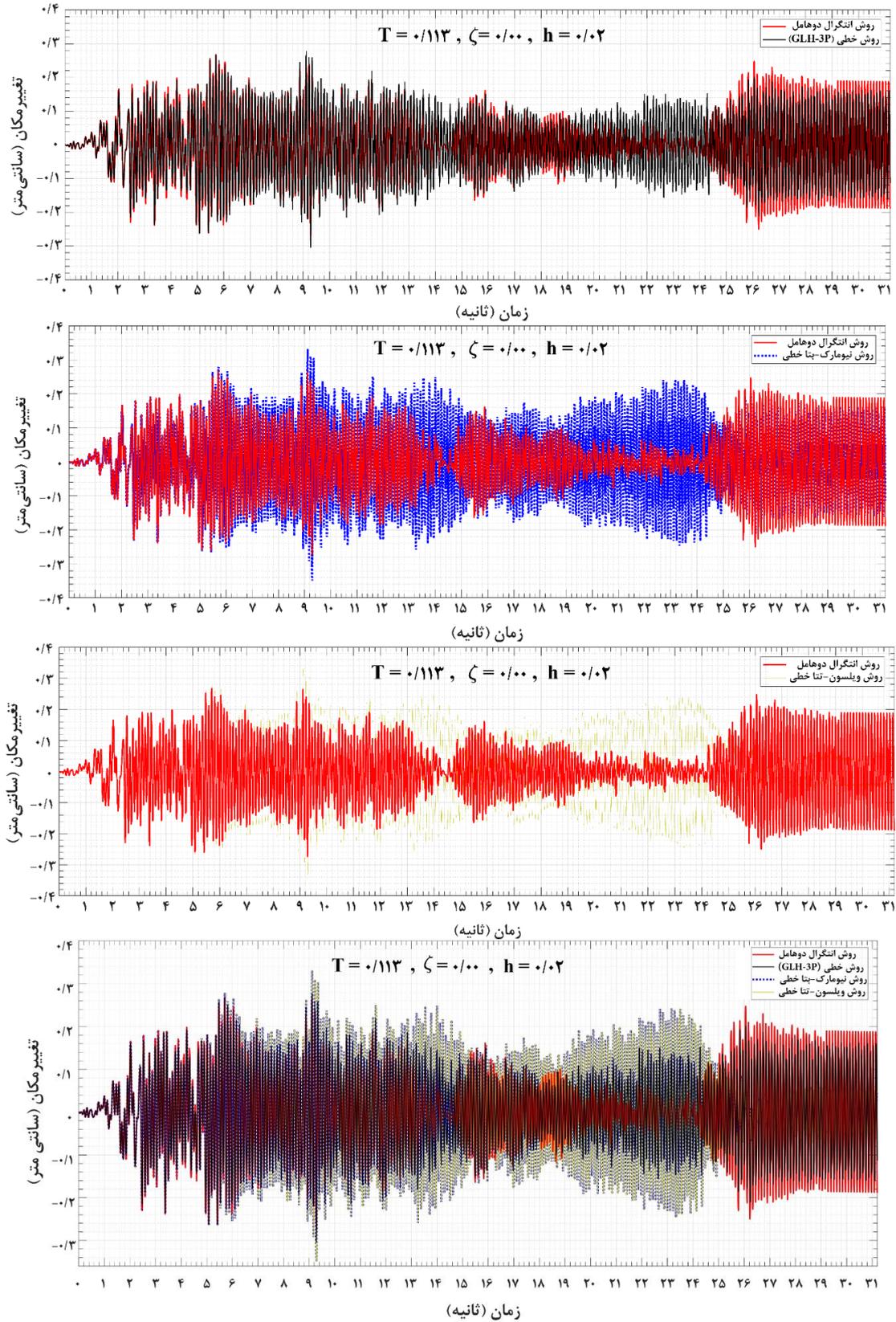
Table 4. Properties of linear and nonlinear systems in numerical models.

مقادیر عددی	مشخصات سیستم
دوم	مدل‌سازی‌های عددی
غیرخطی	نوع سیستم
میرا	نوع میرایی
۰/۴۵۵۹۴	جرم $[11]$ (kN.sec ² /cm)
۰/۰۸	دوره تناوب (پریود) طبیعی (ثانیه)
۰/۰۲	نسبت میرایی
۲۸۱۲/۴۶۷	ثابت فنر (kN/cm)
۰/۰۲	گام زمانی رکورد زلزله (sec)
۰/۰۲	گام زمانی تحلیل (sec)

با روش‌های انتگرال دوهمال، گاوس-لژاندر-هرمیت-سه‌نقطه‌ای، نیومارک و ویلسون محاسبه شده که در شکل (۴) نشان داده شده است. بدیهی است که روش جدید قادر به محاسبه دقیق‌تر منحنی پاسخ با گام زمانی تحلیل $h = 0.02$ sec می‌باشد. همچنین، با علم به اینکه روش انتگرال دوهمال بسیار دقیق عمل می‌کند؛ اما با این وجود، این روش زمان‌بر می‌باشد. روش ارائه شده پاسخ‌های بسیار نزدیک به روش انتگرال دوهمال ارائه می‌دهند و بسیار سریع‌تر از آن عمل می‌کند. این در حالی است که روش نیومارک-

بالا شبیه‌سازی کنند و امکان بررسی حالات واقعی مانند زوال مصالح را فراهم آورند.

