

توسعه فرمول بندی گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای (GLH-3P) برای تحلیل خطی و غیرخطی

ارتعاشات سازه‌ها تحت اثر تحریک زلزله

مهدی بابائی قلعه جوق^{۱*}، محمدرضا حنفی^۲، علیرضا رهایی^۲

۱- دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بناب، بناب، ایران

۲- دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

* نویسنده مسئول: مهدی بابائی قلعه جوق، m.babaei@ubonab.ac.ir & mehdi_babaei_b85@yahoo.com

چکیده

پاسخ دینامیکی سازه‌ها تحت اثر زلزله یکی از مسائل مهم مهندسی عمران است که نیازمند روش‌های تحلیلی دقیق و کارآمد می‌باشد. در این پژوهش، فرمول بندی کارآمدی برای تحلیل دینامیکی غیرخطی سازه‌ها تحت عنوان روش گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای ارائه می‌گردد که مبتنی بر قاعده انتگرال گیری ضمنی سه نقطه‌ای گاوس می‌باشد که از درون یابی مرتبه سوم به روش هرمیت برای تقریب میان گام‌ها استفاده می‌کند. فرمول ارائه شده قابلیت تحلیل سیستم‌های غیرخطی هندسی و مصالح را دارا بوده و انواع مختلفی الگوهای بارگذاری را پوشش می‌دهد. نتایج به دست آمده از تحلیل‌های روش جدید، با نتایج روش‌های رایج دیگر مانند روش نیمه تحلیلی انتگرال دو هامل و روش شبه تحلیلی نیومارک-بتا و ویلسون-تتا مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان داد، روش ارائه شده خطای مجذور میانگین مربعات را در سیستم‌های خطی تا ۱۸٪ و در سیستم‌های غیرخطی تا ۹۳٪ نسبت به روش نیومارک کاهش می‌دهد. فرمول بندی ارائه شده از نظر دقت، پایداری، هم گرایی و هزینه محاسباتی برتری قابل توجهی نسبت به سایر روش‌ها دارد و می‌توان آن را در نرم افزارهای اجزای محدود پیاده سازی و برای تحلیل تاریخچه زمانی غیرخطی سازه‌های یک درجه آزادی استفاده نمود.

کلمات کلیدی

تحلیل تاریخچه زمانی، تحلیل غیرخطی، روش گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای، روش نیومارک-بتا، انتگرال گاوس-لژاندر، دینامیک سازه‌ها، درون یاب هرمیت.

حرکت نوسانی یک سیستم مکانیکی جرم-فنر-میراگر ایده‌آل با یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (ODE^1) مدل‌سازی می‌شود که معروف به معادله دیفرانسیل حرکت ($DEOM^2$) می‌باشد. برای شناسایی و پیش‌بینی رفتار این سیستم در طول زمان، بایستی معادله دیفرانسیل حرکت در طول بازه زمانی مشخصی حل شود. به‌طور کلی، هر معادله دیفرانسیلی را می‌توان به‌صورت تحلیلی یا عددی حل کرد که غالباً راه‌حل‌های تحلیلی ارجح هستند. باین‌حال، دستیابی به جواب تحلیلی در معادلات کاربردی به‌سختی ممکن است؛ چراکه اولاً، تابع تحریک معمولاً در یک ورودی نامنظم متغیر با زمان قرار می‌گیرد و ثانیاً، رفتار اجزای سیستم ممکن است در موقعیت‌های مختلف زمانی و مکانی متغیر باشد؛ بنابراین، نیازمند استفاده از روش‌های عددی برای حل این معادله می‌باشد. براین‌اساس، گستره‌ی وسیعی از روش‌های تحلیل خطی و غیرخطی برای حل عددی آن معرفی شده‌اند. باین‌حال، همواره ارائه فرمول‌بندی کارآمدتر و دقیق‌تر برای تحلیل مؤثرتر سیستم‌های دینامیکی غیرخطی با طول گام‌های درشت‌تر، عرصه‌ای دیرپا در تحقیقات مهندسی مکانیک و سازه بوده است. روش‌های عددی تحلیل دینامیکی سازه‌ها مبتنی بر اصل جمع آثار قوا بوده و یا از روش‌های انتگرال‌گیری گام‌به‌گام می‌باشند. انتگرال دوهمال^۳ و تبدیل فوریه دو روش شناخته‌شده در دسته اول بوده و روش‌های تفاضلات مرکزی^۴، نیومارک-بتا^۵، هوبولت^۶، ویلسون-تتا^۷ و همه روش‌های رانگ-کوتا^۸ از دسته دوم هستند [۱]. فرمول‌بندی‌های انتگرال‌گیری گام‌به‌گام روش‌هایی جامع برای تحلیل سیستم‌های غیرخطی و خطی ارائه می‌دهند. در این روش‌ها اگر گام‌های زمانی به‌اندازه کافی کوچک اختیار شوند، می‌توان اثرات غیرخطی را با هر دقت دلخواه در پاسخ محاسبه شده منعکس کرد [۲، ۳]. علاوه‌برآن، مزیت بزرگ روش‌های گام‌به‌گام این است که فرمول‌بندی آنها که برای سیستم‌های یک درجه آزادی ($SDOF^9$) ارائه شده‌اند را می‌توان با جایگزینی مقادیر عددی با کمیت‌های برداری و ماتریسی متناظرشان، برای سیستم‌های چند درجه آزادی ($MDOF^{10}$) نیز تعمیم داد.

اولین روش انتگرال‌گیری زمانی گام‌به‌گام سال ۱۹۵۰ توسط مهندس هوا-فضا جان کورنلیوس هوبولت^{۱۱} که روشی کارآمد برای حل مسئله‌ای مهم و پیچیده در مهندسی هوا-فضا بود، ارائه‌شده است [۴]. در اواخر قرن بیستم، دقت و پایداری روش‌های جدید توسط مهندسان به‌دقت مورد بررسی قرار گرفت [۵] و نتایج به‌دست آمده در متون فنی ارائه شد [۱، ۶]. بعدها، روشی ساده و کاربردی توسط نیومارک و ولتسوس^{۱۲} برای حل طیف گسترده‌ای از مسائل دینامیک سازه برای تحلیل لرزه‌ای سیستم‌های سازه‌ای معرفی شد [۷]. در حال حاضر منابعی بسیار غنی و مشهوری در زمینه دینامیک سازه‌ها وجود دارد که به موضوعات مختلفی در این زمینه و کاربردهای آنها پرداخته‌اند [۷-۱۶]. روش‌های جدید انتگرال‌گیری توسط هیلبر و همکاران^{۱۳} ارائه شد که پایدار نامشروط بوده و در مقایسه با روش‌های مشابه موجود نیومارک-بتا، هوبولت و ویلسون-تتا از دقت و کارایی مناسبی برخوردار بودند [۱۷]. بروسا و همکاران^{۱۴} روش پایدار نامشروط مبتنی بر روش‌های انتگرال‌گیری زمانی تک‌گامی را جهت حل معادله دیفرانسیل حرکت معرفی کردند. این روش ضمنی بوده و مزایای آن نسبت به روش‌های موجود دیگر نشان داده شد [۱۸]. زینکوویچ و همکاران^{۱۵} فرمول‌بندی عمومی‌تری مبتنی بر انتگرال‌گیری زمانی تک‌گامی تحت عنوان روش‌های SSPj را برای استفاده در معادلات نفوذ و ارتعاشات پیشنهاد دادند [۱۹]. بخش دوم تحقیقات آنها نیز توسط وود^{۱۶} انجام شد [۲۰]. هاف و پال^{۱۷} الگوریتمی تک‌گامی جهت حل معادله دیفرانسیل حرکت سیستم‌های سازه‌ای دینامیکی ارائه دادند. الگوریتم جدیدی به نام SS33 که می‌تواند به دقت و پایداری بالایی برای انتگرال‌گیری مستقیم معادلات دینامیکی سازه‌ای دست

¹ Ordinary differential equation

² Differential equation of motion

³ Duhamel integration

⁴ Central difference

⁵ Newmark-β

⁶ Hubault

⁷ Wilson-θ

⁸ Range-Kutta

⁹ Single degree of freedom

¹⁰ Multiple degree of freedom

¹¹ John Cornelius Hubault

¹² Newmark & Veletsos

¹³ Hibler et al.

¹⁴ Brusa et al.

¹⁵ Zeinkiewicz et al.

¹⁶ Wood

¹⁷ Hoff & Pahl

یابد [۲۱]. چانگ و هولبرت^۱ نیز بر روی روش جدید انتگرال گیری زمانی ضمنی تک گامی مطالعاتی را انجام دادند. این روش می تواند میزان خطای عددی توسط کاربر را کنترل کرده و در عین حال اتلاف در بسامدهای پایین را به حداقل برساند [۲۲]. پس از آن، چانگ و همکاران^۲ به بررسی عملکرد روش نیومارک برای تحلیل سیستم های غیر خطی با استفاده از روشی جدید پرداخته و ویژگی های عددی روش نیومارک، مانند خطای برش موضعی، مرتبه دقت، و پایداری را برای هر دو سیستم ارتجاعی خطی و غیر خطی را مورد بررسی قرار دادند [۲۳]. باته و همکاران^۳ روشی جدید و تلفیقی برای تحلیل دینامیکی غیر خطی پایداری سازه ها ارائه کردند. این روش قاعده دوزنقه و روش ویلسون-تتا را به گونه ای ترکیب می کند که از ناپایداری روش اول و دقت پایین روش دوم جلوگیری کند [۲۴]. سپس، روشی پایستار برای انرژی و ضربه ارائه داد. این روش مشابه روش قبلی بود ولی از ناپایداری جلوگیری می کرد [۲۵]. آن ها پس از آن برخی از ویژگی های روش توسعه یافته قبلی خود را که در سال های ۲۰۰۵ تا ۲۰۰۷ ارائه کرده بودند را مورد بررسی قرار داده و کارایی روش ها را در تحلیل سیستم های سازه ای خطی آزمودند [۲۶]. پس از آن روش انتگرال گیری زمانی باته و فرم پارامتری آن بررسی و بهبود داده شد و تلاش شد افت دامنه ی نوسان و افزایش طول دوره ی تناوب سیستم در انتگرال گیری عددی توجیح گردد [۲۷، ۲۸]. کاتسیکادلایس^۴ چندین مقاله در مورد روش های انتگرال گیری زمانی برای تحلیل دینامیکی سیستم های سازه ای منتشر کرده است [۲۲-۲۷]. ژانگ و همکاران^۵ روش جدیدی برای تحلیل هم گرایی روش های مرکب تعمیم یافته پیشنهاد کردند و خطاهای برش موضعی شتاب، سرعت و تغییر مکان را ارزیابی کردند. همچنین آن ها نشان دادند روش خطی دو گامی بهینه در دینامیک سازه عملکرد مطلوبی دارد [۲۹-۳۱]. اخیراً نیز چندین روش تحلیلی و آزمایشگاهی جدید برای تحلیل دینامیکی سیستم های سازه ای یک و چند درجه آزادی با استفاده از فرمول های درون یابی و روش های بهینه سازی توسط نویسندگان پژوهش حاضر ارائه شده است [۳۲-۴۸]. مالاتی و همکاران^۶ نیز یک روش ضمنی بهبود یافته دارای الگوریتم کاربر پسند نوآورانه برای تاریخچه زمانی غیر ارتجاعی سیستم های سازه ای یک درجه آزادی ارائه کردند که در نرم افزار لب ویو^۷ پیاده سازی شده است [۴۹].

