

Damage Identification in Conical Shell Structures Using Analytical Methods Based on Free Vibration of the Structure

Ehsan Aghaahmadi¹, Reza Taghipour^{1*}, Mohsen Bozorgnasab¹, Mohammad Mollaalipour²

¹ Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Technology, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

² Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering and Technology, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.

ABSTRACT: Structural health monitoring and detection of damaged areas in a structure is essential for surveying its performance during the structural life. Because not paying attention to the local damages is reduced the efficiency of the structural performance and could result in increasing the damaged intensity due to natural or artificial loads and consequently collapse of entire structure. The main goal of this research is to propose a model using analytical methods and developing it to identify the damaged areas in conical shells made of functionally graded materials placed on an elastic substrate. Since the mode shapes are sensitive parameters to damage presence in the elements, they are used for damage detection process of the structure. The governing equations have been extracted based on the first-order shear theory in Maple software. The analytical method uses the power series to obtain the natural frequencies and mode shapes of the structure. In order to ensure the performance of the proposed model, the results of the modeling have been verified with the results of other references and those of the numerical model built in Abaqus software. Finally, taking into account various types of support conditions and different stiffnesses for the substrate, the damaged elements of the conical shell have been specified considering different damage scenarios. Investigations show the proper performance of the proposed model in detecting the damaged area.

Review History:

Received: Apr. 30, 2024

Revised: Apr. 19, 2025

Accepted: Sep. 16, 2025

Available Online: Oct. 02, 2025

Keywords:

Functionally Graded Materials (FGM)

Conical Shell

Damage Identification

First-Order Shear Deformation Theory

Modal Derivatives Shapes

1- Introduction

Identification of local damages in structures is of particular importance. Because ignoring them reduces the efficiency of the structure and may be aggravated by loading from natural or artificial hazards and ultimately lead to the destruction of the entire structure. The effects of local damage to the structure are changes in the strength and stiffness at that location. These changes affect the static and dynamic behavior of the structure, which leads to changes in its dynamic and static responses, including its natural frequencies and mode shapes. As a result, by having the modal information and its derivatives in the healthy and damaged states of the structure, it is possible to check the location of the damage. In 2016, Alipour presented a new approach for the static analysis of circular sandwich plates based on layering, which is very similar to the three-dimensional elastic theory. Each layer of the sandwich plate is made of Functionally Graded Material (FGM). The boundary conditions can be on the elastic bed, which is assumed to be non-uniform normal stress or tensile shear. The transverse shear, normal stress, and boundary conditions at the top and bottom of the sandwich plate, as well as between the layers, are investigated[1].

In 2019, Mohammadezazadeh and Jafari studied the

active vibration behavior of a composite layer of simple rotating cylindrical shells confined in a magnetic layer using the first-order shear deformation theory. In this study, the details of the influence of various parameters on the damping characteristics and response of the vibration behavior were investigated[2] In 2020, Agha Ahmadi et al. studied the free vibration behavior and also identified the damaged area of the cylindrical shell structure[3].

In 2024, Fan and Lezgi [4] investigated an advanced and efficient shell theory with only seven displacement field variables. In this study, an eight-node quadrilateral shell element was used to solve the dynamic equations of motion. The accuracy of the proposed shell theory and the developed finite element formulation were evaluated through free vibration analysis of cross-laminated, angled, and soft-core sandwich multilayer shells. In 2024, Yao and Lezgi[5] presented a new theory based on the shear deformation of the shell with seven unknown parameters, and the governing equations of the shells under static loads were solved by developing an eight-node shell element. Also, the kinematic relations presented for the multilayer shell model were expressed based on the double superposition derivative.

As can be seen in previous studies, research conducted on

*Corresponding author's email: r.taghipour@umz.ac.ir

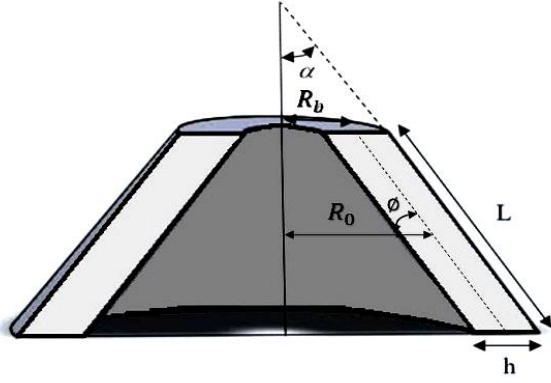


Fig. 1. Geometry of incomplete conical

conical shells has focused on the modeling process and has not addressed the health monitoring and damage caused in such structure. Also, studies have been conducted on determining the location of damage on other structures such as beams and flat plates, etc. In this research, analytical modeling has been done on conical shells with FGM materials and the presence of damage and its location have been identified. First, the governing equations of the structure were extracted based on the first-order shear theory in Maple software, and then the mode shapes and natural frequencies were obtained using the power series method. The model was validated by comparing the results with those of other references and the numerical model built in Abaqus software. The modeling process and the detection of the damaged location of the shape were evaluated by considering different damage scenarios in different support conditions and different stiffnesses for the bed.

2- Governing equations for a FGM conical shell

Figure (1) shows the geometric characteristics of the conical shell.

The equations of motion may be calculated using the principle of potential energy minimization.

$$\delta U + \delta K + \delta V = 0 \quad (1)$$

where U is the strain energy, K is the kinetic energy, and V is the energy due to the external load. Applying this principle leads to three equations of motion for the conical shell:

$$\delta K = - \int_V \rho \{ \ddot{U} \delta U + \ddot{W} \delta W \} dV, \quad (2)$$

$$\delta U = \int_V \left\{ \sigma_x \delta (u_{0,x} + z \psi_{x,x}) + \sigma_\theta \delta \left(\frac{w}{R_0} \right) + \tau_{xz} \delta (\psi_x + w_{,x}) \right\} dV$$

$$\delta V = \int_V [k_w (\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2) w \delta w] dA$$

Different types of boundary conditions for the conical shell are expressed as follows:

$$\text{Simple support: } U_x = 0, M_x = 0, w_x = 0,$$

$$\text{Free end: } N_x = 0, M_x = 0, Q_x = 0, \quad (3)$$

$$\text{Fixed end: } u_x = 0, \psi_x = 0, w_x = 0,$$

Taylor power series is used to solve the equations, and the unknowns are presented based on Taylor power series as follows:

$$u_x = \sum_{i=0}^{\infty} U_i (x - x_0)^i$$

$$\psi_x = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i^{(x)} (x - x_0)^i \quad (4)$$

$$w_x = \sum_{i=0}^{\infty} W_i (x - x_0)^i$$

By using Taylor's power series and by inserting the relevant equations, the governing equations and boundary conditions can be expressed as a series, respectively. The number of initial boundary conditions of the cone is 3 relations, the final boundary conditions of the cone are 3 relations, and if the conical shell consists of several parts, the continuity conditions at the junction of each part are 6 relations. In total, there are $6n$ relationships for the boundary conditions and the continuity of the cone, where n is the number of sections along the length of the cone. These relations can be expressed as matrix form. Therefore, by taking the determinant of the matrix, the natural frequency for the conical shell is obtained.

3- Verification of the numerical model of the conical shell

To verify the accuracy of the proposed model used, the results obtained from the proposed model are compared with the results in reference[6] and also with the results of numerical modeling in Abaqus software. The specifications of the conical shell materials used in the validation study are presented in Table1).