۳-۵-۱- بررسی مدل‌سازی اول: سیستم خطی تحت اثر زلزله ال-سنترو
 یک سیستم یک درجه آزادی نامیرای خطی تحت تحریک زلزله ال-سنترو مورد تحلیل و ارزیابی قرار گرفته است. این سیستم در لحظه آغازین، از مبدأ مختصات و از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. پاسخ سیستم خطی



شکل ۴. پاسخ لرزه‌ای تغییر مکان-زمان سیستم خطی در مدل اول.

Fig. 4. Time-history of seismic displacement for the linear system in Model I.

بتا و ویلسون-تتا دارای انحراف قابل ملاحظه‌ای نسبت به انتگرال دوهمال می‌باشد. این خطای زیاد در روش‌های رایج به دلیل تغییر زمان تناوب سیستم از زمان تناوب واقعی آن در حین اجرای این الگوریتم‌ها رخ می‌دهد و غالباً در زمان تناوب‌های کمتر از ۰/۲ ثانیه عارض می‌شود. خطای حاضر در مراجع [۱۴، ۶۰] به خطای شیفت فاز معروف است. از آنجایی که سیستم‌های سازه‌ای اغلب دارای زمان تناوب‌های بزرگ‌تر از ۰/۱ ثانیه هستند، در عمل این خطا کمتر مورد توجه قرار می‌گیرد؛ اما برای محک‌زدن فرمول‌بندی‌ها بسیار حائز اهمیت می‌باشد.

خلاصه‌ای از نتایج عددی تحلیل‌های مدل‌سازی اول در جدول (۵) ارائه شده است. این جدول شامل مقادیر حداکثر پاسخ، زمان تحلیل، مجذور میانگین مربعات (RMS^۲) و اختلاف مقدار مؤثر از پاسخ مرجع انتگرال دوهمال گزارش شده است. این جدول اطلاعات لازم برای مقایسه عملکرد سه روش نیومارک، ویلسون، و گاوس لژاندر سه نقطه‌ای را فراهم می‌کند. همچنین می‌تواند شاخصی جهت تعیین میزان برتری، هم‌گرایی، دقت و سرعت اجرای روش‌های مورد مقایسه مذکور باشد. نتایج ارزیابی در شکل (۴) نشان می‌دهد که روش ارائه شده دقت و هم‌گرایی بالایی دارد. پروفایل کلی پاسخ که شامل موقعیت و مقادیر بحرانی پاسخ در منحنی می‌باشد، در روش جدیدی پیشنهادی، نشان‌دهنده همخوانی و تطابق قابل توجهی با منحنی پاسخ دقیق‌تر می‌باشد. این منحنی دقیق‌تر با رنگ قرمز در نمودارها مشخص شده و به عنوان معیاری برای مقایسه عملکرد روش‌های مختلف تحلیلی به کار می‌رود. در مقابل، پاسخ‌های حاصل از روش‌های متداول نیومارک و ویلسون، به ویژه در بازه زمانی ۶ تا ۲۵ ثانیه، انحرافات معناداری را از این پاسخ دقیق نشان می‌دهند. این انحرافات، دقت و اعتبار تحلیل‌های انجام شده با استفاده از این روش‌ها را کاهش داده و به روش‌هایی نامطمئن و خطا پذیر تبدیل می‌کند.

۳-۵-۲- بررسی مدل‌سازی سری دوم: سیستم غیرخطی تحت اثر زلزله ال-سنترال

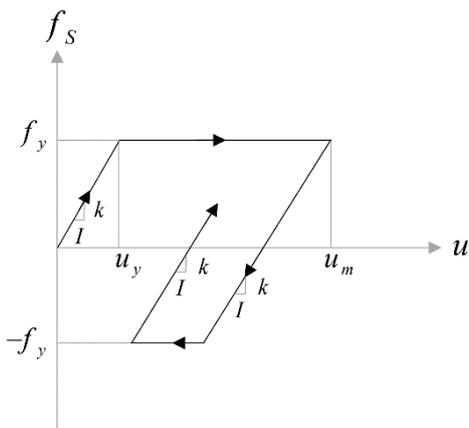
در این بخش سیستم غیرخطی تحت اثر رکورد بارگذاری ال-سنترال مورد تحلیل و ارزیابی قرار گرفته است. برای شناسایی رفتار غیرخطی مؤلفه فنر، ابتدا باید حداکثر تغییر مکان سیستم با رفتار خطی را محاسبه شود. برای حصول به برآوردی دقیق‌تر در این تحلیل، پاسخ خطی را با گام ریزتر $h = 0.002 \text{ sec}$ ، محاسبه می‌شود و تغییر شکل بیشینه الاستیک

$$f_s = k u_{\max, \text{elastic}} = 2812 / 467 \times 0.0956518 \text{ cm} = 269 / 0.175 \text{ kN} \quad (36)$$