پژوهش حاضر، فرمول بندی جدیدی برای تحلیل تاریخچه زمانی غیر خطی سازه های یک درجه آزادی تحت اثر زلزله ارائه می دهد. هدف اصلی، تعمیم روش انتگرال گیری گاوس-لژاندر و ترکیب آن با فرمول های درون یابی هرمیت^۸ دو مشتقه برای ایجاد روشی جدید برای حل معادله حرکت سیستم های سازه ای یک درجه آزادی می باشد. منطق موجود در ترکیب دو فرمول بندی در مقالات ریاضی توسط نویسنده اول پژوهش حاضر منتشر و تبیین شده است [۵۰-۵۴]. و علت نام گذاری این روش تحت عنوان گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه ای (GLH-3P^۹)، ترکیب فرمول های انتگرال گیر گاوس-لژاندر سه نقطه ای با درون یابی هرمیت می باشد. همچنین، ایده و نوآوری پژوهش حاضر توسعه فرمول بندی های جدید درون یابی و انتگرال گیری عددی و توسعه ضرایب اختصاصی درون یابی هرمیت (جدول ۱) برای اولین بار و ارائه الگوریتم بهینه شده تحلیل می باشد که مرتبه دقت را به $O(h^6)$ افزایش می دهد و تعداد تکرارها را تا ۵۰٪ کاهش می دهد، در حالی که روش های متداول مانند نیومارک از مرتبه $O(h^2)$ می باشد.

۲- بیان مسئله

شکل (۱) یک سیستم جرم-فنر-میراگر خطی را تحت تأثیر نیروهای خارجی تابع زمان نشان می دهد. این سیستم از سه جزء جرم، فنر و میراگر تشکیل شده است. با نوشتن معادله تعادل دینامیکی در سیستم، معادله ارتعاش حاصل می گردد که حل عددی آن محور اصلی در پژوهش حاضر می باشد. پاسخ این معادله می تواند اطلاعاتی در مورد بسامد طبیعی، نسبت میرایی، شکل مود و پاسخ سیستم را ارائه دهد. این سیستم ایده آل، مدل پایه ای برای تحلیل ارتعاشات سازه های واقعی مانند ساختمان ها یا پل ها است، جایی که جرم نشان دهنده جرم سازه، فنر معرف سختی ارتجاعی (الاستیک) و میراگر بخش جذب انرژی ناشی از اصطکاک یا گرانروی (ویسکوزیته) می باشد. معادله تعادل براساس قانون دوم نیوتن تدوین می شود و شامل نیروی لختی (اینرسی)، نیروی میرایی و نیروی ارتجاعی در برابر

¹ Chung & Hulbert

² Chung et al.

³ Bathe et al.

⁴ Katsikadelis

⁵ Zhang et al.

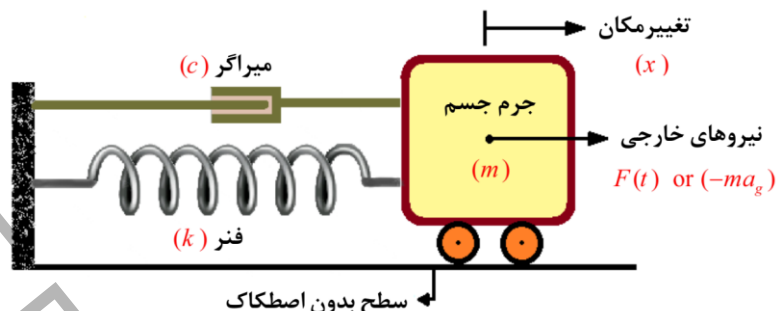
⁶ Malathy et al.

⁷ LabVIEW software

⁸ Hermite Interpolation

⁹ Gauss-Legendre-Hermit-3Point Method

نیروی خارجی می‌باشد. در کاربردهای مهندسی زلزله، این مدل کمک می‌کند تا رفتار سازه در برابر شتاب‌های لرزه‌ای پیش‌بینی شده و مؤلفه‌هایی مانند دوره تناوب و میرایی بحرانی محاسبه گردد.



شکل ۱: مدل ارتعاش سیستم جرم-فتر تحت اثر تحریکات خارجی وابسته به زمان

Figure 1: Ideal model of a mass-spring system subjected to time-dependent external excitation

با استناد به مرجع کتاب دینامیک سازه‌های چوپرا و سایر متون فنی موجود [۵۵، ۱۴]، و با فرض اینکه مؤلفه جابه‌جایی نسبی سیستم (تغییر شکل فتر) را با u ، سرعت نسبی آنرا با $\dot{u}$ و شتاب نسبی سیستم را با $\ddot{u}$ ، نشان دهیم، معادله دیفرانسیل حرکت سیستم‌های غیرخطی تحت اثر زلزله، به صورت زیر ارائه می‌گردد [۵۶، ۵۷]:

$$m\ddot{u} + F_D(u, \dot{u}) + F_S(u, \dot{u}) = -ma_g \quad (1)$$

رابطه (۱)، رایج‌ترین شکل معادله ارتعاش می‌باشد. عبارت $(u, \dot{u})$ ، صرفاً برای تأکید بر غیرخطی بودن کمیت‌های متناظرشان هستند. با فرض رفتار خطی فتر، $F_S = ku$ و رفتار میرایی ویسکوز، $F_D = c\dot{u}$ ، برای یک سیستم خطی می‌توان نوشت:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -ma_g \quad (2)$$

که در آن k ثابت فتر، c ضریب میرایی یا ثابت میرایی ویسکوز، m جرم سیستم می‌باشد که در طول ارتعاش مقداری ثابت می‌باشد. با تقسیم طرفین رابطه (۲) به مؤلفه جرم سیستم (m)، معادله دیفرانسیل حرکت سیستم‌های خطی تحت اثر شتاب زلزله به صورت زیر فرمول‌بندی خواهد شد:

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_n\dot{u} + \omega_n^2 u = -a_g \quad (3)$$

رابطه (۴)، شکل دیگری از معادله ارتعاش مورد استفاده در مطالعه حاضر می‌باشد که در آن $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ بسامد زاویه‌ای طبیعی سیستم

و $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$ نسبت میرایی سیستم می‌باشد. در این معادلات، زلزله به صورت تابعی گسسته از زمان ارائه می‌شود که در N لحظه‌ی زمانی داده می‌شود. در ادامه، با استفاده از رابطه (۳) و سایر ابزارهای مورد نیاز، مبانی نظری روش جدید برای محاسبه پاسخ لرزه‌ای سیستم‌های تک درجه آزاد در لحظه t_{i+1} پایه گذاری می‌گردد.

۳- روش تحقیق

در فرمول‌بندی روش حاضر، تحلیل دینامیکی نیاز به چندین ابزار ریاضی می‌باشد که عبارت‌اند از: (۱) روابط گسسته‌سازی دامنه زمانی، (۲) انتگرال گیر گاوس-لژاندر، (۳) فرمول‌های درون‌یابی هرمیت و (۴) چندجمله‌ای‌های پیشگوی سری تیلور^۱. انتگرال گیر گاوس-لژاندر سه نقطه‌ای و فرمول درون‌یابی هرمیت بدنه اصلی این الگوریتم را تشکیل می‌دهند. علاوه بر آن، چندجمله‌ای‌های تیلور نیز تقریب مناسبی برای شروع فرایند تکرار ارائه می‌دهند. ذیلاً، به بررسی روابط مربوط به این ابزارها پرداخته می‌شود.

¹ Taylor polynomial

۳-۱- گسسته‌سازی دامنه زمانی

در روش‌های عددی انتگرال‌گیری زمانی گام‌به‌گام تحلیل دینامیکی، تابع پاسخ در لحظه‌های زمانی گسسته یا نقاط گرهی^۱ ارائه می‌شود. با در نظر گرفتن تعداد N گام زمانی، دامنه پیوسته زمانی به صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$\{t\} := \{t_1, t_2, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{N-1}, t_N\} \quad (۴)$$

که به تعداد $N-1$ گام زمانی را در بازه زمانی حل ایجاد می‌کند. طول گام‌های زمانی معمولاً یکسان در نظر گرفته می‌شود که با $h = t_{i+1} - t_i$ نشان داده می‌شود. با توجه به گسسته‌سازی دامنه زمانی، تابع پاسخ گسسته‌سازی شده نیز به صورت دنباله زیر ارائه می‌شود:

$$\{u\} := \{u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{N-1}, u_N\} \quad (۵)$$

مقدار شتاب سیستم در نقاط گرهی نقش ویژه‌ای در سطح دقت و سایر ویژگی‌های روش‌های عددی مانند پایداری، سرعت و هم‌گرایی پاسخ ایفا می‌کند؛ بنابراین، مقادیر شتاب گرهی باید مستقیماً توسط معادله دیفرانسیل حرکت محاسبه شوند تا دارای بیشترین دقت باشند. از سوی دیگر در تحلیل تاریخچه زمانی زلزله، مقادیر شتاب (به عنوان تابع تحریک خارجی) اغلب در گام‌های زمانی دارای طول یکسان^۲ ارائه می‌شود که همین نقاط، به عنوان نقاط گرهی در نظر گرفته می‌شوند. از آنجایی که معادله دیفرانسیل حرکت در تمامی لحظات برقرار است، شکل گسسته رابطه (۱) را برای لحظه t_{i+1} به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$m\ddot{u}_{i+1} + F_{D,i+1} + F_{S,i+1} = -ma_{g,i+1} \quad (۶)$$

که در آن $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}(t_{i+1})$ شتاب در لحظه t_{i+1} می‌باشد. با بازآرایی رابطه ۶، می‌توان نوشت:

$$\ddot{u}_{i+1} = -m^{-1}(ma_{g,i+1} + F_{D,i+1} + F_{S,i+1}) \quad (۷)$$

حال بایستی علاوه بر $\ddot{u}_{i+1}$ ، باید مقادیر شتاب را در دو نقاط داخلی میان گام‌های زمانی نیز محاسبه شود. جهت تعیین شتاب در این نقاط، ابتدا بایستی موقعیت نقاط انتگرال‌گیری فرمول گاوس-لژاندر-سه نقطه‌ای را مشخص شود. حال فرض کنید سه مؤلفه‌ی موقعیت مکانی λ ، K و η به صورت زیر معرفی شوند:

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \cong \frac{۴۹۶}{۴۴۰۱} \quad (۸)$$

$$K = \frac{1}{2} \quad (۹)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \cong \frac{۴۹۶}{۵۵۹۱} \quad (۱۰)$$

که موقعیت نسبی میانگام‌های گاوس را در طول یک گام معین می‌کنند. بنابراین، موقعیت مطلق نقاط داخلی انتگرال گاوس-لژاندر-سه نقطه‌ای به صورت $t_{i+\lambda} = t_i + \lambda h$ ، $t_{i+K} = t_i + Kh$ و $t_{i+\eta} = t_i + \eta h$ شناسایی خواهد شد. با استفاده از روابط فوق و با الگو برداری از (۷)، می‌توان روابط زیر را جهت محاسبه مقادیر شتاب $\ddot{u}_{i+\lambda}$ ، $\ddot{u}_{i+K}$ و $\ddot{u}_{i+\eta}$ در این نقاط ارائه کرد:

$$\ddot{u}_{i+\lambda} = -m^{-1}(ma_{g,i+\lambda} + F_{D,i+\lambda} + F_{S,i+\lambda}) \quad (۱۱)$$

$$\ddot{u}_{i+K} = -m^{-1}(ma_{g,i+K} + F_{D,i+K} + F_{S,i+K}) \quad (۱۲)$$

$$\ddot{u}_{i+\eta} = -m^{-1}(ma_{g,i+\eta} + F_{D,i+\eta} + F_{S,i+\eta}) \quad (۱۳)$$

که در آن $\ddot{u}_{i+\lambda} = \ddot{u}(t_{i+\lambda})$ ، $a_{g,i+\lambda} = a_g(t_{i+\lambda})$ ، $F_{S,i+\lambda} = F_S(u_{i+\lambda} + \ddot{u}_{i+\lambda})$ و $F_{D,i+\lambda} = F_D(u_{i+\lambda} + \ddot{u}_{i+\lambda})$ به ترتیب شتاب سیستم، شتاب حرکت زمین، نیروی بازگرداننده (فنریت) و میرایی در لحظه $t_{i+\lambda}$ می‌باشد. به طور مشابه، سایر کمیت‌های موجود در

¹ Nodal points

² Equally-Distanced

روابط (۱۱) تا (۱۳) را می‌توان برای لحظات $t_{i+\kappa}$ و $t_{i+\eta}$ تعریف کرد. همچنین، شتاب حرکت زمین در نقاط داخلی با استفاده از درونیابی خطی و با استفاده از روابط ساده زیر به‌دست می‌آید:

$$a_{g,i+\lambda} = (1-\lambda)a_{g,i} + \lambda a_{g,i+1} \quad (14)$$

$$a_{g,i+\kappa} = (1-\kappa)a_{g,i} + \kappa a_{g,i+1} \quad (15)$$

$$a_{g,i+\eta} = (1-\eta)a_{g,i} + \eta a_{g,i+1} \quad (16)$$

به‌طور مشابه، در سیستم‌های خطی، می‌توان شتاب را با استفاده از معادلات زیر محاسبه کرد:

$$\ddot{u}_{i+\lambda} = -(a_{g,i+\lambda} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+\lambda} + \omega_n^2 u_{i+\lambda}) \quad (17)$$

$$\ddot{u}_{i+\kappa} = -(a_{g,i+\kappa} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+\kappa} + \omega_n^2 u_{i+\kappa}) \quad (18)$$

$$\ddot{u}_{i+\eta} = -(a_{g,i+\eta} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+\eta} + \omega_n^2 u_{i+\eta}) \quad (19)$$

$$\ddot{u}_{i+1} = -(a_{g,i+1} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+1} + \omega_n^2 u_{i+1}) \quad (20)$$

روابط فوق تمام فرمول‌های موردنیاز برای گسسته‌سازی دامنه در فرمول‌بندی تحلیل دینامیکی جدید را در این مقاله فراهم می‌کنند.