In order to model in Abaqus software, three-dimensional elasticity theory is used in axisymmetric mode. For modeling, 2500 axially symmetric 8-node elements (CAX8R) have been used. The number of elements has been determined based on sensitivity analysis. in such a way that by reducing

Table 1. Characteristics of conical shell materials

Density (kg / m^3)	Modulus of elasticity (GPa)	Poisson's ratio
5700	168	0.3

the dimensions of the element, there has been no significant change in the response. The results obtained from the proposed model are in good agreement with the results in reference[6] and Abaqus software. It is worth noting that the finite element method was used in reference[6] and Abaqus software, so the results obtained are very close to each other. Also, the results of the proposed model for the FGM conical shell are in acceptable agreement with the results of Abaqus software.

4- Investigating the performance of the proposed numerical model at damage locations with different scenarios

In the following study, damage was created in different layers of a FGM conical shell and the dimensionless frequency of the first mode of undamaged and damaged structures was presented for different support conditions and for different stiffness coefficients. The corresponding damage has been applied through a reduction in the modulus of elasticity of the materials of the layers. The damage scenarios are selected in such a way that the accuracy of the model for single, double and multiple failures as well as the proximity of damaged elements with different error percentages is examined. By examining the results, it is observed that the frequency of the first mode of the damaged structure decreases compared to the frequency of the undamaged mode in all scenarios, and the frequency increases with the increase in the stiffness coefficient of the elastic bed, which increases the rigidity of the bed. Therefore, the changes of this parameter for the first mode shape of the damaged structure in different damage scenarios are examined. The following figure shows the changes in the third derivative of the first mode shape along the cone for the damaged structure for each of the scenarios. As can be seen, the third derivative of the displacement for the damaged structure is shown in the third element with stiffness coefficients of 0, 50 and 100; as can be seen, the third derivative has a discontinuity at the beginning and end of the third element (at $x=0.35m$ and $x=0.65m$ relative to the beginning of the cone), which indicates damage in this element, and in other parts, the diagram is continuous, indicating the absence of damage in other elements of the structure. It is also observed that with a decrease in the bed coefficient, the discontinuity at the desired points is more noticeable. The above cases are valid for both fixed and simple support cases.

According to what has been shown, the proposed method for modeling FGM conical shells will be able to detect the extent of damage and can be used in real structures.

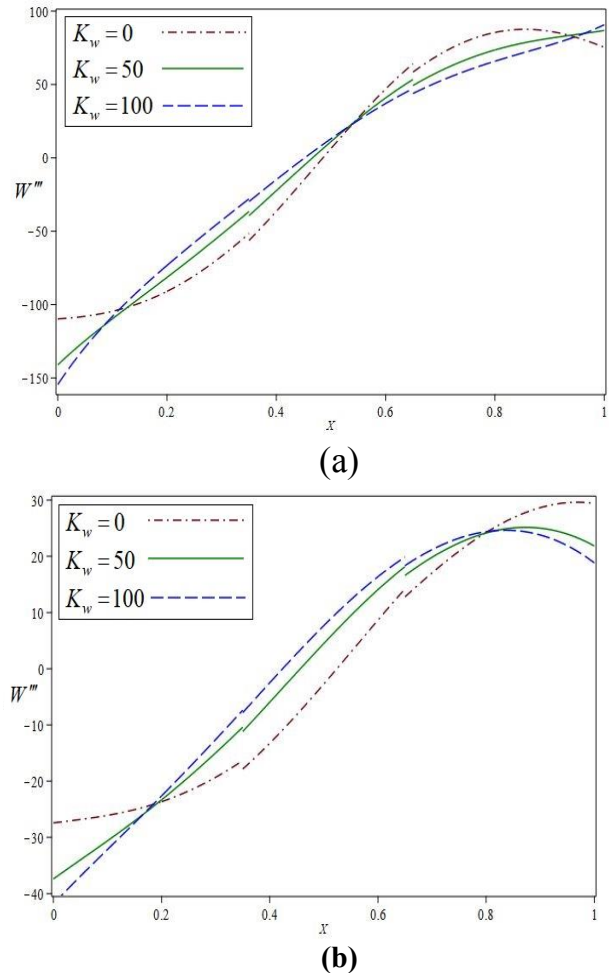


Fig. 2. Third derivative values of the first mode frequency for scenario (1); a. for fixed supports; b. for simple supports

5- Conclusion and Summary

In this study, an analytical method based on first-order shear theory for modeling FGM conical shells has been proposed. By extracting the governing equations and in order to verify the accuracy of numerical modeling, the obtained results have been compared with the results presented in reference[6] and also with the results obtained from Abaqus software for FGM conical shells with simple two-end supports, two-end fixed supports and two-end free supports, which had an acceptable agreement in both validation cases. In the following, to check the efficiency of the proposed method in detecting the damaged area of the structure, the conical shell was divided into five elements; single, double and multiple failure scenarios were defined under different support conditions and by applying different bed conditions. With the help of derivatives of mode shapes, the damage area was investigated. The investigations indicate the appropriate performance of the proposed model in detecting the damage location. The proposed method could be extended to real structures.

References

- [1] M. Alipour, A novel economical analytical method for bending and stress analysis of functionally graded sandwich circular plates with general elastic edge conditions, subjected to various loads, *Composites Part B: Engineering*, 95 (2016) 48-63.
- [2] S. Mohammadrezazadeh, A.A. Jafari, The influences of magnetostrictive layers on active vibration control of laminated composite rotating cylindrical shells based on first-order shear deformation theory, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 233(13) (2019) 4606-4619.
- [3] E. Aghaahmadi, R. Taghipour, M. Bozorgnasab, M. Mollaalipour, Damage Identification In Cylindrical Shells With Functionally Graded Materials Resting On Elastic Foundation, *Sharif Journal of Civil Engineering*, 36.2(3.2) (2020) 125-133.
- [4] G. Fan, M. Lezgy-Nazargah, An efficient seven-parameter double superposition-based theory for free vibration analysis of laminated composite shells, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 106 (2024) 105299.
- [5] D. Yao, M. Lezgy-Nazargah, A new double superposition-based shear deformation theory for static analysis of multilayered composite and sandwich doubly-curved shells, *Thin-Walled Structures*, 198 (2024) 111703.
- [6] G. Buchanan, F.-I. Wong, Frequencies and mode shapes for thick truncated hollow cones, *International journal of mechanical sciences*, 43(12) (2001) 2815-2832.



یافتن نواحی آسیب دیده در سازه‌های پوسته‌ی مخروطی با استفاده از روش‌های تحلیلی مبتنی بر ارتعاش آزاد سازه

احسان آقااحمدی^۱، رضا تقی پور^{۱*}، محسن بزرگ نسب^۱، محمد ملاعلی پور^۲

۱- گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

۲- گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۱۱

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۱/۳۰

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۲۵

ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۰۷/۱۰

کلمات کلیدی:

پوسته مخروطی

یافتن نواحی آسیب دیده

رفتار ارتعاش آزاد

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

مشتقات اشکال مودی

خلاصه: پایش سلامت سازه‌ها و شناسایی نواحی آسیب دیده بمنظور بررسی وضعیت عملکردی آنها امری مهم و ضروری می‌باشد. زیرا عدم توجه به آسیب‌های موضعی باعث کاهش کارایی عملکرد سازه گردیده و ممکن است باعث افزایش شدت آسیب به علت بارگذاری‌های طبیعی و یا مصنوعی و در نتیجه تخریب کل سازه گردد. هدف اصلی در این پژوهش پیشنهاد مدلی با استفاده از روش‌های تحلیلی و توسعه آن جهت شناسایی نواحی آسیب دیده در پوسته‌های مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی مستقر بر بستر الاستیک می‌باشد. از آنجائیکه اشکال مودی پارامتری حساس به وجود آسیب در المان هاست، این پارامترها به منظور پروسه تشخیص آسیب در سازه مورد استفاده قرار گرفت. معادلات حاکم بر اساس تئوری برشی مرتبه اول در نرم افزار مپیل استخراج گردید. روش تحلیلی با استفاده از سری توانی، فرکانس‌های طبیعی و اشکال مودی سازه را محاسبه می‌کند. جهت اطمینان از عملکرد مدل پیشنهاد شده، نتایج حاصل از مدلسازی با نتایج دیگر مراجع و نیز مدل عددی ساخته شده در نرم افزار آباکوس صحت سنجی شده است. در نهایت، با در نظر گرفتن انواع شرایط تکیه گاهی و سختی‌های متفاوت برای بستر، المان‌های آسیب دیده پوسته مخروطی شکل با در نظر گرفتن سناریوهای مختلف آسیب مشخص شده است. بررسی‌ها نشانگر عملکرد مناسب مدل پیشنهادی در تشخیص محدوده آسیب دیده می‌باشد.