که در آن با فرض $\mu = 0.4$ ، می‌توان نیروی تسلیمی فنر سیستم را به صورت زیر نوشت:

$$f_y = \mu f_s = 0.4 \times 269 / 0.175 = 107 / 0.670 \text{ kN} \quad (37)$$

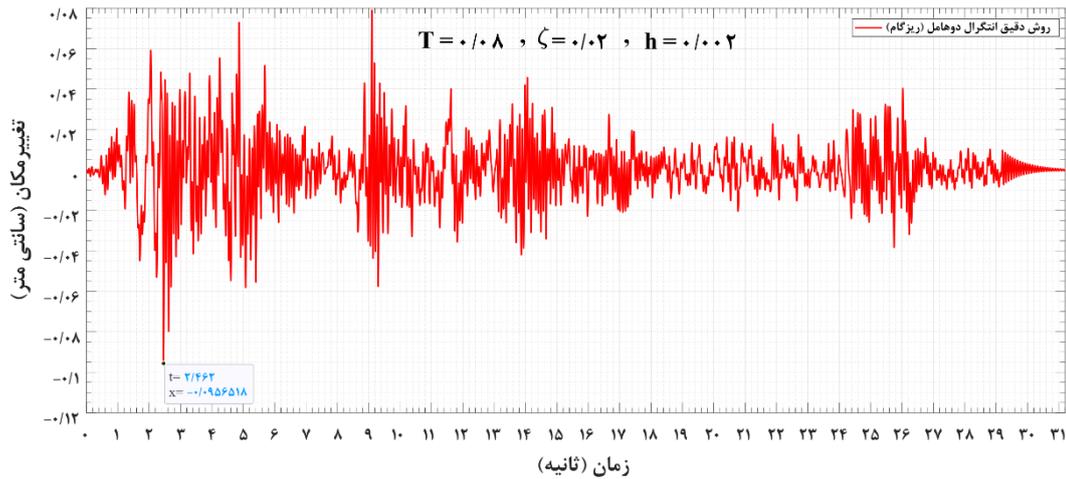
منحنی رفتار غیرخطی فنر در سیستم مورد بررسی در شکل (۵) معرفی می‌شود. شکل (۷) نیز پاسخ‌های غیرخطی به دست آمده از روش ارائه شده را با روش‌های غیرخطی نیومارک-بتا و ویلسون-تتا مقایسه می‌کند. به علاوه، منحنی رفتار هیترزیس سیستم غیرخطی در شکل (۸) ارائه شده است.



شکل ۵. مدل رفتاری الاستوپلاستیک نیرو-تغییر شکل فنر در مدل دوم.

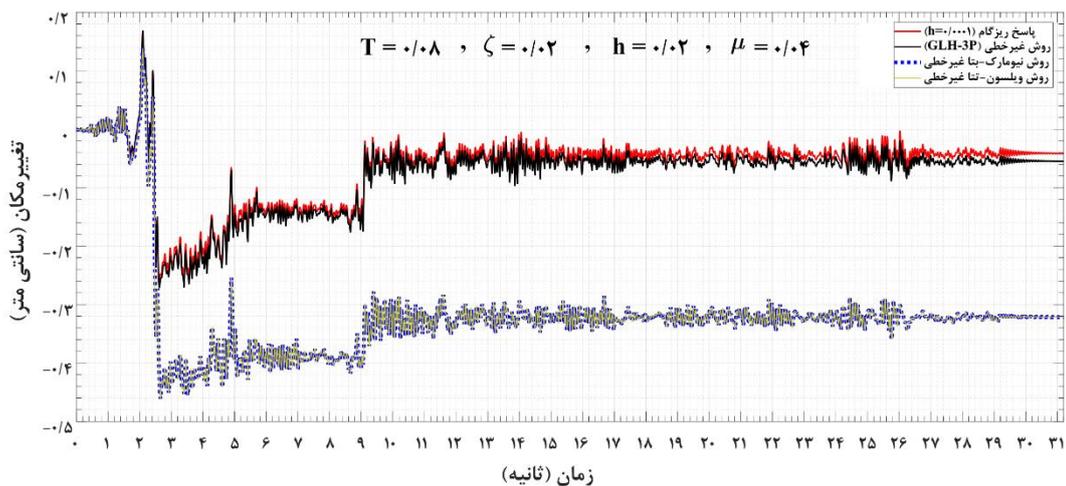
Fig. 5. Force-displacement elasto-plastic behavior of the spring in Model II.

1. Phase shift error
2. Root mean square



شکل ۶. پاسخ لرزه‌ای ریزگام تغییرمکان-زمان سیستم خطی در مدل دوم

Fig. 6. Detailed fine mesh displacement time-history for the linear system (Model II).

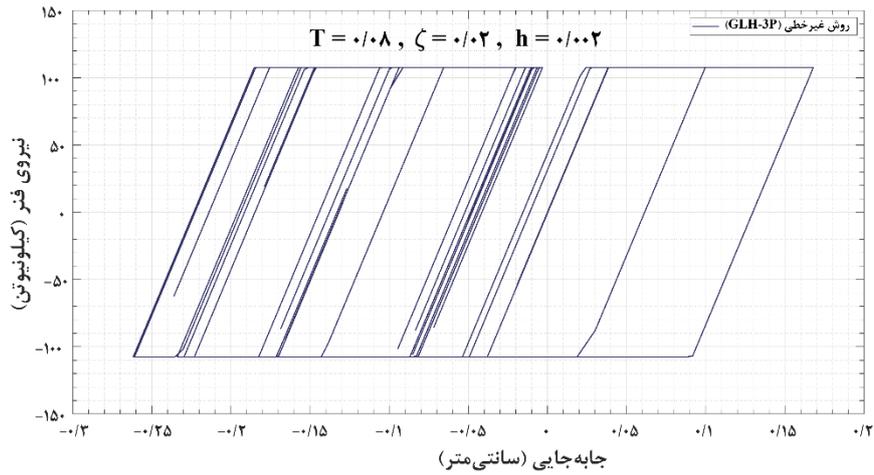


شکل ۷. پاسخ لرزه‌ای تغییرمکان-زمان سیستم غیرخطی در مدل دوم.