۳-۲- انتگرال گاوس-لژاندر-هرمیت-سه‌نقطه‌ای (GLH-3P)

برای آشنایی و درک بهتر فرمول‌بندی روش گاوس-لژاندر-هرمیت-سه‌نقطه‌ای، شکل (۲) مفهوم هندسی انتگرال گاوس-لژاندر-سه‌نقطه‌ای در بازه $[-1, +1]$ نشان می‌دهد. در ادامه روابط بین مؤلفه‌های تغییر مکان نسبی، سرعت نسبی و شتاب نسبی فرمول‌بندی می‌شوند.

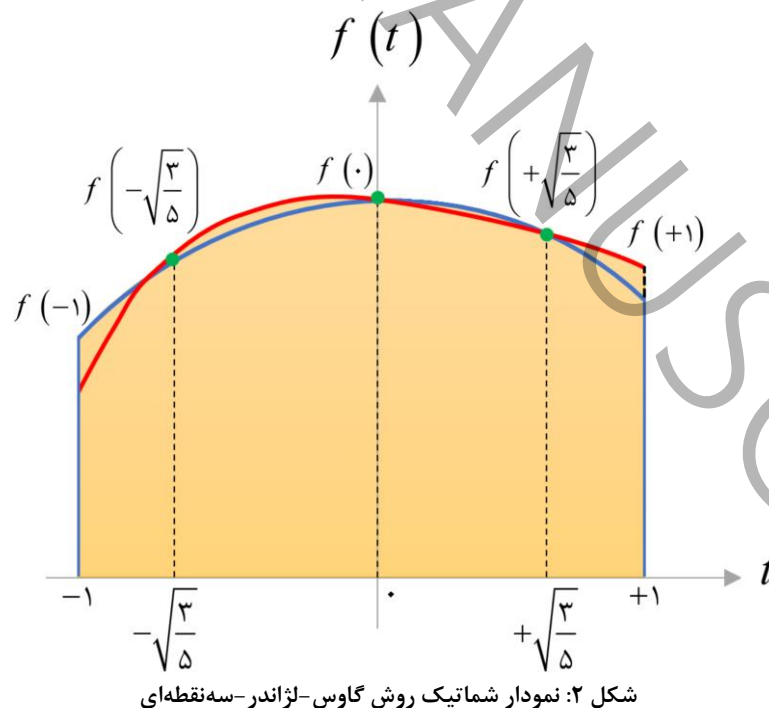


Figure 2. Schematic diagram of 3-point Gauss-Legendre quadrature

تمامی روش‌های گام‌به‌گام از فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی برای پیشروی در زمان از t_i به t_{i+1} استفاده می‌کنند. اساس این روش‌ها دو معادله انتگرالی بنیادی هستند. اگر مؤلفه تغییر مکان جانبی را با $u = u(t)$ و مؤلفه سرعت $\dot{u} = \dot{u}(t)$ و مؤلفه شتاب $\ddot{u} = \ddot{u}(t)$ نشان دهیم؛ این دو معادله به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ddot{u}(t) dt \quad (21)$$

$$u_{i+1} = u_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{u}(t) dt \quad (22)$$

که در آن t_i ، $t_{i+1} = t_i + h$ نقاط ابتدایی و انتهایی گام i -ام و نیز $\dot{u}_i = \dot{u}(t_i)$ و $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}(t_{i+1})$ مقادیر سرعت در این نقاط می‌باشند. $u_i = u(t_i)$ و $u_{i+1} = u(t_{i+1})$ نیز تغییر مکان در نقاط انتهایی گام می‌باشند. تفاوت بین روش‌های گام‌به‌گام در فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی مورد استفاده برای تخمین جمله انتگرالی در معادلات (21) و (22) مشهود است. لازم به ذکر است، کارایی این روش‌ها به فرمول‌های استفاده‌شده جهت ارزیابی عددی انتگرال‌ها بستگی دارد. اکثر روش‌های انتگرال‌گیری زمانی گام‌به‌گام که قبلاً توسعه داده‌شده‌اند، از اطلاعات نقاط انتهایی در فرمول‌های انتگرال‌گیری استفاده کرده‌اند و به‌ندرت نقاط داخلی گام را در فرمول‌بندی وارد کرده‌اند. حال، پژوهش حاضر با الهام از روش‌های رانگ-کوتا، در حال ایجاد انتگرال‌گیر گاوس-لژاندر-سه‌نقطه‌ای در روابط (17) و (18) می‌باشد. اما دستیابی به مقادیر دقیق تغییر مکان و سرعت در نقاط داخلی نیازمند روشی قوی‌تر می‌باشد. حال، با یادآوری اینکه مؤلفه‌های λ ، κ و η موقعیت مکانی نقاط میانی انتگرال گاوس-لژاندر-سه‌نقطه‌ای را مشخص می‌کنند؛ فرمول‌های انتگرال‌گیری زیر برای نقاط گاوس-لژاندر-سه‌نقطه‌ای توسعه می‌یابد:

$$\dot{u}_{i+1} \cong \dot{u}_i + h \left(\frac{5}{18} \ddot{u}_{i+\lambda} + \frac{4}{9} \ddot{u}_{i+\kappa} + \frac{5}{18} \ddot{u}_{i+\eta} \right) \quad (23)$$

$$u_{i+1} \cong u_i + \left[h \left(-\frac{1}{10} \dot{u}_i + \frac{25}{63} \dot{u}_{i+\lambda} + \frac{128}{315} \dot{u}_{i+\kappa} + \frac{25}{63} \dot{u}_{i+\eta} - \frac{1}{10} \dot{u}_{i+1} \right) \right] + \left[h^2 \left(-\frac{1}{140} \ddot{u}_i + \frac{1}{140} \ddot{u}_{i+1} \right) \right] \quad (24)$$

که در آن، $\ddot{u}_{i+\lambda} = \ddot{u}(t_{i+\lambda})$ ، $\ddot{u}_{i+\kappa} = \ddot{u}(t_{i+\kappa})$ ، $\ddot{u}_{i+\eta} = \ddot{u}(t_{i+\eta})$ ، $\dot{u}_{i+\lambda} = \dot{u}(t_{i+\lambda})$ ، $\dot{u}_{i+\kappa} = \dot{u}(t_{i+\kappa})$ و $\dot{u}_{i+\eta} = \dot{u}(t_{i+\eta})$ می‌باشد.

۳-۳- فرمول‌های درون‌یابی هرمیت

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، نقاط داخلی در انتگرال گاوس-لژاندر-سه‌نقطه‌ای باید با روشی دقیق مورد ارزیابی قرار گیرند. همان‌طور که پیشنهاد شد، فرمول درون‌یابی هرمیت می‌تواند یک ابزار کارآمد باشد؛ درحالی‌که، در مطالعات قبلی به‌طور جدی به اهمیت این موضوع پرداخته‌نشده است. فرمول درون‌یابی هرمیت اطلاعات نقاط انتهایی گام را گرفته و تغییر مکان و سرعت نقاط داخلی را تخمین می‌زند. حال، فرمول‌های مرتبه اول درون‌یابی هرمیت مقادیر سرعت را در لحظات $t_{i+\lambda}$ ، $t_{i+\kappa}$ و $t_{i+\eta}$ به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\dot{u}_{i+\lambda} \cong (A\dot{u}_i + B\dot{u}_{i+1}) + h(C\ddot{u}_i - D\ddot{u}_{i+1}) \quad (25)$$

$$\dot{u}_{i+\kappa} \cong E(\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}) + hF(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i+1}) \quad (26)$$

$$\dot{u}_{i+\eta} \cong (B\dot{u}_i + A\dot{u}_{i+1}) + h(D\ddot{u}_i - C\ddot{u}_{i+1}) \quad (27)$$

به‌طور مشابه، تغییر مکان‌ها با درون‌یاب‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$u_{i+\lambda} \cong (Gu_i + Hu_{i+1}) + h(I\dot{u}_i - J\dot{u}_{i+1}) + h^2(K\ddot{u}_i + L\ddot{u}_{i+1}) \quad (28)$$

$$u_{i+\kappa} \cong M(u_i + u_{i+1}) + Nh(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) + Oh^2(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1}) \quad (29)$$

$$u_{i+\eta} \cong (Hu_i + Gu_{i+1}) + h(J\dot{u}_i - I\dot{u}_{i+1}) + h^2(L\ddot{u}_i + K\ddot{u}_{i+1}) \quad (30)$$

مقادیر دقیق و تقریبی ضرایب مورد استفاده در فرمول‌های درون‌یابی هرمیت برای محاسبه سرعت و تغییر مکان با استفاده از نظریه تقریب توابع و مبانی برازش منحنی طبق مراجع [۵۸، ۵۹] و با انجام محاسبات دقیق و پیچیده جبری محاسبه و در جدول (۱) ارائه شده‌اند. باید توجه داشت که درون‌یاب‌های تغییر مکان از مقادیر مشتق مرتبه بالاتر بهره می‌برند. لازم به ذکر است، تمامی فرمول‌های درون‌یابی توسط مؤلفین توسعه یافته‌اند و برای نخستین بار در این مقاله گزارش می‌شوند. این فرمول‌ها بر پایه اصول ریاضیاتی پیشرفته در نظریه تقریب توابع و روش‌های برازش منحنی بنا نهاده شده‌اند و با محاسبات جبری دقیق، ضرایب منحصر به فردی برای درون‌یابی سرعت و تغییر مکان در نقاط داخلی گام زمانی استخراج گردیده است.