۱- مقدمه

شناسایی آسیب‌های محلی در سازه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. زیرا عدم توجه به آنها باعث کاهش کارایی سازه گردیده و ممکن است با بارگذاری حاصل از خطرات طبیعی یا مصنوعی تشدید شده و در نهایت منجر به تخریب کل سازه گردد. اثرات آسیب‌های محلی سازه به صورت تغییر در مقاومت و سختی در آن محل است. این تغییرات در رفتار استاتیکی و دینامیکی سازه اثر کرده که منجر به تغییر پاسخ‌های دینامیکی و استاتیکی آن از جمله فرکانس‌های طبیعی و اشکال مودی آن می‌گردد. در نتیجه با داشتن اطلاعات مودی و مشتقات آن در حالت‌های سازه سالم و آسیب دیده امکان بررسی مکان آسیب فراهم می‌گردد.

در سال ۲۰۰۱، بوچانن و ونگ^۱ با استفاده از روش اجزاء محدود به مطالعه ارتعاش مخروط توخالی پرداختند. معادلات فشار با استفاده از جابجایی سه

بعدی المان محدود در سیستم مختصات مخروطی مورد بررسی قرار گرفت. با فرض تقارن محوری فرمول به دو بعد کاهش می‌یابد این امر در حالی است که تجزیه و تحلیل سه بعدی حفظ می‌شود. [۱] در سال ۲۰۰۶، بنگال^۲ و همکاران از یک فرمول المان محدود که بر پایه تئوری تغییر شکل برشی بوده، برای مطالعه رفتار خمشی و ارتعاش پوسته‌های مخروطی FGM در یک محیط با درجه حرارت بالا استفاده کرده‌اند. بمنظور مدل سازی پوسته مخروطی FGM از سری فوریه برای متغیر جابجایی در جهت پیرامونی استفاده شده است [۲]. در سال ۲۰۱۰، شریعت و علی پور بر اساس یک روش تبدیل دیفرانسیل، راه حل نیمه تحلیلی برای رفتار ارتعاش آزاد ارائه نمودند و به بررسی تنش مودال صفحات دایره‌ای هدفمند با ضخامت متغیر و لبه‌های گیردار بر بستر الاستیک پرداختند. تغییرات پارامترهای مواد و هندسه با پنج توابع نمایی به صورت مجزا بیان شده است [۳]. در سال ۲۰۱۳، شریعت و علی پور راه حل مبتنی بر سری توانی برای بررسی صفحات هدفمند و (FGM) با رفتار ارتعاش آزاد و با میرایی ویسکوالاستیک ارائه نمودند.

1. Buchanan and Wong

2. Bhangale

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: r.taghipour@umz.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لایسنس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لایسنس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



تغییرات خواص برای مواد هدفمند همزمان در دو جهت مختلف عرضی و شعاعی مورد بررسی قرار گرفته است [۴]. در سال ۲۰۱۴، علی‌پور و شریعت، به معرفی روشی جهت تحلیل رفتار ارتعاشات آزاد ورق ساندویچ حلقوی هدفمند بر روی بستر الاستیک وینکلر ارائه نمودند. نتایج روش پیشنهادی با نتایج حاصل از مدل سازی در نرم افزار آباکوس مورد مقایسه قرار گرفته است [۵].

در سال ۲۰۱۴، جین و همکاران یک روش سه بعدی برای ارتعاش آزاد پوسته‌های مخروطی ایزوتروپیک و ارتوتروپیک با محدودیت‌های کششی الاستیک ارائه شده است. فرمول‌ها با استفاده از روش ریلی ریتز و بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی در نظر گرفته شده‌اند. جابجایی اجزای پوسته‌های مخروطی توسط سری فوریه در جهت محیطی و همچنین یک سری فوریه دو کسینوس همراه با چند تابع کمکی در جهت ضخامت و جهت‌های مرزی، بیان شد [۶]. در سال ۲۰۱۶، نوایان و همکاران یک شاخص موثر بر اساس اطلاعات اشکال مودی و مشتقات آن برای سازه صفحه ای در حالت‌های سالم و آسیب دیده پیشنهاد دادند. بمنظور بررسی صحت عملکرد شاخص آسیب‌های منفرد و چندگانه، اعمال گردید. نتایج بدست آمده نشانگر آن است که شاخص پیشنهادی با دقت بالایی توانایی تشخیص محل وقوع آسیب‌های منفرد و چندگانه را دارا می‌باشد [۷].

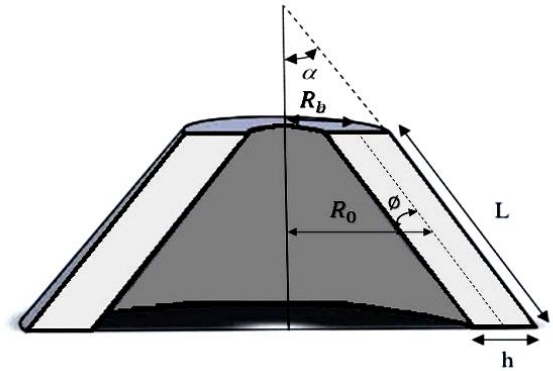
در سال ۲۰۱۶، علیپور یک رویکرد جدید برای تحلیل استاتیکی صفحات دایره‌ای ساندویچی براساس لایه‌یابی که شباهت زیادی به تئوری سه بعدی الاستیک دارد، ارائه کرده است. هر لایه از صفحات ساندویچی از مواد هدفمند ساخته شده است. شرایط مرزی می‌تواند بر بستر الاستیک باشد که به صورت تنش نرمال غیر یکنواخت و یا برش کششی فرض می‌شود. برش عرضی، تنش نرمال و شرایط مرزی در بالا و پایین صفحه ساندویچ و همچنین در بین لایه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است [۸]. در سال ۲۰۱۹، محمدرضا زاده و جعفری با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به بررسی رفتار ارتعاشی فعال لایه کامپوزیتی پوسته‌های استوانه‌ای ساده دوار محبوس شده در لایه مغناطیسی پرداختند. در این پژوهش، جزئیات تاثیر پذیری پارامترهای مختلف بر روی ویژگی‌های میرایی و پاسخ رفتار ارتعاش بررسی شده است [۹]. در سال ۲۰۲۰، آقا احمدی و همکاران به بررسی رفتار ارتعاش آزاد و همچنین تشخیص محدوده‌ی آسیب‌دیده‌ی سازه پوسته استوانه‌ای هدفمند پرداختند [۱۰]. در سال ۲۰۲۱، ستوده نیا به بررسی سیستم جدیدی از معادلات برای شناسایی آسیب پوسته‌های استوانه‌ای بر اساس روش المان محدود کلاسیک و داده‌های مودال ناقص با در نظر