Fig. 7. Time-history of seismic displacement for the nonlinear system in Model II.

می‌شود. این امر در صورتی است که روش نیومارک-بتا به یک سری عملیات معکوس‌سازی برای فرمول‌بندی ضمنی نیاز داشته باشد. باتوجه به شکل (۸) می‌توان دریافت، این روش نه تنها در محاسبه پاسخ‌های گذرا سیستم‌های غیرخطی کارآمد است، بلکه پایداری عددی بالاتری را در بازه‌های وسیع مؤلفه‌ای فراهم می‌آورد. به‌طور خاص، در مقایسه با منحنی‌های دیگر (که شیب‌های ملایم‌تری نشان می‌دهند و نقاط پرش را صاف‌سازی می‌کنند)،

نتایج به‌دست‌آمده به‌وضوح نشان می‌دهد، تطابق بهتری بین پاسخ به‌دست‌آمده از روش ارائه‌شده و پاسخ حاصل از تحلیل دقیق وجود دارد. این نتایج در جدول (۶) ارائه‌شده است. مقادیر اوج نمودار تغییر مکان نیز مشابهت بالایی با منحنی دقیق دارد. روش ارائه‌شده در مقایسه با روش نیومارک-بتا از دقت بالایی برای محاسبه اندازه گام $h = 0.02 \text{ sec}$ برخوردار می‌باشد. از طرفی در روش ارائه‌شده نیازی به عملیات وارون ماتریس در چرخه تکرار نیست؛ زیرا صرفاً از مقادیر قبلی برای به‌روزرسانی پاسخ استفاده



شکل ۸. منحنی رفتار هیستریزس جابجایی-نیروی فنر در سیستم غیرخطی در مدل دوم.

Fig. 8. Force-displacement hysteresis behavior curve of the spring in the nonlinear system (Model II).

جدول ۵. مقادیر حداکثر پاسخ، زمان تحلیل، و اختلاف از پاسخ دقیق سیستم خطی یک درجه آزادی در مدل اول.

Table 5. Peak response, RMS values, and error relative to exact solution for linear SDOF system (Model I).

مؤلفه‌های ارزیابی	انتگرال دوهمال (دقت-بالا)	گاوس لژاندر هرमित سه نقطه‌ای (روش ارائه شده)	نیومارک-بتا (روش گام‌به‌گام)	ویلسون-تتا (روش گام‌به‌گام)
تغییر مکان نسبی بیشینه (cm)	۰/۲۷۳۱	۰/۳۰۳۹	۰/۳۴۹۵	۰/۳۴۹۵
سرعت نسبی بیشینه (cm/sec)	---	۱۵/۴۰۰۹	۱۷/۹۳۱۱	۱۷/۹۳۱۱
شتاب نسبی بیشینه (cm/sec ^۲)	---	۸۴۲/۶۰۱۶	۹۶۹/۸۵۶۷	۹۶۹/۸۵۶۷
تعداد گام تکرار شونده	۱/۰۰۰۰	۱۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰
مجذور میانگین مربعات (RMS)	۰/۱۳۴۱	۰/۱۳۹۹	۰/۱۵۹۳۵	۰/۱۵۹۴
اختلاف مجذور میانگین مربعات از دقت-بالا	۰/۰۰۰۰	۴/۳۲۵۰	۱۸/۷۹۰۰	۱۸/۷۹۰۰
زمان تحلیل (sec)	۰/۲۷۳۱	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۲۳

روش پیشنهادی می‌تواند نوسانات بسامد بالا را بدون ناپایداری^۱ جذب کند، که این ویژگی برای کاربردهایی مانند شبیه‌سازی ارتعاشات غیرخطی مهم بوده و به‌عنوان شواهدی تجربی، بر پتانسیل روش جدید در حل چالش‌های عددی پیچیده تأکید دارد.

دقیق روش‌های ارزیابی شده در مدل‌های اول و دوم به‌ترتیب در جدول (۵) و جدول (۶) خلاصه شده‌اند. باتوجه به جدول (۵)، در ارزیابی سیستم‌های خطی روش نیومارک-بتا سریع‌ترین و انتگرال دوهمال دقیق‌ترین روش می‌باشند. در جدول (۶) نیز همانند مورد قبلی، در ارزیابی سیستم‌های غیرخطی برای حل معادلات حرکت، روش ارائه شده از نظر سرعت هم‌پای روش نیومارک-بتا نمی‌باشد؛ اما از نظر دقت بسیار دقیق و با خطای کمتری نسبت به روش دقیق عمل می‌کند. درحالی که خطای سیستم روش نیومارک-بتا غیرخطی بسیار زیاد و غیرقابل قبول می‌باشد. باتوجه به مزایای ذکر شده، روش ارائه شده برای حل معادلات دیفرانسیل سیستم‌های غیرخطی بسیار مناسب می‌باشد.