جدول ۱: ضرایب درون‌یاب هرمیت برای محاسبه سرعت و تغییر مکان

Table 1: Hermite interpolating coefficients for velocity and displacement calculations

ضرایب مربوط به فرمول‌های (۲۵) تا (۲۷) در محل میان‌گام‌ها برای محاسبه سرعت					
$A = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{15}}{25} \approx \frac{219}{227}$	$B = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{15}}{25} \approx \frac{533}{15124}$	$C = \frac{1}{20} + \frac{\sqrt{15}}{100} \approx \frac{248}{2795}$	$D = \frac{1}{20} - \frac{\sqrt{15}}{100} \approx \frac{248}{22005}$	$E = \frac{1}{2}$	$F = \frac{1}{8}$
ضرایب مربوط به فرمول‌های (۲۸) تا (۳۰) در محل میان‌گام‌ها برای محاسبه تغییر مکان					
$G = \frac{1}{2} + \frac{63\sqrt{15}}{500} \approx \frac{1070}{1083}$	$H = \frac{1}{2} - \frac{63\sqrt{15}}{500} \approx \frac{82}{6831}$	$I = \frac{11}{200} + \frac{13\sqrt{15}}{1000} \approx \frac{518}{4917}$	$J = \frac{11}{200} - \frac{13\sqrt{15}}{1000} \approx \frac{409}{87934}$		
$K = \frac{1}{400} + \frac{\sqrt{15}}{2000} \approx \frac{62}{13975}$	$L = \frac{1}{400} - \frac{\sqrt{15}}{2000} \approx \frac{67}{118898}$	$M = \frac{1}{2}$	$N = \frac{5}{32}$	$O = \frac{1}{64}$	

برای روشن شدن چگونگی ساخت فرمول‌بندی درون‌یاب‌های هرمیت، یک مورد از آنها را مختصراً توضیح می‌دهیم. در استخراج این درون‌یاب‌ها، از شرایط مرزی معین در نقاط دو انتهای گام زمانی و برازش چند جمله‌ای‌ها استفاده شده است. به عنوان مثال، برای فرمول‌بندی درون‌یاب سرعت در نقطه $t_{i+\lambda}$ ، ضرایب چند جمله‌ای درجه سه به ترتیب ذیل در نظر گرفته می‌شود:

$$\dot{u}(t) = a + at + at^2 + at^3 \quad (31)$$

که ابتدا با اعمال شرایط مرزی زیر:

$$\dot{u}(t_i) = \dot{u}_i, \quad \dot{u}(t_{i+1}) = \dot{u}_{i+1}, \quad \ddot{u}(t_i) = \ddot{u}_i, \quad \ddot{u}(t_{i+1}) = \ddot{u}_{i+1} \quad (32)$$

مقادیر این ضرایب محاسبه می‌شود. سپس، با جایگزین کردن $t_{i+\lambda} = t_i + \lambda h$ در تابع (۳۱) جملات تابع درون‌یاب بازچینی و مرتب می‌گردد تا ضرایب درون‌یاب A، B، C و D را به دست آمده و نهایتاً به فرم لاگرانژی ارائه گردند. سایر درون‌یاب‌ها نیز به روشی مشابه فرمول‌بندی و ساخته می‌شوند.

۳-۴- چند جمله‌ای‌های سری تیلور

جهت شروع فرایند تکرار با معادلات انتگرال‌گیری ضمنی روابط (۲۳) و (۲۴)، یک تخمین اولیه از تغییر مکان و سرعت در لحظه t_{i+1} مورد نیاز است و یا اینکه بایستی مقادیر آن‌ها را در شروع حلقه تکرار صفر در نظر گرفت. تخمین دقیق این مؤلفه‌ها تعداد تکرارها را کاهش می‌دهد و سرعت هم‌گرایی الگوریتم را نیز تسریع می‌کند. بنابراین، تقریب‌هایی با سری تیلور برش خورده برای تخمین اولیه مقادیر پاسخ ارائه می‌شوند:

$$\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i \quad (33)$$

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [\ddot{u}_i h] \quad (34)$$

$$u_{i+1} = u_i + \left[\dot{u}_i h + \frac{1}{2} \ddot{u}_i h^2 \right] \quad (35)$$

این روابط قبل از شروع فرایند تکرار در الگوریتم ارائه شده، استفاده می شوند. معادلات، روابط و فرمول های ارائه شده مبانی و مفاهیم روش جدید گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه ای را تشکیل می دهند. این روش قابلیت تحلیل سیستم های خطی و غیرخطی را خواهد داشت. الگوریتم نظام مند غیرخطی و خطی این روش به ترتیب در جداول (۲) و (۳) ارائه شده است.

جدول ۲: الگوریتم روش گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه ای برای تحلیل دینامیکی سیستم های سازه ای غیرخطی یک درجه آزادی

Table 2: GLH-3P algorithm for dynamic analysis of nonlinear SDOF systems

(۱)	مقداردهی اولیه با $i = 1$:
	$t_1 = 0, \quad \dot{u}_1 = \dot{u}(t_1), \quad u_1 = u(t_1), \quad F_{D,1} = F_D(\dot{u}_1), \quad F_{S,1} = F_S(u_1), \quad \ddot{u}_1 = -m^{-1}(ma_{g,1} + F_{S,1} + F_{D,1})$
(۲)	مقداردهی مؤلفه های زیر:
-	پارامترهای موقعیت مکانی نقاط میان گامی:
	$\lambda = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right), \quad \kappa = \frac{1}{2}, \quad \eta = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$
-	ضرایب فرمول های درون یابی هرمیت: ضرایب مورد استفاده برای محاسبه سرعت و تغییر مکان در جدول (۱)
(۳)	مقادیر شتاب زمین را در میان گام ها محاسبه کنید:
	$a_{g,i+\lambda} = (1-\lambda)a_{g,i} + \lambda a_{g,i+1}$ $a_{g,i+\kappa} = (1-\kappa)a_{g,i} + \kappa a_{g,i+1}$ $a_{g,i+\eta} = (1-\eta)a_{g,i} + \eta a_{g,i+1}$
(۴)	پاسخ سیستم را در نقطه انتهایی تخمین بزنید (یا همه آن ها را صفر قرار دهید):
	$u_{i+1} = u_i + \left[\dot{u}_i h + \frac{1}{2}\ddot{u}_i h^2\right], \quad \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [\ddot{u}_i h], \quad \ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i$
(۵)	روابط زیر را تا زمانی که x_{i+1} تا ارقام مورد نظر تثبیت شود، تکرار کنید:
-	محاسبه پاسخ گام های میانی با استفاده از فرمول درون یابی هرمیت:
	$\dot{u}_{i+\lambda} \cong (A\dot{u}_i + B\dot{u}_{i+1}) + h(C\ddot{u}_i - D\ddot{u}_{i+1}), \quad u_{i+\lambda} \cong (Gu_i + Hu_{i+1}) + h(I\dot{u}_i - J\dot{u}_{i+1}) + h^2(K\ddot{u}_i + L\ddot{u}_{i+1})$ $\dot{u}_{i+\kappa} \cong E(\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}) + Fh(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i+1}), \quad u_{i+\kappa} \cong M(u_i + u_{i+1}) + Nh(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) + Oh^2(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$ $\dot{u}_{i+\eta} \cong (B\dot{u}_i + A\dot{u}_{i+1}) + h(D\ddot{u}_i - C\ddot{u}_{i+1}), \quad u_{i+\eta} \cong (Hu_i + Gu_{i+1}) + h(J\dot{u}_i - I\dot{u}_{i+1}) + h^2(L\ddot{u}_i + K\ddot{u}_{i+1})$
-	محاسبه نیرو در اجزاء سیستم:
	$F_{D,i+\lambda} = F_D(\dot{u}_{i+\lambda}), \quad F_{S,i+\lambda} = F_S(u_{i+\lambda})$ $F_{D,i+\kappa} = F_D(\dot{u}_{i+\kappa}), \quad F_{S,i+\kappa} = F_S(u_{i+\kappa})$ $F_{D,i+\eta} = F_D(\dot{u}_{i+\eta}), \quad F_{S,i+\eta} = F_S(u_{i+\eta})$
-	به روز رسانی مقادیر شتاب سیستم:
	$\ddot{u}_{i+\lambda} = -m^{-1}(ma_{g,i+\lambda} + F_{S,i+\lambda} + F_{D,i+\lambda})$ $\ddot{u}_{i+\kappa} = -m^{-1}(ma_{g,i+\kappa} + F_{S,i+\kappa} + F_{D,i+\kappa})$ $\ddot{u}_{i+\eta} = -m^{-1}(ma_{g,i+\eta} + F_{S,i+\eta} + F_{D,i+\eta})$ $\ddot{u}_{i+1} = -m^{-1}(ma_{g,i+1} + F_{S,i+1} + F_{D,i+1})$
-	به روز رسانی مقادیر تغییر مکان و سرعت در لحظه t_{i+1} با استفاده از فرمول های گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه ای:
	$\dot{u}_{i+1} \cong \dot{u}_i + h\left(\frac{5}{18}\ddot{u}_{i+\lambda} + \frac{4}{9}\ddot{u}_{i+\kappa} + \frac{5}{18}\ddot{u}_{i+\eta}\right)$ $u_{i+1} \cong u_i + h\left(-\frac{1}{10}\dot{u}_i + \frac{25}{63}\dot{u}_{i+\lambda} + \frac{128}{315}\dot{u}_{i+\kappa} + \frac{25}{63}\dot{u}_{i+\eta} - \frac{1}{10}\dot{u}_{i+1}\right) + h^2\left(-\frac{1}{140}\ddot{u}_i + \frac{1}{140}\ddot{u}_{i+1}\right)$
(۶)	مقدار $i = i + 1$ قرار داده و مراحل ۳ تا ۶ را برای گام بعدی تکرار کنید.
•	به طور متعارف فرض می شود که $F_D = F_D(\dot{u})$ و $F_S = F_S(u)$ است.

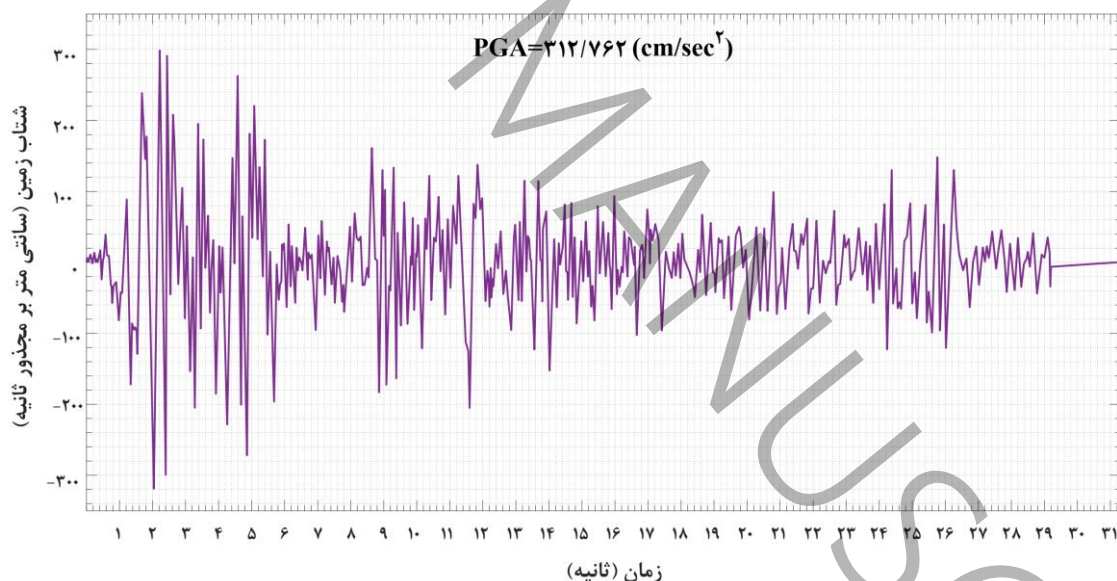
جدول ۳: الگوریتم روش گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای برای تحلیل دینامیکی سیستم‌های سازه‌ای خطی یک درجه آزادی