گرفتن نویز پرداختند. آنها از روش المان محدود برای پوسته‌های استوانه‌ای نازک و محاسبه داده‌های ارتعاشی استفاده کردند [۱۱]. در سال ۲۰۲۱، تقی پور و همکاران به معرفی شاخص خرابی بمنظور تعیین محل آسیب در تیرها پرداختند. مدل پیشنهادی بر اساس روش اجزای محدود و در نرم افزار متلب توسعه داده شده است و کارایی شاخص پیشنهادی را در تعیین محل آسیب های تک گانه و چندگانه مورد ارزیابی قرار داده است. نتایج نشان دهنده دقت بالای روش پیشنهادی برای شناسایی محل آسیب دیده در قاب‌ها می‌باشد [۱۲]. در سال ۲۰۲۲، نشتا و همکاران به معرفی یک شاخص خرابی در تعیین محل آسیب در قاب‌ها پرداختند و بمنظور بررسی عملکرد شاخص، نتایج را با نتایج آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار داده است. همچنین عملکرد شاخص را با وجود نویز در اطلاعات مودی نیز بررسی کرده است. نتایج نشان دهنده دقت بالای روش پیشنهادی برای شناسایی محل عناصر آسیب دیده در قاب‌ها است [۱۳]. در سال ۲۰۲۴ فان و لژگی نظرگاه [۱۴] به بررسی یک نظریه پوسته ورقه ای پیشرفته و کارآمد پرداخته اند که تنها هفت متغیر میدان جابجایی در آن وجود دارد، در این پژوهش از یک المان پوسته چهارضلعی با هشت گره برای حل معادلات دینامیکی حرکت استفاده شده است. دقت نظریه پوسته پیشنهادی و فرمول‌بندی المان محدود توسعه یافته از طریق تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های ساندویچی چندلایه متقاطع، زاویه‌دار و هسته نرم ارزیابی شده است. در سال ۲۰۲۴ یائو و لژگی نظرگاه [۱۵] یک نظریه جدید براساس تغییر شکل برشی پوسته با هفت پارامتر مجهول ارائه شده است و معادلات حاکم بر پوسته‌ها تحت بارهای استاتیکی با توسعه یک المان پوسته هشت گره‌ای حل شده است. همچنین روابط سینماتیکی که برای مدل پوسته چند لایه ارائه شده بر اساس مشتق برهم نهی دوگانه بیان شده است.

همانطور که در مطالعات پیشین ملاحظه می‌شود، تحقیقات انجام شده در خصوص پوسته‌های مخروطی، متمرکز بر فرایند مدل سازی بوده و به بحث پایش سلامت و آسیب‌های ایجاد شده در این نوع سازه پرداخته نشده است. همچنین مطالعات انجام شده در خصوص تعیین محل آسیب، بر روی سازه‌های دیگر نظیر تیرها و صفحات مستوی و ... صورت پذیرفته است. در این پژوهش مدل سازی تحلیلی بر روی پوسته‌های مخروطی با مصالح هدفمند (FGM) انجام شده و شناسایی وجود آسیب و محل آن مورد نظر قرار گرفته است. ابتدا معادلات حاکم بر سازه بر اساس تئوری برشی مرتبه اول در نرم افزار میپل استخراج شده و سپس اشکال مودی و فرکانس‌های طبیعی با استفاده از روش سری توانی حاصل گردیده است. صحت سنجی



ب- برج خنک کننده
b. Cooling tower



الف-هندسه پوسته مخروطی
a. Conical shell geometry

شکل ۱. هندسه پوسته مخروطی شکل ناقص و نمونه‌ای از کاربرد آنها

Fig. 1. Geometry of incomplete conical shells and an example of their application

که در آن W و u جابجایی‌ها می‌باشند و u_x و w_x جابجایی‌های صفحه‌ی میانی ($z=0$) در راستای محور طولی X و محور عرضی Z هستند و ψ_x چرخش حول راستای محور طولی مخروط و Z متغیر ضخامت مخروط می‌باشد. روابط جابجایی کرنش برای پوسته‌های مخروطی شکل به صورت معادلات زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_0 \cos(\phi)}{R_0} + \frac{w \sin(\phi)}{R_0} + z \frac{\psi_x \cos(\phi)}{R_0} \\ \gamma_{xz} = \psi_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \end{cases} \quad (2)$$

که در معادله فوق ε_x کرنش طولی و ε_θ کرنش زاویه‌ای و γ_{xz} کرنش برشی و R_0 شعاع مخروط برحسب طول مخروط می‌باشند. همچنین مقدار R_0 براساس R_b کوچکترین شعاع مخروط و X متغیر در راستای طول مخروط، به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$R_0 = R_b + x \cos(\phi) \quad (3)$$

تنش‌های متناظر بر اساس قانون هوک تعمیم داده شده به صورت زیر بیان شده است:

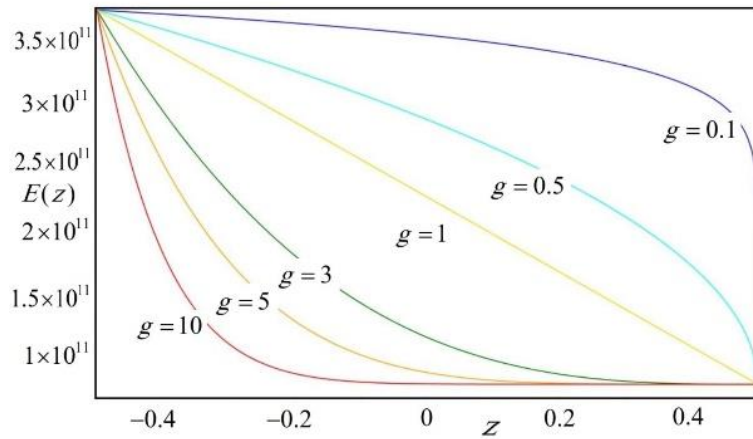
مدل با مقایسه نتایج حاصله با نتایج دیگر مراجع و نیز مدل عددی ساخته شده در نرم افزار آباکوس انجام شده است. روند مدل سازی و تشخیص محل آسیب دیده شکل با در نظر گرفتن سناریوهای مختلف آسیب در شرایط مختلف تکیه گاهی و سختی‌های متفاوت برای بستر مورد ارزیابی قرار گرفته است. در بخش انتهایی پژوهش، نتیجه گیری و جمع بندی مطالب، ارائه شده است.

۲- معادلات حاکم بر پوسته مخروطی هدفمند

بمنظور استخراج معادلات حاکم بر پوسته مخروطی هدفمند، ابتدا به معرفی مشخصات هندسی آن پرداخته شده است. شکل (۱) مشخصات هندسی پوسته مخروطی و نمونه‌ای از کاربرد آن در برج‌های خنک کننده را نشان می‌دهد.