۴- تحلیل نتایج و جمع‌بندی

مقادیر حداکثر پاسخ (تغییر مکان، سرعت و شتاب بیشینه)، زمان تحلیل، مجذور میانگین مربعات و درصد اختلاف مجذور میانگین مربعات از پاسخ

1. Instability

جدول ۵. مقادیر حداکثر پاسخ، زمان تحلیل، و اختلاف از پاسخ دقیق سیستم غیرخطی یک درجه آزادی در مدل دوم.

Table 5. Peak response, RMS values, and error relative to exact solution for nonlinear SDOF system (Model II).

مؤلفه‌های ارزیابی	پاسخ ریزگام (دقت-بالا)	گوس لژاندر هرمیت سه نقطه‌ای (روش ارائه شده)	نیومارک-بتا (روش گام به گام)	ویلسون-تتا (روش گام به گام)
تغییر مکان نسبی بیشینه (cm)	۰/۲۶۱۸	۰/۲۶۹۷	۰/۴۶۱۲	۰/۴۶۱۳
سرعت نسبی بیشینه (cm/sec)	۵/۷۶۱۱	۵/۶۹۷۲	۷/۱۸۱۵	۷/۱۸۱۲
شتاب نسبی بیشینه (cm/sec ^۲)	۳۱۲/۳۶۸۹	۲۵۱/۰۰۵۴	۳۱۲/۳۹۱۵	۳۱۲/۳۲۹۶
تعداد گام تکرار شونده	۱۰/۰۰۰۰	۱۰/۰۰۰۰	۱۰/۰۰۰۰	۱۰/۰۰۰۰
مجذور میانگین مربعات (RMS)	۰/۰۸۷۹	۰/۱۰۳۹	۰/۳۲۸۰	۰/۳۲۷۸
اختلاف مجذور میانگین مربعات از دقت-بالا	۰/۰۰۰۰	۱۸/۳۳۷۰	۲۷۳/۴۶۲۰	۲۷۳/۳۴۸۰
زمان تحلیل (sec)	۰/۳۷۵۲	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۹۵	۰/۰۰۱۲

عملکرد این روش جدید به طور عملی در دو مثال عددی مورد محک و مقایسه قرار گرفت. مشاهده گردید که به طور کمی، روش ارائه شده خطای مجذور میانگین مربعات را در سیستم‌های خطی به ۴٪ (حدود ۱۸٪ در روش نیومارک) و در سیستم‌های غیرخطی به ۱۸٪ (حدود ۲۷۳٪ در روش نیومارک) کاهش می‌دهد. از مهم‌ترین مزایای روش ارائه شده، عدم تغییر در فرمول‌بندی برای تحلیل سیستم‌های خطی و غیرخطی می‌باشد. به عبارتی، برخلاف روش نیومارک-بتا، روش ارائه شده مکانیسم جداگانه‌ای را برای تحلیل سیستم‌های خطی استفاده نمی‌کند. از طرفی، نتایج ارزیابی و مقایسه روش ارائه شده نشان می‌دهد که این روش به طور رضایت‌بخشی پاسخ لرزه‌ای سیستم‌های یک درجه آزادی میرایی خطی و غیرخطی را محاسبه می‌کند. براین اساس، روش پیشنهادی می‌تواند به عنوان یک ابزار تحلیلی قابل اعتماد در محاسبه اثرات لرزه‌ای و تحلیل تاریخچه زمانی برای سیستم‌های میرایی خطی و غیرخطی معرفی گردد. مزایای روش ارائه شده را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

- ۱) روش پیشنهادی زمان محاسباتی کمتری نسبت به انتگرال دوهمال و روش نیومارک-بتا دارد.
- ۲) روش ارائه شده از نظر دقت، پایداری و هم‌گرایی در مقایسه با روش‌های مورد بررسی بهتر عمل می‌کند.
- ۳) روش جدید در شرایط یکسان بهتر از سایر روش‌ها قادر به تشخیص نقاط پرش در منحنی پاسخ می‌باشد.
- در برابر این مزایا، معایبی نیز می‌توان به این روش متصور بود. معایب روش ارائه شده را نیز می‌توان چنین برشمرد:

این روش از نظر دقت بسیار دقیق بوده و می‌تواند پاسخ سیستم‌های غیرخطی با رفتار پیچیده را با دقت بالایی محاسبه کند. در مقابل، روش نیومارک-بتا در سیستم‌های غیرخطی بسیار ناپایدار است و نمی‌تواند پاسخ دقیق و مطلوبی را ارائه دهد. میزان خطای مجذور میانگین مربعات روش ارائه شده در مدل‌سازی اول نسبت به مقدار دقیق حاصل از انتگرال دوهمال کم بوده و حدوداً ۴٪ است. اما این میزان خطا در روش نیومارک بیش از ۱۸٪ می‌باشد که این امر نشان از برتری روش ارائه شده در تحلیل خطی می‌باشد. در سیستم‌های غیرخطی نیز همان‌طور که پیش‌بینی می‌شد روش ارائه شده بهتر عمل می‌کند. به طوری که خطای مجذور میانگین مربعات روش جدید حدوداً ۱۸٪ است؛ ولی خطای روش نیومارک و ویلسون بیش از ۲۷۳٪ می‌باشد که در عمل نتایج آنها مردود و غیر قابل اعتماد بوده و دارای خطای قابل ملاحظه‌ای است. نکته بسیار حائز اهمیت در شکل (۸) این است که روش جدید پیشنهادی در شرایط یکسان و با طول گام تحلیل یکسان، قادر است نقاط پرش در منحنی پاسخ را با دقت بیشتری نسبت به سایر روش‌های رایج تشخیص دهد. این روش از نظر دقت بسیار دقیق بوده و می‌تواند پاسخ سیستم‌های غیرخطی را با دقت بالایی محاسبه کند.

۵- نتیجه گیری

در پژوهش حاضر، یک فرمول‌بندی عددی ساده و کارآمد تحت عنوان روش گوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای برای تحلیل تاریخچه زمانی سیستم‌های خطی و غیرخطی یک درجه آزادی ارائه شد. انتگرال‌گیر و درونیاب‌های دومتخته برای این فرمول‌بندی استخراج و معرفی گردید.

- [9] R.R. Craig Jr, A.J. Kurdila, Fundamentals of structural dynamics, 2nd ed., John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, UK, 2006.
- [10] P.L. Gatti, Applied structural and mechanical vibrations: Theory and Methods, 2nd ed., CRC Press (Taylor & Francis Group), London, UK, 2014.
- [11] A. Chopra, Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 4th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2012.
- [12] M. Géradin, D.J. Rixen, Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics, 3rd ed., John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, UK, 2014.
- [13] J.T. Katsikadelis, Dynamic Analysis of Structures: Theory and Application, 2nd ed., Symmetria Publications, Athens, Greece, 2012.
- [14] P. Mario, W. Leigh, Structural dynamics: Theory and computation, 5th ed., Springer, New York, USA, 2004.
- [15] S.S. Rao, Mechanical Vibrations in SI Units, 2nd ed., Pearson Higher Ed, London, UK, 2017.
- [16] J.W. Tedesco, W.G. McDougal, C.A. Ross, Structural Dynamics: Theory and Applications, First ed., Addison Wesley Longman, Menlo Park, California, USA, 1999.
- [17] H.M. Hilber, T.J. Hughes, R.L. Taylor, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 5(3) (1977) 283-292. <https://doi.org/10.1002/EQE.4290050306>
- [18] L. Brusa, L. Nigro, A one-step method for direct integration of structural dynamic equations, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15(5) (1980) 685-699. <https://doi.org/10.1002/nme.1620150506>
- [19] O. Zienkiewicz, W. Wood, N. Hine, R. Taylor, A unified set of single step algorithms. Part 1: General formulation and applications, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 20(8) (1984) 1529-1552. <https://doi.org/10.1002/nme.1620200814>
- [20] W. Wood, A unified set of single step algorithms. Part 2: Theory, International journal for numerical methods
- (۱) در تحلیل سیستم‌های بسامد بالا روش پیشنهادی دارای هزینه محاسباتی بالا و نیازمند انجام حلقه‌های تکرار بیشتری می‌باشد.
- (۲) فرمول‌بندی حاضر دارای پیچیدگی ظاهری بیشتری است که ممکن است توسط افراد مبتدی به‌سادگی قابل‌بیاده‌سازی نباشد.
- نهایتاً، مطالعات بیشتر جهت توسعه، بهبود و ارتقا روش ارائه‌شده برای محاسبه پاسخ لرزه‌ای تاریخچه زمانی در حال انجام می‌باشد که در کارهای پیش‌رو ارائه خواهند شد.

منابع

- [1] K.-J. Bathe, Finite element procedures, 2nd ed., Prentice Hall, New Jersey, USA, 1996.
- [2] R. Clough, J. Penzien, Dynamics of Structures, 3rd ed., Computers & Structures, Inc, Berkeley, California, USA, 1995.
- [3] J. Humar, Dynamics of structures, 3rd ed., CRC Press (Taylor & Francis Group), London, UK, 2012.
- [4] J. Houbolt, A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, Journal of the Aeronautical Sciences, 17(9) (1950) 540-550. <https://doi.org/10.2514/8.1722>
- [5] M. Dokainish, K. Subbaraj, A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—I. Explicit methods, Computers & Structures, 32(6) (1989) 1371-1386. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90314-3](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90314-3)
- [6] D. Karabalis, D. Beskos, Numerical methods in earthquake engineering, First ed., Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1997.
- [7] N.M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, Journal of the engineering mechanics division, 85(3) (1959) 67-94. <https://doi.org/10.1061/taceat.0008448>
- [8] A. Veletsos, N. Newmark, C. Chelapati, Deformation spectra for elastic and elastoplastic systems subjected to ground shock and earthquake motions, Proceedings of the 3rd world conference on earthquake engineering, 2(2) (1965) 663-682. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4008.8167>