Table 3: GLH-3P algorithm for dynamic analysis of linear SDOF system

(۱) مقداردهی اولیه با $i = 1$:
$t_1 = 0$, $\dot{u}_1 = \dot{u}(t_1)$, $u_1 = u(t_1)$, $\ddot{u}_1 = -(a_{g,1} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_1 + \omega_n^2 u_1)$
(۲) مقداردهی مؤلفه‌های زیر:
- پارامترهای موقعیت مکانی نقاط میان گامی:
$\lambda = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right)$, $\kappa = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}} \right)$
- ضرایب فرمول‌های درون‌یابی هرمیت: ضرایب مورد استفاده برای محاسبه سرعت و تغییر مکان در جدول (۱)
(۳) مقادیر شتاب زمین را در میان گام‌ها محاسبه کنید:
$a_{g,i+\lambda} = (1-\lambda)a_{g,i} + \lambda a_{g,i+1}$
$a_{g,i+\kappa} = (1-\kappa)a_{g,i} + \kappa a_{g,i+1}$
$a_{g,i+\eta} = (1-\eta)a_{g,i} + \eta a_{g,i+1}$
(۴) پاسخ سیستم را در نقطه انتهایی تخمین بزنید (یا همه آن‌ها را صفر قرار دهید):
$u_{i+1} = u_i + \left[\dot{u}_i h + \frac{1}{2} \ddot{u}_i h^2 \right]$, $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [\ddot{u}_i h]$, $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i$
(۵) روابط زیر را تا زمانی که x_{i+1} تا ارقام مورد نظر تثبیت شود، تکرار کنید:
- محاسبه پاسخ گام‌های میانی با استفاده از فرمول درون‌یابی هرمیت:
$\dot{u}_{i+\lambda} \cong (A\dot{u}_i + B\dot{u}_{i+1}) + h(C\ddot{u}_i - D\ddot{u}_{i+1})$, $u_{i+\lambda} \cong (Gu_i + Hu_{i+1}) + h(I\dot{u}_i - J\dot{u}_{i+1}) + h^2(K\ddot{u}_i + L\ddot{u}_{i+1})$
$\dot{u}_{i+\kappa} \cong E(\dot{u}_i + \dot{u}_{i+1}) + Fh(\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i+1})$, $u_{i+\kappa} \cong M(u_i + u_{i+1}) + Nh(\dot{u}_i - \dot{u}_{i+1}) + Oh^2(\ddot{u}_i + \ddot{u}_{i+1})$
$\dot{u}_{i+\eta} \cong (B\dot{u}_i + A\dot{u}_{i+1}) + h(D\ddot{u}_i - C\ddot{u}_{i+1})$, $u_{i+\eta} \cong (Hu_i + Gu_{i+1}) + h(J\dot{u}_i - I\dot{u}_{i+1}) + h^2(L\ddot{u}_i + K\ddot{u}_{i+1})$
- به‌روزرسانی مقادیر شتاب سیستم:
$\ddot{u}_{i+\lambda} = -(a_{g,i+\lambda} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+\lambda} + \omega_n^2 u_{i+\lambda})$
$\ddot{u}_{i+\kappa} = -(a_{g,i+\kappa} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+\kappa} + \omega_n^2 u_{i+\kappa})$
$\ddot{u}_{i+\eta} = -(a_{g,i+\eta} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+\eta} + \omega_n^2 u_{i+\eta})$
$\ddot{u}_{i+1} = -(a_{g,i+1} + 2\omega_n \zeta \dot{u}_{i+1} + \omega_n^2 u_{i+1})$
- به‌روزرسانی مقادیر تغییر مکان و سرعت در لحظه t_{i+1} با استفاده از فرمول‌های گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه‌ای:
$\dot{u}_{i+1} \cong \dot{u}_i + h \left(\frac{5}{18} \ddot{u}_{i+\lambda} + \frac{4}{9} \ddot{u}_{i+\kappa} + \frac{5}{18} \ddot{u}_{i+\eta} \right)$
$u_{i+1} \cong u_i + h \left(-\frac{1}{10} \dot{u}_i + \frac{25}{63} \dot{u}_{i+\lambda} + \frac{128}{315} \dot{u}_{i+\kappa} + \frac{25}{63} \dot{u}_{i+\eta} - \frac{1}{10} \dot{u}_{i+1} \right) + h^2 \left(-\frac{1}{140} \ddot{u}_i + \frac{1}{140} \ddot{u}_{i+1} \right)$
(۶) مقدار $i = i + 1$ قرار داده و مراحل ۳ تا ۶ را برای گام بعدی تکرار کنید.

۳-۵- مدل سازی های عددی

در این بخش، دو مدل عددی برای مقایسه روش جدید با سایر روش های موجود ارائه شده است که در نرم افزار متلب^۱ پیاده سازی شده اند. تحریک سیستم با رکورد زلزله ال سنترو^۲ مطابق شکل (۳) انجام می پذیرد. زلزله ال سنترو زلزله ای به بزرگی ۷/۱ در مقیاس بزرگی موج سطحی (MS^۳) است که در تاریخ ۱۹ مه ۱۹۴۰ در منطقه ال سنترو در آمریکا رخ داد. این رکورد دارای شتاب بیشینه ۳۱۲/۷۶۲ سانتی متر بر مجذور ثانیه و مدت زمان ۲۹ ثانیه می باشد که به دلیل داشتن پالس های قوی و متعدد، مورد توجه محققان و مهندسان زلزله بوده و در برخی از آیین نامه ها به عنوان رکورد نمونه برای زلزله های حوزه نزدیک انتخاب شده است. در مدل سازی اول یک سیستم خطی پایستار (نامیرا) با دوره تناوب طبیعی ۰/۱۱۳ ثانیه و با مقدار ثابت فنر ۱۴۰۹/۶۴۷ کیلونیوتن بر سانتی متر و در مدل سازی دوم یک سیستم غیر خطی میرا با دوره تناوب طبیعی ۰/۰۸ ثانیه و با مقدار ثابت فنر ۲۸۱۲/۴۶۷ کیلونیوتن بر سانتی متر مورد بررسی قرار گرفته است. مشخصات کامل سیستم های خطی و غیر خطی مدل ها نیز در جدول (۴) آورده شده است. لازم به ذکر است، در مدل دوم، سیستمی شامل یک جرم و یک فنر غیر خطی را در نظر گرفته شده است. رفتار فنر الاستوپلاستیک با سخت شوندگی سینماتیک در نظر گرفته می شود که شامل اثر بوشینگر بدون زوال چرخه ای می باشد. نیروی بازگرداننده فنر $f_s(u)$ در ناحیه الاستیک به صورت $f_s = k \times u$ و در ناحیه پلاستیک به صورت $f_s = f_y + \alpha \times k \times (u - u_p)$ و با ضریب $\alpha = 1$ ارائه می گردد. که f_s نیروی فنر، k ضریب فنریت سیستم، u تغییر مکان نسبی سیستم در هر لحظه، f_y تنش تسلیم فنر، α نسبت تنش تسلیم در باربرداری نسبت به بارگذاری سیستم و u_p تغییر شکل فنر در لحظه تسلیم می باشد. لازم به ذکر است، با توجه به اساس صرفاً ریاضیاتی (و نه مبتنی بر مفاهیم مکانیک) فرمول بندی ارائه شده، هر مقدار دلخواه برای α اختیار گردد، روش پیشنهادی بدون کاستی و با دقت زیاد قادر به رهگیری نمودار پاسخ زمانی آن خواهد بود.



شکل ۳: رکورد زلزله ال سنترو مورد استفاده در بارگذاری سیستم های سازه ای

Figure 3: El-Centro earthquake ground motion record utilized for the loading of structural systems

در سیستم های غیر خطی، عواملی مانند سختی متغیر فنر یا میرایی وابسته به سرعت می توانند منجر به پدیده هایی مانند تشدید غیر خطی یا رفتار آشوبی شوند که پیش بینی آن ها با روش های تحلیلی ساده امکان پذیر نیست. این ویژگی در کاربردهای مهندسی زلزله اهمیت زیادی دارد، زیرا سازه ها اغلب تحت بارهای لرزه ای وارد ناحیه غیرارجاعی می شوند و نیاز به مدل سازی دقیق برای ارزیابی ایمنی دارند.

¹ MATLAB Software

² El-Centro earthquake

³ Magnitude Surface Wave

علاوه بر آن، روش های عددی مانند روش ارائه شده در پژوهش حاضر، می توانند اثرات غیرخطی را با دقت بالا شبیه سازی کنند و امکان بررسی حالات واقعی مانند زوال مصالح را فراهم آورند.

جدول ۴: مشخصات سیستم های خطی و غیرخطی در مدل سازی عددی

Table 4: Properties of linear and nonlinear systems in numerical models

مشخصات سیستم	مقادیر عددی
مدل سازی های عددی	اول
نوع سیستم	خطی
نوع میرایی	نامیرا
جرم $[11] \text{ (kN} \cdot \text{sec}^2/\text{cm)}$	۰/۴۵۵۹۴
دوره تناوب (پریود) طبیعی (ثانیه)	۰/۱۱۳
نسبت میرایی	۰/۰۰
ثابت فنر (kN/cm)	۱۴۰۹/۶۴۷
گام زمانی رکورد زلزله (sec)	۰/۰۲
گام زمانی تحلیل (sec)	۰/۰۲

۳-۵-۱- بررسی مدل سازی اول: سیستم خطی تحت اثر زلزله ال-سنترو

یک سیستم یک درجه آزادی نامیرای خطی تحت تحریک زلزله ال-سنترو مورد تحلیل و ارزیابی قرار گرفته است. این سیستم در لحظه آغازین، از مبدأ مختصات و از حالت سکون شروع به حرکت می کند. پاسخ سیستم خطی با روش های انتگرال دوهمال، گاوس-لژاندر-هرمیت-سه نقطه ای، نیومارک و ویلسون محاسبه شده که در شکل (۴) نشان داده شده است. بدیهی است که روش جدید قادر به محاسبه دقیق تر منحنی پاسخ با گام زمانی تحلیل $h = 0.02 \text{ sec}$ می باشد. همچنین، با علم به اینکه روش انتگرال دوهمال بسیار دقیق عمل می کند؛ اما با این وجود، این روش زمان بر می باشد. روش ارائه شده پاسخ های بسیار نزدیک به روش انتگرال دوهمال ارائه می دهند و بسیار سریع تر از آن عمل می کند. این در حالی است که روش نیومارک-بتا و ویلسون-تتا دارای انحراف قابل ملاحظه ای نسبت به انتگرال دوهمال می باشد. این خطای زیاد در روش های رایج به دلیل تغییر زمان تناوب سیستم از زمان تناوب واقعی آن در حین اجرای این الگوریتم ها رخ می دهد و غالباً در زمان تناوب های کمتر از 0.2 ثانیه عارض می شود. خطای حاضر در مراجع [۱۴، ۶۰] به خطای شیفت فاز^۱ معروف است. از آنجایی که سیستم های سازه ای اغلب دارای زمان تناوب های بزرگ تر از 0.1 ثانیه هستند، در عمل این خطا کمتر مورد توجه قرار می گیرد؛ اما برای محک زدن فرمول بندی ها بسیار حائز اهمیت می باشد.

خلاصه ای از نتایج عددی تحلیل های مدل سازی اول در جدول (۵) ارائه شده است. این جدول شامل مقادیر حداکثر پاسخ، زمان تحلیل، مجذور میانگین مربعات (RMS^2) و اختلاف مقدار مؤثر از پاسخ مرجع انتگرال دوهمال گزارش شده است. این جدول اطلاعات لازم برای مقایسه عملکرد سه روش نیومارک، ویلسون، و گاوس-لژاندر سه نقطه ای را فراهم می کند. همچنین می تواند شاخصی جهت تعیین میزان برتری، هم گرایی، دقت و سرعت اجرای روش های مورد مقایسه مذکور باشد. نتایج ارزیابی در شکل (۴) نشان می دهد که روش ارائه شده دقت و هم گرایی بالایی دارد. پروفایل کلی پاسخ که شامل موقعیت و مقادیر بحرانی پاسخ در منحنی می باشد، در روش جدیدی پیشنهادی، نشان دهنده همخوانی و تطابق قابل توجهی با منحنی پاسخ دقیق تر می باشد. این منحنی دقیق تر با رنگ قرمز در نمودارها مشخص شده و به عنوان معیاری برای مقایسه عملکرد روش های مختلف تحلیلی به کار می رود. در مقابل، پاسخ های حاصل از روش های متداول نیومارک و ویلسون، به ویژه در بازه زمانی ۶ تا ۲۵ ثانیه، انحرافات معناداری را از این پاسخ دقیق نشان می دهند. این انحرافات، دقت و اعتبار تحلیل های انجام شده با استفاده از این روش ها را کاهش داده و به روش هایی نامطمئن و خطاپذیر تبدیل می کند.