همانطور که ملاحظه می‌شود، R_b کوچکترین شعاع مخروط می‌باشد که مقدار آن $0 \leq R_b$ می‌باشد، R_0 شعاع وابسته به طول مخروط می‌باشد، L طول مخروط، ϕ و α زوایای مخروط هستند که با هم براساس $\phi = \frac{\pi}{2} + \alpha$ به یکدیگر مرتبط می‌باشند و h ضخامت استوانه می‌باشد. براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول [۹]، معادلات حاکم بر روابط پوسته مخروطی به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} u = u_x + z \psi_x \\ w = w_x \end{cases} \quad (1)$$



شکل ۲. تغییرات مقدار مدول یانگ (E) بر حسب ضخامت (z) به ازای مقادیر مختلف g

Fig. 2. Changes in Young's modulus (E) value depending on thickness (z) for different values of g

می باشد که مقدار آن برابر $g > 0$ است. با توجه به نکات ذکر شده نمودار E بر حسب Z به ازای مقادیر مختلف g به شرح شکل (۲) می باشد:

معادلات حرکت ممکن است با استفاده از اصل کمینه سازی انرژی پتانسیل محاسبه شود.

$$\delta U + \delta K + \delta V = 0 \quad (۶)$$

که در آن U انرژی کرنشی و K انرژی جنبشی و V انرژی ناشی از بار خارجی می باشد. بکارگیری این اصل منجر به سه معادله حرکت برای پوسته مخروطی می شود:

$$\delta U = \int_V \left\{ \sigma_x \delta(u_{0,x} + z \psi_{x,x}) + \sigma_\theta \delta\left(\frac{w}{R_0}\right) + \tau_{xz} \delta(\psi_x + w_{,zx}) \right\} dV \quad (۷)$$

$$\delta K = - \int_V \rho \{ \ddot{U} \delta U + \dot{W} \delta W \} dV,$$

$$\delta V = \int_V [k_w(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2) w \delta w] dA$$

که با جایگذاری معادلات (۲) و (۵) در معادلات (۷) و گرفتن انتگرال جز به جز در راستای طول و ضخامت معادلات، معادلات مخروط استخراج می شود و به شرح ذیل می باشد.

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta), \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x), \\ \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \end{cases} \quad (۴)$$

که در معادلات (۴)، ν ضریب پواسون و E مدول الاستیسیته و σ_x و σ_θ تنش های نرمال و τ_{xy} تنش برشی می باشند. پوسته مخروطی شکل به صورت هدفمند FGM ترکیبی از سرامیک و فلز می باشد به این صورت که در ابتدا، مواد به صورت سرامیک هستند و خواص ماده به طور پیوسته براساس روابط زیر تغییر می کنند و در انتها مواد به صورت فلز می باشند:

$$\begin{cases} E = (E_c - E_m) \left[\left(-\frac{z}{h} \right) + 0.5 \right]^g + E_m \\ \rho = (\rho_c - \rho_m) \left[\left(-\frac{z}{h} \right) + 0.5 \right]^g + \rho_m \\ \nu = (\nu_c - \nu_m) \left[\left(-\frac{z}{h} \right) + 0.5 \right]^g + \nu_m \end{cases} \quad (۵)$$

در معادلات (۵)، ρ_m چگالی فلز و E_m مدول الاستیسیته فلز و ν_m ضریب پواسون فلز و ρ_c چگالی سرامیک و E_c مدول الاستیسیته سرامیک و ν_c ضریب پواسون سرامیک می باشند و g پارامتر دلخواه توانی کسر حجمی

$$+ \bar{B} \frac{\partial u_x}{\partial x} + D \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_x + \bar{D} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}$$

$$Q_x = k \int_{h_b}^{h_t} \tau_{xz} dz = k \tilde{A} \left(\psi_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \right)$$

در معادله فوق $k = \frac{5}{6}$ ضریب تصحیح برشی مربوط به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول جهت بهبود پاسخها می‌باشد. در ادامه طبق معادلات (۸) از معادلات (۱۰) مشتق گرفته می‌شود، ضرایبی که در معادله (۸) و (۱۰) مشاهده می‌شود به شرح زیر بدست می‌آید:

$$\left\{ \begin{matrix} A \\ B \\ D \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x,z)}{1-\nu^2} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{matrix} \right\} dz,$$

$$\left\{ \begin{matrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{D} \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu E(x,z)}{1-\nu^2} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{matrix} \right\} dz,$$

$$\left\{ \begin{matrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{D} \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x,z)}{2(1+\nu)} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{matrix} \right\} dz,$$

$$\left\{ \begin{matrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x,z) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{matrix} \right\} dz$$

(۱۱)

در ادامه از معادلات و مشتقات (۱۰) برای محاسبه معادلات (۸) استفاده می‌گردد که در نتیجه معادلات (۸) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A \frac{d^2 u}{d^2 x} + A \frac{\cos(\phi)}{R_0} \frac{\partial u}{\partial x} - A \frac{\cos^2(\phi)}{R_0^2} u$$

$$+ \frac{d^2 \psi_x}{d^2 x} + B \frac{\cos(\phi)}{R_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} - B \frac{\cos^2(\phi)}{R_0^2} \psi_x +$$

$$+ \bar{A} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \frac{\partial w}{\partial x} - A \frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{R_0^2} w = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\psi}_x$$

$$B \frac{d^2 u}{d^2 x} + B \frac{\cos(\phi)}{R_0} \frac{\partial u}{\partial x} - B \frac{\cos^2(\phi)}{R_0^2} u_0 + D \frac{d^2 \psi_x}{d^2 x}$$

(۱۲)

$$\left\{ \begin{matrix} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{N_x - N_\theta}{R_0} \cos(\phi) = I_0 \frac{d^2 u}{d^2 x} + I_1 \frac{d^2 \psi_x}{d^2 x} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{M_x - M_\theta}{R_0} \cos(\phi) - Q_x = I_1 \frac{d^2 u}{d^2 x} + I_2 \frac{d^2 \psi_x}{d^2 x} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{Q_x}{R_0} \cos(\phi) - \frac{N_\theta}{R_0} \sin(\phi) + k_w (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) w = I_0 \frac{d^2 w}{d^2 x} \end{matrix} \right. \quad (۸)$$

که در معادلات ۵، N_x نیروی درون صفحه‌ای، M_x گشتاور خمشی و Q_x نیروی برشی عرضی می‌باشند که بر اساس تئوری برشی مرتبه‌ی اول هستند و $\tilde{K}_w$ ضریب وینکلر بستر الاستیک و a_0 و a_1 و a_2 ضرایب می‌باشند و I_0 و I_1 و I_2 ضرایبی هستند که در معادلات (۱۱) توضیح داده شده است. D^* پارامتر بی بعد ساز می‌باشد و $\tilde{K}_w$ سختی بستر که در رابطه زیر بی بعد شده است:

$$D^* = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)}, K_w = \frac{k_w L^4}{D^*} \quad (۹)$$

برای محاسبه‌ی پارامترهای روابط (۸) از معادلات (۱۰) استفاده شده است که با جایگذاری معادله (۲) در معادله (۴) بدست آمده است:

$$N_x = \int_{h_b}^{h_t} \sigma_x dz = A \frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{A} \frac{\cos(\phi)}{R_0} u_0$$

$$+ \bar{A} \frac{\sin(\phi)}{R_0} w + B \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_x$$

$$N_\theta = \int_{h_b}^{h_t} \sigma_\theta dz = A \frac{\cos(\phi)}{R_0} u_0 + A \frac{\sin(\phi)}{R_0} w$$

$$+ \bar{A} \frac{\partial u_x}{\partial x} + B \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_x + \bar{B} \frac{\partial \psi_x}{\partial x}$$

$$M_x = \int_{h_b}^{h_t} \sigma_x z dz = B \frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} u_0$$

$$+ \bar{B} \frac{\sin(\phi)}{R_0} w + D \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \bar{D} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_x$$

$$M_\theta = \int_{h_b}^{h_t} \sigma_\theta z dz = B \frac{\cos(\phi)}{R_0} u_0 + B \frac{\sin(\phi)}{R_0} w$$