- org/10.1002/nme.5291
- [30] J. Zhang, A-stable linear two-step time integration methods with consistent starting and their equivalent single-step methods in structural dynamics analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(9) (2021) 2312-2359. <https://doi.org/10.1002/nme.6623>
- [31] J. Zhang, A-stable two-step time integration methods with controllable numerical dissipation for structural dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(1) (2020) 54-92. <https://doi.org/10.1002/nme.6188>
- [32] M. Babaei, Optimized Gauss–Legendre–Hermite 2-point (O-GLH-2P) method for nonlinear time-history analysis of structures, *Meccanica*, 59(3) (2024) 305-332. <https://doi.org/10.1007/s11012-023-01752-4>
- [33] M. Babaei, M.R. Alidoost, M.R. Hanafi, A Novel Numerical Method for Nonlinear Time History Analysis of MDOF Structures: Newton-Cotes-Hermite-4Point, *Journal of Structural and Construction Engineering*, 1(1) (2023) 1-20. [In Persian]. <https://doi.org/10.22065/jsce.2023.400538.3134>
- [34] M. Babaei, M.R. Hanafi, A Novel Method for Nonlinear Time-History Analysis of Structural Systems: Improved Newton–Cotes-Hermite-5P Method, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 1(1) (2024) 1-14. <https://doi.org/10.1007/s40996-024-01345-5>
- [35] M. Babaei, M. Jalilkhani, S. Ghasemi, S. Mollaei, New Methods for Dynamic Analysis of Structural Systems under Earthquake Loads, *Journal of Rehabilitation in Civil Engineering*, 10(3) (2022) 81-99. <https://doi.org/10.22075/jrce.2021.23323.1506>
- [36] M. Hanafi, M. Babaei, P. Narjabadifam, New Formulation for dynamic analysis of nonlinear time-history of vibrations of structures under earthquake loading, *Journal of Civil and Environmental Engineering*, 28(2) (2024) 1-16. [In Persian]. <https://doi.org/10.22034/ceej.2023.54564.2209>
- in engineering, 20(12) (1984) 2303-2309. <https://doi.org/10.1002/nme.1620201210>
- [21] C. Hoff, P. Pahl, Development of an implicit method with numerical dissipation from a generalized single-step algorithm for structural dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(3) (1988) 367-385. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90053-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90053-9)
- [22] J. Chung, G.M. Hulbert, A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method, *Journal of Applied Mechanics*, 60(2) (1993) 371-375. <https://doi.org/10.1115/1.2900803>
- [23] S.Y. Chang, Studies of Newmark method for solving nonlinear systems:(I) basic analysis, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 27(5) (2004) 651-662. <https://doi.org/10.1080/02533839.2004.9670913>
- [24] K.-J. Bathe, M.M.I. Baig, On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics, *Computers & Structures*, 83(31-32) (2005) 2513-2524.
- [25] K.-J. Bathe, Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics: a simple implicit time integration scheme, *Computers & structures*, 85(7-8) (2007) 437-445. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2006.09.004>
- [26] K. Bathe, G. Noh, Insight into an implicit time integration scheme for structural dynamics, *Computers & Structures*, 90(98) (2012) 1-6. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.01.009>
- [27] G. Noh, K.-J. Bathe, Further insights into an implicit time integration scheme for structural dynamics, *Computers & Structures*, 202(1) (2018) 15-24. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.02.007>
- [28] G. Noh, K.-J. Bathe, The Bathe time integration method with controllable spectral radius: The ρ_∞ -Bathe method, *Computers & Structures*, 212(1) (2019) 299-310. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.11.001>
- [29] J. Zhang, Y. Liu, D. Liu, Accuracy of a composite implicit time integration scheme for structural dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109(3) (2017) 368-406. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.5291>