¹ Phase shift error

² Root mean square

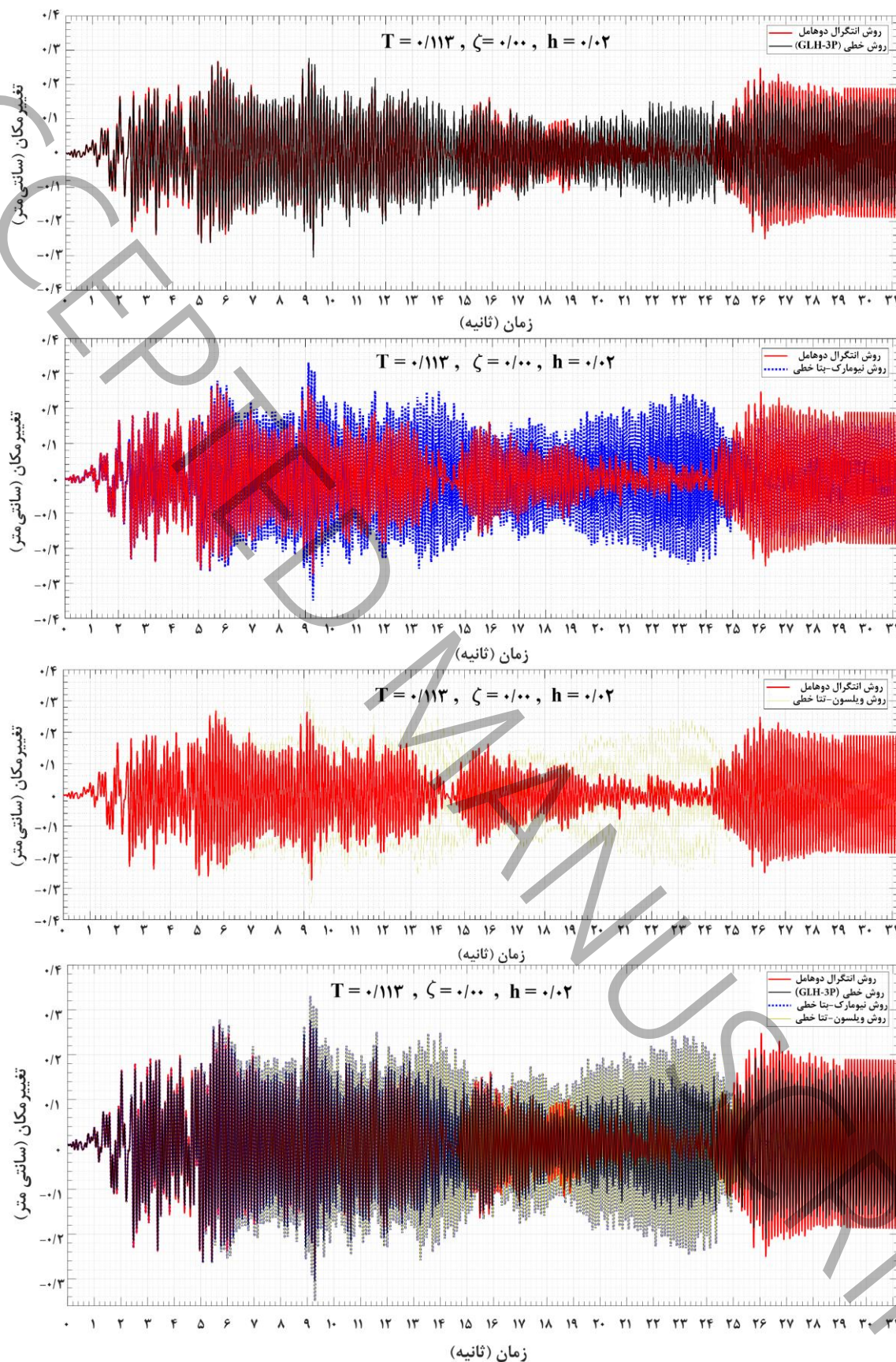


Figure 4: Time-history of seismic displacement for the linear system in Model I

۳-۵-۲- بررسی مدل سازی سری دوم: سیستم غیرخطی تحت اثر زلزله ال-سنترو

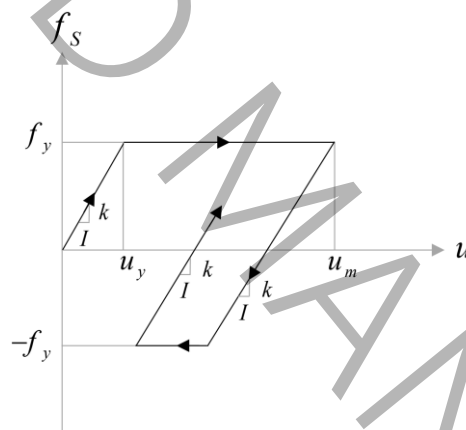
در این بخش سیستم غیرخطی تحت اثر رکورد بارگذاری ال-سنترو مورد تحلیل و ارزیابی قرار گرفته است. برای شناسایی رفتار غیرخطی مؤلفه فنر، ابتدا باید حداکثر تغییر مکان سیستم با رفتار خطی را محاسبه شود. برای حصول به برآوردی دقیق تر در این تحلیل، پاسخ خطی را با گام ریزتر $h = 0.02 \text{ sec}$ ، محاسبه می شود و تغییر شکل بیشینه الاستیک $u_{\max, \text{elastic}}$ به دست آورده می شود. همان طور که در شکل (۶) نشان داده شده است، تغییر شکل بیشینه برابر با $u_{\max, \text{elastic}} = 0.0956518 \text{ cm}$ محاسبه شد که در لحظه $t = 2/462 \text{ sec}$ رخ می دهد. مقدار نیروی تسلیم به صورت μf_s می باشد که در آن مؤلفه μ ضریب شکل پذیری و مؤلفه f_s نیروی مقاوم بیشینه می باشد که در سیستم های الاستیک خطی به صورت زیر تعریف می شود:

$$f_s = k u_{\max, \text{elastic}} = 2812 / 467 \times 0.0956518 \text{ cm} = 269 / 0.175 \text{ kN} \quad (36)$$

که در آن با فرض $\mu = 0.4$ ، می توان نیروی تسلیمی فنر سیستم را به صورت زیر نوشت:

$$f_y = \mu f_s = 0.4 \times 269 / 0.175 = 107 / 0.670 \text{ kN} \quad (37)$$

منحنی رفتار غیرخطی فنر در سیستم مورد بررسی در شکل (۵) معرفی می شود. شکل (۷) نیز پاسخ های غیرخطی به دست آمده از روش ارائه شده را با روش های غیرخطی نیومارک-بتا و ویلسون-تتا مقایسه می کند. به علاوه، منحنی رفتار هیترزیس سیستم غیرخطی در شکل (۸) ارائه شده است.



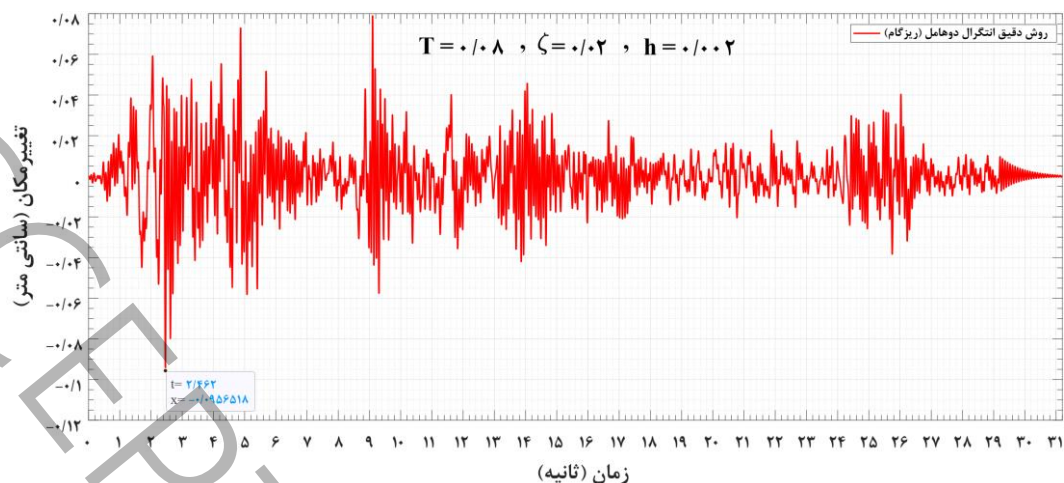
شکل ۵: مدل رفتاری الاستوپلاستیک نیرو-تغییر شکل فنر در مدل دوم

Figure 5: Force-displacement elasto-plastic behavior of the spring in Model II

نتایج به دست آمده به وضوح نشان می دهد، تطابق بهتری بین پاسخ به دست آمده از روش ارائه شده و پاسخ حاصل از تحلیل دقیق وجود دارد. این نتایج در جدول (۶) ارائه شده است. مقادیر اوج نمودار تغییر مکان نیز مشابهت بالایی با منحنی دقیق دارد. روش ارائه شده در مقایسه با روش نیومارک-بتا از دقت بالایی برای محاسبه اندازه گام $h = 0.02 \text{ sec}$ برخوردار می باشد. از طرفی در روش ارائه شده نیازی به عملیات وارون ماتریس در چرخه تکرار نیست؛ زیرا صرفاً از مقادیر قبلی برای به روز رسانی پاسخ استفاده می شود. این امر در صورتی است که روش نیومارک-بتا به یک سری عملیات معکوس سازی برای فرمول بندی ضمنی نیاز داشته باشد. باتوجه به شکل (۸) می توان دریافت، این روش نه تنها در محاسبه پاسخ های گذرا سیستم های غیرخطی کارآمد است، بلکه پایداری عددی بالاتری را در بازه های وسیع مؤلفه ای فراهم می آورد. به طور خاص، در مقایسه با منحنی های دیگر (که شیب های ملایم تری نشان می دهند و نقاط پرش را صاف سازی می کنند)، روش پیشنهادی می تواند نوسانات بسامد بالا را بدون ناپایداری^۲ جذب کند، که این ویژگی برای کاربردهایی مانند شبیه سازی ارتعاشات غیرخطی مهم بوده و به عنوان شواهدی تجربی، بر پتانسیل روش جدید در حل چالش های عددی پیچیده تأکید دارد.

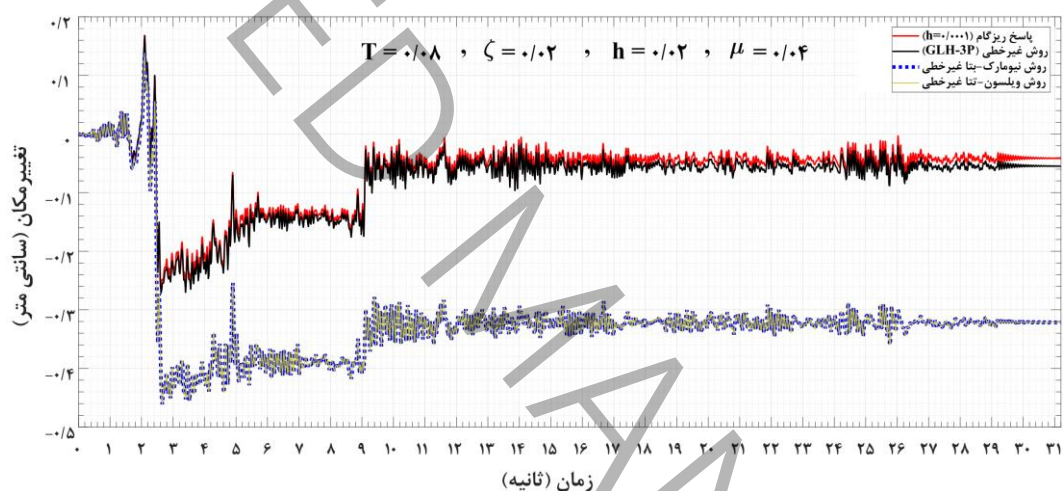
¹ Transient Responses

² Instability



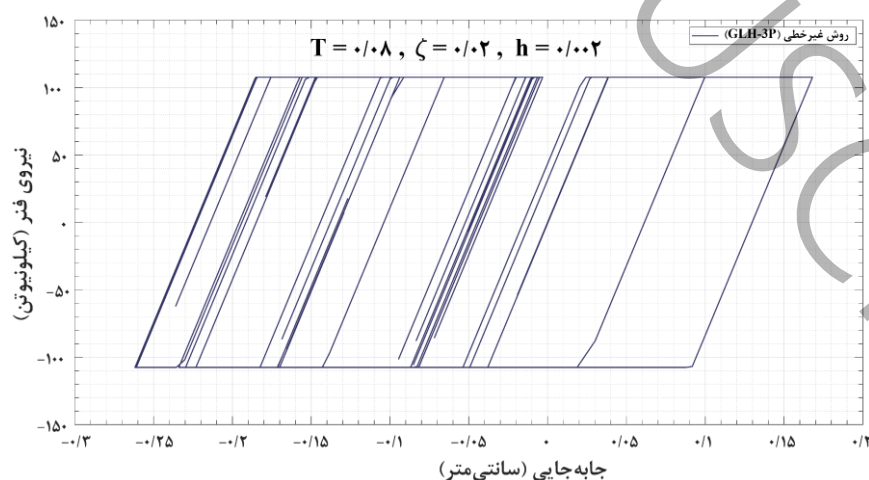
شکل ۶: پاسخ لرزه‌ای ریزگام تغییر مکان-زمان سیستم خطی در مدل دوم