(۱۰)

$$-\sum_{j=0}^{\infty} (Y)^{j+1} (x-x_0)^j \frac{\cos(\phi)^2}{(R_b+x \cos(\phi))^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \left(-\frac{\cos(\phi)}{R_b+x_0 \cos(\phi)} \right)^{j+2} (x-x_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) (Y)^{j+2} (x-x_0)^j$$

با استفاده از سری توانی تیلور و با جایگذاری معادلات (۱۴) در مجموعه معادلات (۱۲) و (۱۳)، به ترتیب معادلات حاکم و شرایط مرزی به صورت سری قابل بیان می باشد که نتایج در پیوست (الف) ارائه شده است. در این معادلات که حول نقطه L (نقطه انتهای پوسته در راستای محور x) بسط داده شده است، توابع $U_j^{(i)}, \Psi_j^{(i)}, W_j^{(i)}$ ($j=2,3,\dots,n$)، براساس توابع $U_0^{(i)}, U_1^{(i)}, \Psi_0^{(i)}, \Psi_1^{(i)}, W_0^{(i)}, W_1^{(i)}$ محاسبه می شوند. تعداد شرایط مرزی ابتدائی مخروط، ۳ رابطه، شرایط مرزی انتهائی مخروط، ۳ رابطه و اگر پوسته مخروطی از چند قسمت تشکیل شده باشد، شرایط پیوستگی در محل اتصال هر قسمت، ۶ رابطه می باشد. در مجموع $6n$ رابطه برای شرایط مرزی و پیوستگی مخروط وجود دارد که n تعداد قسمت های موجود در طول مخروط می باشد. که این روابط به صورت ماتریس زیر ارائه گردیده شده است:

$$\begin{bmatrix} \chi_{11}^{(\omega)} & \chi_{12}^{(\omega)} & \dots & \chi_{1(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{1n}^{(\omega)} \\ \chi_{21}^{(\omega)} & \chi_{22}^{(\omega)} & \dots & \chi_{2(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{2n}^{(\omega)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \chi_{(n-1)1}^{(\omega)} & \chi_{(n-1)2}^{(\omega)} & \dots & \chi_{(n-1)(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{(n-1)n}^{(\omega)} \\ \chi_{n1}^{(\omega)} & \chi_{n2}^{(\omega)} & \dots & \chi_{nn}^{(\omega)} & \chi_{nn}^{(\omega)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^{(i)} \\ U_1^{(i)} \\ \Psi_0^{(i)} \\ \vdots \\ U_n^{(i)} \\ \Psi_n^{(i)} \\ W_n^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

که در ماتریس بالا $\chi_{ij}^{(\omega)}$ چند جمله ای فرکانس طبیعی پوسته مخروطی می باشد. بنابراین با گرفتن دترمینان ماتریس، فرکانس طبیعی برای پوسته مخروطی بدست می آید:

$$+D \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\cos(\phi)}{R_0} - D \frac{\cos^2(\phi)}{R_0^2} \psi_x + \bar{B} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \frac{\partial w}{\partial x} - B \frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{R_0^2} w - \kappa \tilde{A} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{w}_x - \tilde{A} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \frac{\partial u}{\partial x} - A \frac{\cos(\phi) \sin(\phi)}{R_0^2} u_0 - \frac{\sin(\phi)}{R_0} \bar{B} \frac{\partial \psi}{\partial x} - B \frac{\cos(\phi) \sin(\phi)}{R_0^2} \psi_x + \kappa \tilde{A} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \kappa \tilde{A} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_x + \kappa \tilde{A} \frac{d^2 w}{dx^2} + \kappa \tilde{A} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \frac{\partial w}{\partial x} - A \frac{\sin^2(\phi)}{R_0^2} w + k_w (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) w = I_0 \ddot{w}$$

انواع شرایط مرزی برای پوسته مخروطی شکل به صورت زیر بیان می شود:

$$\begin{aligned} \text{تکیه گاه ساده:} \quad & U_x = 0, M_x = 0, w_x = 0, \\ \text{انتها آزاد:} \quad & N_x = 0, M_x = 0, Q_x = 0, \\ \text{انتها گیردار:} \quad & u_x = 0, \psi_x = 0, w_x = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

برای حل معادلات از سری توانی تیلور استفاده شده است که مجهولات براساس سری توانی تیلور به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{i=0}^{\infty} U_i (x-x_0)^i \\ \psi_x &= \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^i \\ w_x &= \sum_{i=0}^{\infty} W_i (x-x_0)^i \end{aligned} \quad (14)$$

برای سهولت و کم شدن حجم محاسبات از تغییر متغیر زیر استفاده شده است:

$$\frac{\cos(\phi)}{R_b+x \cos(\phi)} = -\sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{\cos(\phi)}{R_b+x_0 \cos(\phi)} \right)^{j+1} (x-x_0)^j = \quad (15)$$

به منظور مدل سازی در نرم افزار آباکوس از تئوری الاستیسیته سه بعدی در حالت متقارن محوری استفاده شده است. جهت مدل سازی از ۲۵۰۰ المان ۸ گره ای متقارن محوری (CAX8R) استفاده شده است تعداد المان ها بر اساس آنالیز حساسیت تعیین شده است؛ بنحوی که با کوچک تر نمودن ابعاد المان، تغییرات چندانی در پاسخ بوجود نیامده است.

حال به مقایسه فرکانس مود اول تا سوم سازه در حالت سالم (قبل از اعمال خرابی) مدل پیشنهادی و مرجع [۱] و نرم افزار آباکوس می پردازیم. لازم به ذکر است فرکانس های بدست آمده همانند مرجع و با استفاده از رابطه $\Omega = \omega R \sqrt{(1-\nu^2)} \rho / E$ بی بعد شده است و این مقایسه برای شرایط مرزی دو سر گیردار و دو سر آزاد و به ازای ضریب سختی صفر ($\tilde{k}_w = 0$) انجام گردیده و در جداول (۲) و (۳) ارائه شده است.

همانطور که از جداول (۲) و (۳) ملاحظه می گردد نتایج بدست آمده از مدل پیشنهادی با نتایج نظیر در مرجع [۱] و نرم افزار آباکوس از دقت قابل قبولی برخوردار می باشد. نکته ی قابل ذکر آنکه در مرجع [۱] و نیز نرم افزار آباکوس از روش اجزای محدود استفاده شده است لذا نتایج حاصله به یکدیگر بسیار نزدیک است.

در ادامه به بررسی پوسته مخروطی هدفمند (FGM) پرداخته می شود. با توجه به نتایج بدست آمده در نرم افزار آباکوس نشان از صحت مدل سازی آن می باشد. در بخش بعدی نتایج مدل پیشنهادی با نتایج بدست آمده از نرم افزار آباکوس مقایسه می گردد. لایه ی داخلی پوسته از جنس فلز و لایه ی خارجی آن سرامیک می باشد و تغییرات مشخصات مصالح به صورت پیوسته

$$\begin{vmatrix} \chi_{11}^{(\omega)} & \chi_{12}^{(\omega)} & \dots & \chi_{1(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{1n}^{(\omega)} \\ \chi_{21}^{(\omega)} & \chi_{22}^{(\omega)} & \dots & \chi_{2(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{2n}^{(\omega)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \chi_{(n-1)1}^{(\omega)} & \chi_{(n-1)2}^{(\omega)} & \dots & \chi_{(n-1)(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{(n-1)n}^{(\omega)} \\ \chi_{n1}^{(\omega)} & \chi_{n2}^{(\omega)} & \dots & \chi_{nn}^{(\omega)} & \chi_{nn}^{(\omega)} \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

۳- صحت سنجی مدل عددی پوسته مخروطی

برای صحت سنجی مدل پیشنهادی مورد استفاده، نتایج بدست آمده از مدل پیشنهادی با نتایج نظیر در مرجع [۱] و همچنین با نتایج حاصل از مدل سازی عددی در نرم افزار آباکوس مقایسه می گردد. مشخصات مصالح پوسته مخروطی مورد استفاده در بررسی صحت سنجی در جدول (۱) ارائه شده است.