- [44] M. Hanafi, A. Abki, A. Ekinici, J.d.J.A. Baldovino, Mechanical properties of alluvium clay treated with cement and carbon fiber: relationships among strength, stiffness, and durability, *International Journal of Pavement Engineering*, 24(1) (2023) 2094928. <https://doi.org/10.1080/10298436.2022.2094928>
- [45] M.R. Hanafi, H. Rahimpour, A. Gholampour, S.H. Ghaffar, F. Moodi, H. Zarrabi, A. Fahmi, Geopolymer from Sand Washing Waste: Mechanical, Rheological, and Sustainability Perspectives, *Results in Engineering*, 1(1) (2025) 108060. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.108060>
- [46] A. Ekinici, J. Arrieta Baldovino, E. Aydın, M. Hanafi, Effect of glass fibre on the strength and durability of artificially cemented alluvial clay, *International Journal of Geotechnical Engineering*, 18(3) (2024) 275-290. <https://doi.org/10.1080/19386362.2024.2359763>
- [47] Q.H. Nguyen, M. Hanafi, J.-P. Merkl, J.-B. d'Espinose de Lacaillerie, Evolution of the microstructure of unconsolidated geopolymers by thermoporometry, *Journal of the American Ceramic Society*, 104(3) (2021) 1581-1591. <https://doi.org/10.1111/jace.17543>
- [48] M. Hanafi, I. Javed, A. Ekinici, Evaluating the strength, durability and porosity characteristics of alluvial clay stabilized with marble dust as a sustainable binder, *Results in Engineering*, 25(1) (2025) 103978. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.103978>
- [49] R. Malathy, G. Bhat, U. Dewangan, An improved iterative technique for inelastic time history analysis of single degree of freedom (SDOF) elasto-plastic system, *Journal of Building Pathology and Rehabilitation*, 7(1) (2022) 102-110. <https://doi.org/10.1007/s41024-022-00243-5>
- [50] M. Babaei, J. Farzi, Derivation of weighting rules for developing a class of A-stable numerical integration scheme: α I-(2+ 3) P method, *Journal of Difference Equations and Applications*, 29(4) (2023) 1-30. <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2219785>
- [51] M. Babaei, A Swarm-Intelligence Based Formulation for Solving Nonlinear ODEs: $\gamma\beta$ II-(2+3)P method, [37] M. Babaei, M. Jalilkhani, S. Mollaei, A Numerical Method for Estimating the Dynamic Response of Structures, *Journal of Civil and Environmental Engineering*, 55(1) (2025) 1-19. <https://doi.org/10.22034/jcee.2021.41770.1963>
- [38] F. Moodi, M.R. Hanafi, Z. Shariatinia, Toward high sustainability using fully recycled geopolymer concrete: mechanical, rheological, and microstructural properties, *RSC Advances*, 15(28) (2025) 22953-22971. <https://doi.org/10.1039/D5RA02249E>
- [39] A. Atasoy, M.B. Ghalehjoogh, A. Demirkapi, A Novel Approach to Linear and Nonlinear Time-History Analysis of Structures: Gauss–Lobatto–Hermite 4-Point (GLH-4P) Method, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 49(10) (2024) 14205-14224. <https://doi.org/10.1007/s13369-024-08808-x>
- [40] S. Mollaei, A. Fahmi, D. Jahani, Z. Babaei Golsefidi, R. Babaei, M.R. Hanafi, A Predictive Model for the Strength of a Novel Geopolymer Construction Material Produced by Autoclaved Aerated Concrete Waste, *International Journal of Sustainable Construction Engineering and Technology*, 14(1) (2023) 148-167. <https://doi.org/10.30880/ijscet.2023.14.01.015>
- [41] A. Ekinici, M. Hanafi, P.M.V. Ferreira, Influence of Initial Void Ratio on Critical State Behaviour of Poorly Graded Fine Sands, *Indian Geotechnical Journal*, 50(5) (2020) 689-699. <https://doi.org/10.1007/s40098-020-00416-4>
- [42] M.R. Hanafi, H. Rahimpour, S. Zinatloo-Ajabshir, F. Moodi, A. Fahmi, Performance enhancement, life cycle assessment, and feature analysis of wheat starch-based NaCl-binder as a sustainable alternative to OPC mortar, *Results in Engineering*, 24(1) (2024) 103281. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2024.103281>
- [43] A. Fahmi, S.R. Zavaragh, M.R. Hanafi, H. Rahimpour, S. Zinatloo-Ajabshir, A. Asghari, Facile preparation, characterization, and investigation of mechanical strength of Starchy NaCl-binder as a lightweight construction material, *Scientific Reports*, 13(1) (2023) 19042. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-46536-8>

- Pearson, Upper Saddle River, New jersey, USA, 2017.
- [56] A. Isidori, Nonlinear control systems: an introduction, 3rd ed., Springer, London, UK, 1985.
- [57] S.A. Billings, Nonlinear system identification: NARMAX methods in the time, frequency, and spatio-temporal domains, First ed., John Wiley & Sons, New York, USA, 2013.
- [58] K. Atkinson, W. Han, D.E. Stewart, Numerical solution of ordinary differential equations, First ed., John Wiley & Sons, New York, USA, 2009.
- [59] J. Stoer, R. Bulirsch, R. Bartels, W. Gautschi, C. Witzgall, Introduction to numerical analysis, Springer, New York, USA, 1980.
- [60] R. Clough, J. Penzien, Dynamics of Structures, 3rd ed., Computers & Structures, Inc., California, USA, 2003.
- Applied Soft Computing, 1(1) (2024) 111424. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2024.111424>
- [52] M. Babaei, A computational approach to developing two-derivative ODE-solving formulations: $\gamma\beta\text{I}-(2+3)\text{P}$ method, Journal of Computational Science, 91(1) (2025) 102653. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2025.102653>
- [53] M. Babaei, An efficient ODE-solving method based on heuristic and statistical computations: $\alpha\text{II}-(2+3)\text{P}$ method, The Journal of Supercomputing, 80(14) (2024) 20302-20345. <https://doi.org/10.1007/s11227-024-06137-2>
- [54] M. Babaei, A swarm-intelligence based formulation for solving nonlinear ODEs: $\gamma\beta\text{II}-(2+3)\text{P}$ method, Applied Soft Computing, 162(1) (2024) 111424. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2024.111424>
- [55] A.K. Chopra, Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 4th ed.,

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Babaei, M. R. Hanafi, A. R. Rahai, Development of Gauss-Legendaire-Hermite-3Point (GLH-3P) Formulation for Linear and Nonlinear Analysis of Earthquake-Affected Structures, Amirkabir J. Civil Eng., 57(10) (2026) 1725-1748.

DOI: [10.22060/ceej.2026.23247.8136](https://doi.org/10.22060/ceej.2026.23247.8136)