Figure 6: Detailed fine mesh displacement time-history for the linear system (Model II)



شکل ۷: پاسخ لرزه‌ای تغییر مکان-زمان سیستم غیرخطی در مدل دوم

Figure 7: Time-history of seismic displacement for the nonlinear system in Model II



شکل ۸: منحنی رفتار هیستریزیس جابجایی-نیروی فنر در سیستم غیرخطی در مدل دوم

Figure 8: Force-displacement hysteresis behavior curve of the spring in the nonlinear system (Model II)

۴- تحلیل نتایج و جمع بندی

مقادیر حداکثر پاسخ (تغییر مکان، سرعت و شتاب بیشینه)، زمان تحلیل، مجذور میانگین مربعات و درصد اختلاف مجذور میانگین مربعات از پاسخ دقیق روش های ارزیابی شده در مدل های اول و دوم به ترتیب در جدول (۵) و جدول (۶) خلاصه شده اند. باتوجه به جدول (۵)، در ارزیابی سیستم های خطی روش نیومارک-بتا سریع ترین و انتگرال دو هامل دقیق ترین روش می باشند. در جدول (۶) نیز همانند مورد قبلی، در ارزیابی سیستم های غیر خطی برای حل معادلات حرکت، روش ارائه شده از نظر سرعت هم پای روش نیومارک-بتا نمی باشد؛ اما از نظر دقت بسیار دقیق و با خطای کمتری نسبت به روش دقیق عمل می کند. در حالی که خطای سیستم روش نیومارک-بتا غیر خطی بسیار زیاد و غیر قابل قبول می باشد. باتوجه به مزایای ذکر شده، روش ارائه شده برای حل معادلات دیفرانسیل سیستم های غیر خطی بسیار مناسب می باشد. این روش از نظر دقت بسیار دقیق بوده و می تواند پاسخ سیستم های غیر خطی با رفتار پیچیده را با دقت بالایی محاسبه کند. در مقابل، روش نیومارک-بتا در سیستم های غیر خطی بسیار ناپایدار است و نمی تواند پاسخ دقیق و مطلوبی را ارائه دهد. میزان خطای مجذور میانگین مربعات روش ارائه شده در مدل سازی اول نسبت به مقدار دقیق حاصل از انتگرال دو هامل کم بوده و حدوداً ۰.۴٪ است. اما این میزان خطا در روش نیومارک بیش از ۱۸٪ می باشد که این امر نشان از برتری روش ارائه شده در تحلیل خطی می باشد. در سیستم های غیر خطی نیز همان طور که پیش بینی می شد روش ارائه شده بهتر عمل می کند. به طوری که خطای مجذور میانگین مربعات روش جدید حدوداً ۱۸٪ است؛ ولی خطای روش نیومارک و ویلسون بیش از ۲۷۳٪ می باشد که در عمل نتایج آنها مردود و غیر قابل اعتماد بوده و دارای خطای قابل ملاحظه ای است. نکته بسیار حائز اهمیت در شکل (۸) این است که روش جدید پیشنهادی در شرایط یکسان و با طول گام تحلیل یکسان، قادر است نقاط پرش در منحنی پاسخ را با دقت بیشتری نسبت به سایر روش های رایج تشخیص دهد. این روش از نظر دقت بسیار دقیق بوده و می تواند پاسخ سیستم های غیر خطی را با دقت بالایی محاسبه کند.

جدول ۵: مقادیر حداکثر پاسخ، زمان تحلیل، و اختلاف از پاسخ دقیق سیستم خطی یک درجه آزادی در مدل اول

Table 5: Peak response, RMS values, and error relative to exact solution for linear SDOF system (Model I)

مؤلفه های ارزیابی	انتگرال دو هامل (دقت-بالا)	گاوس لژاندر هرمیت سه نقطه ای (روش ارائه شده)	نیومارک-بتا (روش گام به گام)	ویلسون-تتا (روش گام به گام)
تغییر مکان نسبی بیشینه (cm)	۰/۲۷۳۱	۰/۳۰۳۹	۰/۳۴۹۵	۰/۳۴۹۵
سرعت نسبی بیشینه (cm/sec)	---	۱۵/۴۰۰۹	۱۷/۹۳۱۱	۱۷/۹۳۱۱
شتاب نسبی بیشینه (cm/sec ^۲)	---	۸۴۲/۶۰۱۶	۹۶۹/۸۵۶۷	۹۶۹/۸۵۶۷
تعداد گام تکرار شونده	۱/۰۰۰۰	۱۰/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰
مجذور میانگین مربعات (RMS)	۰/۱۳۴۱	۰/۱۳۹۹	۰/۱۵۹۴	۰/۱۵۹۴
اختلاف مجذور میانگین مربعات از دقت-بالا	۰/۰۰۰۰	۴/۳۲۵۰	۱۸/۷۹۰۰	۱۸/۷۹۰۰
زمان تحلیل (sec)	۰/۲۷۳۱	۰/۰۰۶۹	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۲۳

جدول ۶: مقادیر حداکثر پاسخ، زمان تحلیل، و اختلاف از پاسخ دقیق سیستم غیر خطی یک درجه آزادی در مدل دوم

Table 6: Peak response, RMS values, and error relative to exact solution for nonlinear SDOF system (Model II)

ویلسون-تتا (روش گام به گام)	نیومارک-بتا (روش گام به گام)	گاوس لژاندر هرمیت سه نقطه ای (روش ارائه شده)	پاسخ ریز گام (دقت-بالا)	مؤلفه های ارزیابی
۰/۴۶۱۳	۰/۴۶۱۲	۰/۲۶۹۷	۰/۲۶۱۸	تغییر مکان نسبی بیشینه (cm)
۷/۱۸۱۲	۷/۱۸۱۵	۵/۶۹۷۲	۵/۷۶۱۱	سرعت نسبی بیشینه (cm/sec)
۳۱۲/۳۹۹۶	۳۱۲/۳۹۱۵	۲۵۱/۰۰۵۴	۳۱۲/۳۶۸۹	شتاب نسبی بیشینه (cm/sec ^۲)
۱۰/۰۰۰۰	۱۰/۰۰۰۰	۱۰/۰۰۰۰	۱۰/۰۰۰۰	تعداد گام تکرار شونده
۰/۳۲۷۸	۰/۳۲۸۰	۰/۱۰۳۹	۰/۰۸۷۹	مجذور میانگین مربعات (RMS)
۲۷۳/۳۴۸۰	۲۷۳/۴۶۲۰	۱۸/۳۳۷۰	۰/۰۰۰۰	اختلاف مجذور میانگین مربعات از دقت-بالا
۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۹۵	۰/۰۰۲۵	۰/۳۷۵۲	زمان تحلیل (sec)

۵- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، یک فرمول‌بندی عددی ساده و کارآمد تحت عنوان روش گاوس-لژاندر-هرمیت-سه‌نقطه‌ای برای تحلیل تاریخچه زمانی سیستم‌های خطی و غیرخطی یک درجه آزادی ارائه شد. انتگرالگیر و درونیاب‌های دومتبقه برای این فرمول‌بندی استخراج و معرفی گردید. عملکرد این روش جدید به طور عملی در دو مثال عددی مورد محک و مقایسه قرار گرفت. مشاهده گردید که به‌طور کمی، روش ارائه‌شده خطای مجذور میانگین مربعات را در سیستم‌های خطی به ۰.۴٪ (حدود ۱۸٪ در روش نیومارک) و در سیستم‌های غیرخطی به ۱۸٪ (حدود ۲۷۳٪ در روش نیومارک) کاهش می‌دهد. از مهم‌ترین مزایای روش ارائه‌شده، عدم تغییر در فرمول‌بندی برای تحلیل سیستم‌های خطی و غیرخطی می‌باشد. به عبارتی، برخلاف روش نیومارک-بتا، روش ارائه‌شده مکانیسم جداگانه‌ای را برای تحلیل سیستم‌های خطی استفاده نمی‌کند. از طرفی، نتایج ارزیابی و مقایسه روش ارائه‌شده نشان می‌دهد که این روش به‌طور رضایت‌بخشی پاسخ لرزه‌ای سیستم‌های یک درجه آزادی میرایی خطی و غیرخطی را محاسبه می‌کند. براین اساس، روش پیشنهادی می‌تواند به‌عنوان یک ابزار تحلیلی قابل‌اعتماد در محاسبه اثرات لرزه‌ای و تحلیل تاریخچه زمانی برای سیستم‌های میرایی خطی و غیرخطی معرفی گردد. مزایای روش ارائه‌شده را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

- (۱) روش پیشنهادی زمان محاسباتی کمتری نسبت به انتگرال دوهمال و روش نیومارک-بتا دارد.
 - (۲) روش ارائه‌شده از نظر دقت، پایداری و هم‌گرایی در مقایسه با روش‌های مورد بررسی بهتر عمل می‌کند.
 - (۳) روش جدید در شرایط یکسان بهتر از سایر روش‌ها قادر به تشخیص نقاط پرش در منحنی پاسخ می‌باشد.
- در برابر این مزایا، معایبی نیز می‌توان به این روش متصور بود. معایب روش ارائه‌شده را نیز می‌توان چنین برشمرد:
- (۱) در تحلیل سیستم‌های بسامد بالا روش پیشنهادی دارای هزینه محاسباتی بالا و نیازمند انجام حلقه‌های تکرار بیشتری می‌باشد.
 - (۲) فرمول‌بندی حاضر دارای پیچیدگی ظاهری بیشتری است که ممکن است توسط افراد مبتدی به‌سادگی قابل‌پیاده‌سازی نباشد. نهایتاً، مطالعات بیشتر جهت توسعه، بهبود و ارتقا روش ارائه‌شده برای محاسبه پاسخ لرزه‌ای تاریخچه زمانی در حال انجام می‌باشد که در کارهای پیش‌رو ارائه خواهند شد.