جدول ۱. مشخصات مصالح پوسته مخروطی

Table 1. Conical shell material specifications

چگالی (kg / m^3)	مدول الاستیسیته (GPa)	ضریب پواسون
۵۷۰۰	۱۶۸	۰/۳

جدول ۲. مقایسه فرکانس سه مود اول بدست آمده از مرجع [۱] و مدل پیشنهادی برای پوسته مخروطی با تکیه گاه دوسر گیردار و $R_b/L = 0.2$ و ($\tilde{k}_w = 0$)

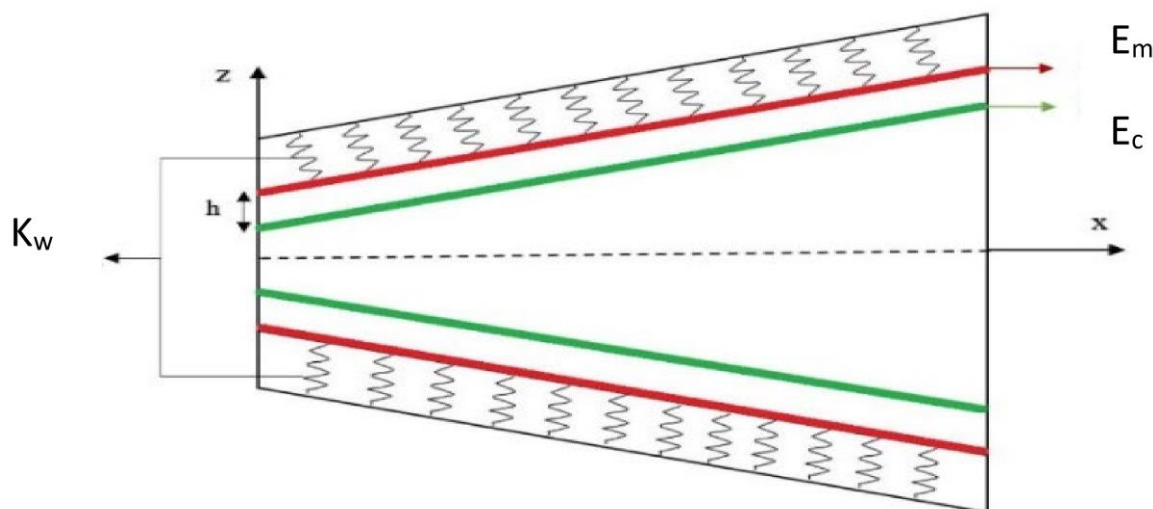
Table 2. Comparison of the frequencies of the first three modes obtained from reference [1] and the proposed model for a conical shell with a fixed end supports $R_b/L = 0.2$ and ($\tilde{k}_w = 0$)

فرکانس (Hz)	h/L=۰/۲۵				h/L=۰/۵				h/L=۱			
	مدل پیشنهادی	آباکوس	مرجع [۱]	درصد خطا	مدل پیشنهادی	آباکوس	مرجع [۱]	درصد خطا	مدل پیشنهادی	آباکوس	مرجع [۱]	درصد خطا
ω_1	۲/۹۷۳۷	۳/۰۴۴	۳/۰۵۰	۲/۵۰	۳/۱۴۵۰	۳/۲۷۰	۳/۲۷۶	۳/۹۹	۳/۱۱۱۱	۳/۳۰۳	۳/۳۱۰	۶/۰۰
ω_2	۴/۶۶۲۴	۴/۷۲۰	۴/۷۳۴	۱/۵۱	۵/۰۴۹۲	۵/۱۵۸	۵/۱۶۸	۲/۲۹	۵/۱۷۱۶	۵/۳۴۲	۵/۳۵۱	۳/۳۵
ω_3	۵/۶۵۳۸	۵/۷۳۴	۵/۷۴۲	۱/۵۳	۵/۶۳۰۸	۵/۷۳۹	۵/۷۴۶	۲/۰۰	۵/۵۰۴۷	۵/۵۶۶	۵/۵۷۰	۱/۱۷

جدول ۳. مقایسه فرکانس سه مود اول بدست آمده از مرجع [۱] و مدل پیشنهادی برای پوسته مخروطی با تکیه‌گاه دوسر آزاد ($\tilde{k}_w = 0$) و $\frac{R_b}{L} = 0.25$

Table 3. Comparison of the frequencies of the first three modes obtained from reference [1] and the proposed model for a conical shell with free ends $\frac{R_b}{L} = 0.25$ and ($\tilde{k}_w = 0$)

فرکانس (Hz)	h/L=۰/۲۵				h/L=۰/۵				h/L=۱			
	مدل پیشنهادی	آباکوس	مرجع [۱]	درصد خطا	مدل پیشنهادی	آباکوس	مرجع [۱]	درصد خطا	مدل پیشنهادی	آباکوس	مرجع [۱]	درصد خطا
ω_1	۱/۸۳۹	۱/۹۲۷	۱/۹۲۸	۴/۷۹	۱/۵۶۷	۱/۷۳۱	۱/۷۳۲	۹/۵۲	۱/۱۰۱	۱/۲۷۳	۱/۲۷۴	۱۳/۵۷
ω_2	۲/۸۹۲	۲/۹۵۴	۲/۹۵۶	۲/۱۶	۲/۴۵۰	۲/۵۷۷	۲/۵۸۳	۵/۱۴	۱/۶۹۴	۱/۸۷۹	۱/۸۸۰	۹/۸۹
ω_3	۳/۵۷۲	۳/۶۴۸	۳/۶۵۰	۲/۱۳	۳/۸۷۴	۳/۸۷۷	۳/۸۸۰	۰/۱۵	۴/۱۷۷	۴/۲۳۳	۴/۲۳۸	۱/۴۳



شکل ۳. برخی از پارامترهای هندسی و مشخصات مصالح پوسته مخروطی FGM با در نظر گرفتن تکیه‌گاه الاستیک

Fig. 3. Some geometric parameters and material characteristics of the FGM conical shell considering elastic support

تکیه‌گاهی متفاوت در آن مورد بررسی قرار گرفته است. پس از مدلسازی و تحلیل پوسته مخروطی، فرکانس مود اول تا پنجم آن بدست آمده است. این فرکانس ها با کمک رابطه $\Omega = \omega R \sqrt{(1-\nu^2)} \rho_m / E_m$ بی بعد گردیده اند. نتایج حاصله برای ضخامت‌های مختلف پوسته مخروطی هدفمند (FGM) در شرایط تکیه‌گاهی دو سر گیردار و دوسر آزاد و دو سر ساده و به ازای ضریب سختی صفر $\tilde{k}_w$ و $g = 1$ استخراج شده اند و با مقادیر نظیر که از نرم افزار آباکوس

و با کمک معادله (۴) محاسبه می گردد. همانطور که در شکل مشاهده می گردد نامگذاری المان های در نظر گرفته شده در راستای طول مخروط می باشد. پارامترهای هندسی و مشخصات مصالح بکار رفته در شکل (۳) و جدول (۴) نشان داده شده است. پوسته مخروطی شکل تحت ارتعاش آزاد قرار گرفته و تغییرات پارامترهای مختلفی در آن مورد بررسی قرار می گیرد. تغییر در ضخامت المان‌های مختلف، تغییر درصد آسیب و مشخصات مصالح المان‌های مختلف و همچنین تغییر در سختی بستر $\tilde{k}_w$ و نیز شرایط