مراجع

- [1] K.-J. Bathe, Finite element procedures, 2nd ed., Prentice Hall, New Jersey, USA, 1996.
- [2] R. Clough, J. Penzien, Dynamics of Structures, 3rd ed., Computers & Structures, Inc, Berkeley, California, USA, 1995.
- [3] J. Humar, Dynamics of structures, 3rd ed., CRC Press (Taylor & Francis Group), London, UK, 2012.
- [4] J. Houbolt, A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, Journal of the Aeronautical Sciences, 17(9) (1950) 540-550. <https://doi.org/10.2514/8.1722>
- [5] M. Dokainish, K. Subbaraj, A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—I. Explicit methods, Computers & Structures, 32(6) (1989) 1371-1386. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(89\)90314-3](https://doi.org/10.1016/0045-7949(89)90314-3)
- [6] D. Karabalis, D. Beskos, Numerical methods in earthquake engineering, First ed., Computational Mechanics Publications, Southampton, UK, 1997.
- [7] N.M. Newmark, A method of computation for structural dynamics, Journal of the engineering mechanics division, 85(3) (1959) 67-94. <https://doi.org/10.1061/taceat.0008448>

- [8] A. Veletsos, N. Newmark, C. Chelapati, Deformation spectra for elastic and elastoplastic systems subjected to ground shock and earthquake motions, *Proceedings of the 3rd world conference on earthquake engineering*, 2(2) (1965) 663-682. <https://doi.org/10.13140/RG.2.1.4008.8167>
- [9] R.R. Craig Jr, A.J. Kurdila, *Fundamentals of structural dynamics*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, UK, 2006.
- [10] P.L. Gatti, *Applied structural and mechanical vibrations: Theory and Methods*, 2nd ed., CRC Press (Taylor & Francis Group), London, UK, 2014.
- [11] A. Chopra, *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, 4th ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2012.
- [12] M. Géradin, D.J. Rixen, *Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics*, 3rd ed., John Wiley & Sons, Chichester, West Sussex, UK, 2014.
- [13] J.T. Katsikadelis, *Dynamic Analysis of Structures: Theory and Application*, 2nd ed., Symmetria Publications, Athens, Greece, 2012.
- [14] P. Mario, W. Leigh, *Structural dynamics: Theory and computation*, 5th ed., Springer, New York, USA, 2004.
- [15] S.S. Rao, *Mechanical Vibrations in SI Units*, 2nd ed., Pearson Higher Ed, London, UK, 2017.
- [16] J.W. Tedesco, W.G. McDougal, C.A. Ross, *Structural Dynamics: Theory and Applications*, First ed., Addison Wesley Longman, Menlo Park, California, USA, 1999.
- [17] H.M. Hilber, T.J. Hughes, R.L. Taylor, Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 5(3) (1977) 283-292. <https://doi.org/10.1002/EQE.4290050306>
- [18] L. Brusa, L. Nigro, A one-step method for direct integration of structural dynamic equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(5) (1980) 685-699. <https://doi.org/10.1002/nme.1620150506>
- [19] O. Zienkiewicz, W. Wood, N. Hine, R. Taylor, A unified set of single step algorithms. Part 1: General formulation and applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(8) (1984) 1529-1552. <https://doi.org/10.1002/nme.1620200814>
- [20] W. Wood, A unified set of single step algorithms. Part 2: Theory, *International journal for numerical methods in engineering*, 20(12) (1984) 2303-2309. <https://doi.org/10.1002/nme.1620201210>
- [21] C. Hoff, P. Pahl, Development of an implicit method with numerical dissipation from a generalized single-step algorithm for structural dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(3) (1988) 367-385. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90053-9](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90053-9)
- [22] J. Chung, G.M. Hulbert, A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method, *Journal of Applied Mechanics*, 60(2) (1993) 371-375. <https://doi.org/10.1115/1.2900803>

- [23] S.Y. Chang, Studies of Newmark method for solving nonlinear systems:(I) basic analysis, Journal of the Chinese Institute of Engineers, 27(5) (2004) 651-662. <https://doi.org/10.1080/02533839.2004.9670913>
- [24] K.-J. Bathe, M.M.I. Baig, On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics, Computers & Structures, 83(31-32) (2005) 2513-2524.
- [25] K.-J. Bathe, Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics: a simple implicit time integration scheme, Computers & structures, 85(7-8) (2007) 437-445. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2006.09.004>
- [26] K. Bathe, G. Noh, Insight into an implicit time integration scheme for structural dynamics, Computers & Structures, 90(98) (2012) 1-6. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.01.009>
- [27] G. Noh, K.-J. Bathe, Further insights into an implicit time integration scheme for structural dynamics, Computers & Structures, 202(1) (2018) 15-24. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.02.007>
- [28] G. Noh, K.-J. Bathe, The Bathe time integration method with controllable spectral radius: The ρ_∞ -Bathe method, Computers & Structures, 212(1) (2019) 299-310. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.11.001>
- [29] J. Zhang, Y. Liu, D. Liu, Accuracy of a composite implicit time integration scheme for structural dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 109(3) (2017) 368-406. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.5291>
- [30] J. Zhang, A-stable linear two-step time integration methods with consistent starting and their equivalent single-step methods in structural dynamics analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 122(9) (2021) 2312-2359. <https://doi.org/10.1002/nme.6623>
- [31] J. Zhang, A-stable two-step time integration methods with controllable numerical dissipation for structural dynamics, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 121(1) (2020) 54-92. <https://doi.org/10.1002/nme.6188>
- [32] M. Babaei, Optimized Gauss–Legendre–Hermite 2-point (O-GLH-2P) method for nonlinear time-history analysis of structures, Meccanica, 59(3) (2024) 305-332. <https://doi.org/10.1007/s11012-023-01752-4>
- [33] M. Babaei, M.R. Alidoost, M.R. Hanafi, A Novel Numerical Method for Nonlinear Time History Analysis of MDOF Structures: Newton-Cotes-Hermite-4Point, Journal of Structural and Construction Engineering, 1(1) (2023) 1-20. [In Persian]. <https://doi.org/10.22065/jsce.2023.400538.3134>
- [34] M. Babaei, M.R. Hanafi, A Novel Method for Nonlinear Time-History Analysis of Structural Systems: Improved Newton–Cotes-Hermite-5P Method, Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering, 1(1) (2024) 1-14. <https://doi.org/10.1007/s40996-024-01345-5>
- [35] M. Babaei, M. Jalilkhani, S. Ghasemi, S. Mollaei, New Methods for Dynamic Analysis of Structural Systems under Earthquake Loads, Journal of Rehabilitation in Civil Engineering, 10(3) (2022) 81-99. <https://doi.org/10.22075/jrce.2021.23323.1506>
- [36] M. Hanafi, M. Babaei, P. Narjabadifam, New Formulation for dynamic analysis of nonlinear time-history of vibrations of structures under earthquake loading, Journal of Civil and Environmental Engineering, 28(2) (2024) 1-16. [In Persian]. <https://doi.org/10.22034/ceej.2023.54564.2209>

- [37] M. Babaei, M. Jalilkhani, S. Mollaei, A Numerical Method for Estimating the Dynamic Response of Structures, *Journal of Civil and Environmental Engineering*, 55(1) (2025) 1-19. <https://doi.org/10.22034/jcee.2021.41770.1963>
- [38] F. Moodi, M.R. Hanafi, Z. Shariatinia, Toward high sustainability using fully recycled geopolymer concrete: mechanical, rheological, and microstructural properties, *RSC Advances*, 15(28) (2025) 22953-22971. <https://doi.org/10.1039/D5RA02249E>
- [39] A. Atasoy, M.B. Ghalehjoogh, A. Demirkapi, A Novel Approach to Linear and Nonlinear Time-History Analysis of Structures: Gauss–Lobatto–Hermite 4-Point (GLH-4P) Method, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 49(10) (2024) 14205-14224. <https://doi.org/10.1007/s13369-024-08808-x>
- [40] S. Mollaei, A. Fahmi, D. Jahani, Z. Babaei Golsefidi, R. Babaei, M.R. Hanafi, A Predictive Model for the Strength of a Novel Geopolymer Construction Material Produced by Autoclaved Aerated Concrete Waste, *International Journal of Sustainable Construction Engineering and Technology*, 14(1) (2023) 148-167. <https://doi.org/10.30880/ijscet.2023.14.01.015>
- [41] A. Ekinici, M. Hanafi, P.M.V. Ferreira, Influence of Initial Void Ratio on Critical State Behaviour of Poorly Graded Fine Sands, *Indian Geotechnical Journal*, 50(5) (2020) 689-699. <https://doi.org/10.1007/s40098-020-00416-4>
- [42] M.R. Hanafi, H. Rahimpour, S. Zinatloo-Ajabshir, F. Moodi, A. Fahmi, Performance enhancement, life cycle assessment, and feature analysis of wheat starch-based NaCl-binder as a sustainable alternative to OPC mortar, *Results in Engineering*, 24(1) (2024) 103281. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2024.103281>
- [43] A. Fahmi, S.R. Zavaragh, M.R. Hanafi, H. Rahimpour, S. Zinatloo-Ajabshir, A. Asghari, Facile preparation, characterization, and investigation of mechanical strength of Starchy NaCl-binder as a lightweight construction material, *Scientific Reports*, 13(1) (2023) 19042. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-46536-8>
- [44] M. Hanafi, A. Abki, A. Ekinici, J.d.J.A. Baldovino, Mechanical properties of alluvium clay treated with cement and carbon fiber: relationships among strength, stiffness, and durability, *International Journal of Pavement Engineering*, 24(1) (2023) 2094928. <https://doi.org/10.1080/10298436.2022.2094928>
- [45] M.R. Hanafi, H. Rahimpour, A. Gholampour, S.H. Ghaffar, F. Moodi, H. Zarrabi, A. Fahmi, Geopolymer from Sand Washing Waste: Mechanical, Rheological, and Sustainability Perspectives, *Results in Engineering*, 1(1) (2025) 108060. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.108060>
- [46] A. Ekinici, J. Arrieta Baldovino, E. Aydın, M. Hanafi, Effect of glass fibre on the strength and durability of artificially cemented alluvial clay, *International Journal of Geotechnical Engineering*, 18(3) (2024) 275-290. <https://doi.org/10.1080/19386362.2024.2359763>
- [47] Q.H. Nguyen, M. Hanafi, J.-P. Merkl, J.-B. d'Espinose de Lacaillerie, Evolution of the microstructure of unconsolidated geopolymers by thermoporometry, *Journal of the American Ceramic Society*, 104(3) (2021) 1581-1591. <https://doi.org/10.1111/jace.17543>

- [48] M. Hanafi, I. Javed, A. Ekinici, Evaluating the strength, durability and porosity characteristics of alluvial clay stabilized with marble dust as a sustainable binder, *Results in Engineering*, 25(1) (2025) 103978. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2025.103978>
- [49] R. Malathy, G. Bhat, U. Dewangan, An improved iterative technique for inelastic time history analysis of single degree of freedom (SDOF) elasto-plastic system, *Journal of Building Pathology and Rehabilitation*, 7(1) (2022) 102-110. <https://doi.org/10.1007/s41024-022-00243-5>
- [50] M. Babaei, J. Farzi, Derivation of weighting rules for developing a class of A-stable numerical integration scheme: α I-(2+ 3) P method, *Journal of Difference Equations and Applications*, 29(4) (2023) 1-30. <https://doi.org/10.1080/10236198.2023.2219785>
- [51] M. Babaei, A Swarm-Intelligence Based Formulation for Solving Nonlinear ODEs: $\gamma\beta$ II-(2+3)P method, *Applied Soft Computing*, 1(1) (2024) 111424. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2024.111424>
- [52] M. Babaei, A computational approach to developing two-derivative ODE-solving formulations: $\gamma\beta$ I-(2+3)P method, *Journal of Computational Science*, 91(1) (2025) 102653. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2025.102653>
- [53] M. Babaei, An efficient ODE-solving method based on heuristic and statistical computations: α II-(2+ 3)P method, *The Journal of Supercomputing*, 80(14) (2024) 20302-20345. <https://doi.org/10.1007/s11227-024-06137-2>
- [54] M. Babaei, A swarm-intelligence based formulation for solving nonlinear ODEs: $\gamma\beta$ II-(2+3)P method, *Applied Soft Computing*, 162(1) (2024) 111424. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2024.111424>
- [55] A.K. Chopra, *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, 4th ed., Pearson, Upper Saddle River, New jersey, USA, 2017.
- [56] A. Isidori, *Nonlinear control systems: an introduction*, 3rd ed., Springer, London, UK, 1985.
- [57] S.A. Billings, *Nonlinear system identification: NARMAX methods in the time, frequency, and spatio-temporal domains*, First ed., John Wiley & Sons, New York, USA, 2013.
- [58] K. Atkinson, W. Han, D.E. Stewart, *Numerical solution of ordinary differential equations*, First ed., John Wiley & Sons, New York, USA, 2009.
- [59] J. Stoer, R. Bulirsch, R. Bartels, W. Gautschi, C. Witzgall, *Introduction to numerical analysis*, Springer, New York, USA, 1980.
- [60] R. Clough, J. Penzien, *Dynamics of Structures*, 3rd ed., Computers & Structures, Inc., California, USA, 2003.

ACCEPTED MANUSCRIPT