جدول ۴. مشخصات مصالح پوسته مخروطی برای حالت FGM

Table 4. Conical shell material specifications for FGM mode

نوع مصالح	ضریب پواسون	مدول الاستیسیته (GPa)	چگالی (Kg/m^3)
فلز	۰/۳	۷۰	۲۷۰۰
سرامیک	۰/۳	۳۸۰	۳۸۰۰

جدول ۵. مقایسه فرکانس بی بعد شده مود اول تا پنجم بدست آمده از مدل پیشنهادی و خروجی نرم افزار آباکوس برای ضخامت‌های مختلف پوسته

مخروطی FGM در شرایط مرزی دو سر گیردار ($\tilde{k}_w = 0$) و $g=1$

Table 5. Comparison of the dimensionless frequencies of the first to fifth modes obtained from the proposed model and the output of the Abaqus software for different thicknesses of the FGM conical shell under the fixed ends boundary conditions ($\tilde{k}_w = 0$) and $g=1$

فرکانس (Hz)	$h=0/1, L=1, R=1, \alpha=30$			$h=0/15, L=1, R=1, \alpha=30$			$h=0/2, L=1, R=1, \alpha=30$		
	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)
ω_1	۰/۲۲۸۴	۰/۲۳۰۴	۰/۸۷	۰/۲۶۹۱	۰/۲۷۲۳	۱/۲۰	۰/۳۰۶۱	۰/۳۱۰۵	۱/۴۴
ω_2	۰/۴۱۰۰	۰/۴۱۲۹	۰/۷۱	۰/۵۲۲۴	۰/۵۲۸۴	۱/۱۵	۰/۶۰۱۵	۰/۶۱۰۳	۱/۴۶
ω_3	۰/۶۹۷۴	۰/۷۰۴۲	۰/۹۷	۰/۸۱۹۹	۰/۸۲۱۶	۰/۲۰	۰/۸۱۸۱	۰/۸۱۹۰	۰/۱۱
ω_4	۰/۶۹۷۴	۰/۸۲۳۱	۰/۱۶	۰/۸۷۱۷	۰/۸۸۵۴	۱/۵۶	۰/۹۷۹۷	۰/۹۹۹۰	۱/۹۶
ω_5	۱/۰۴۳۲	۱/۰۵۶۷	۱/۲۹	۱/۲۶۳۶	۱/۲۸۸۴	۱/۹۶	۱/۳۹۰۷	۱/۴۲۳۵	۲/۳۵

بدست آمده است مقایسه گردیده اند.

همانطور که در جدول (۵) تا (۷) مشاهده می گردد نتایج مدل پیشنهادی با خروجی نرم افزار آباکوس از تطابق قابل قبولی برخوردار هستند.

۴- بررسی عملکرد مدل عددی پیشنهادی در مکان های آسیب با سناریوهای مختلف

در ادامه مطالعه و براساس شکل (۴) در لایه های مختلف پوسته مخروطی هدفمند (FGM) آسیب ایجاد گردیده و فرکانس بی بعد شده مود اول سازه های سالم و آسیب دیده برای شرایط تکیه گاهی مختلف و به ازای ضریب سختی های ($\tilde{k}_w$) مختلف در جداول (۸) تا (۱۰) ارائه شده است. آسیب مربوطه از طریق کاهش در مدول الاستیسیته مصالح لایه ها اعمال شده است. سناریو های آسیب بنحوی انتخاب شده است تا دقت مدل برای

خرابی های تک گانه، دو گانه و چند گانه و همچنین همجواری المان های آسیب دیده با درصد خطاهای مختلف مورد بررسی قرار گیرد. مشخصات هندسی مرتبط با پوسته مخروطی شامل ضخامت (h) برابر با ۰/۲ متر، طول کلی (L) برابر با ۱ متر که به پنج لایه به ترتیب به طول های ۰/۱۵، ۰/۲، ۰/۳، ۰/۱۵ و ۰/۲ تقسیم شده است؛ همچنین کوچکترین شعاع مخروط R_b برابر با ۱ متر می باشد و R_0 شعاع وابسته به طول مخروط می باشد. همانطور که در جداول (۸) تا (۱۰) دیده می شود، فرکانس مود اول سازه آسیب دیده نسبت به فرکانس مود سالم در هر سناریو کاهش می یابد و همچنین با افزایش ضریب سختی بستر الاستیک که موجب افزایش صلبیت بستر می شود فرکانس افزایش می یابد. لذا در ادامه، تغییرات این پارامتر برای شکل مودی اول سازه آسیب دیده در سناریوهای مختلف آسیب جداول (۸) تا (۱۰) مورد بررسی قرار می گیرد.

بمنظور بررسی تاثیر مشتقات مراتب بالاتر اشکال مودی در تشخیص

جدول ۶. مقایسه فرکانس بی بعد شده مود اول تا پنجم بدست آمده از مدل پیشنهادی و خروجی نرم افزار آباکوس برای ضخامتهای مختلف پوسته مخروطی FGM در شرایط مرزی دو سر آزاد ($\tilde{k}_w = 0$) و $g=1$

Table 6. Comparison of the dimensionless frequencies of the first to fifth modes obtained from the proposed model and the output of Abaqus software for different thicknesses of FGM conical shell in free ends boundary conditions ($\tilde{k}_w = 0$) and $g=1$

فرکانس (Hz)	$h=0.1, L=1, R=1, \alpha=30$			$h=0.15, L=1, R=1, \alpha=30$			$h=0.2, L=1, R=1, \alpha=30$		
	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)
ω_1	۰/۲۳۹۰	۰/۲۴۱۹	۱/۱۹	۰/۲۴۰۹	۰/۲۴۵۶	۱/۹۱	۰/۲۴۱۳	۰/۲۴۷۸	۲/۶۲
ω_2	۰/۳۱۳۸	۰/۳۱۷۳	۱/۱۰	۰/۳۱۷۳	۰/۳۲۳۴	۱/۸۸	۰/۳۱۶۷	۰/۳۲۴۶	۲/۴۳
ω_3	۰/۳۵۲۹	۰/۳۵۵۸	۰/۸۱	۰/۴۱۵۷	۰/۴۱۸۵	۰/۶۶	۰/۴۸۳۰	۰/۴۸۵۸	۰/۵۷
ω_4	۰/۶۳۷۲	۰/۶۳۸۹	۰/۲۶	۰/۸۳۷۱	۰/۸۴۱۴	۰/۵۱	۰/۹۹۲۸	۰/۹۹۹۵	۰/۶۷
ω_5	۱/۰۸۹۸	۱/۰۹۴۵	۰/۴۲	۱/۲۳۰۲	۱/۲۲۴۸	۰/۴۴	۱/۲۳۲۵	۱/۲۲۲۹	۰/۷۸

جدول ۷. مقایسه فرکانس بی بعد شده مود اول تا پنجم بدست آمده از مدل پیشنهادی و خروجی نرم افزار آباکوس برای ضخامتهای مختلف پوسته مخروطی FGM در شرایط مرزی دو سر ساده ($\tilde{k}_w = 0$) و $g=1$

Table 7. Comparison of the dimensionless frequencies of the first to fifth modes obtained from the proposed model and the output of Abaqus software for different thicknesses of FGM conical shell under simple ends boundary conditions ($\tilde{k}_w = 0$) and $g=1$

فرکانس (Hz)	$h=0.1, L=1, R=1, \alpha=30$			$h=0.15, L=1, R=1, \alpha=30$			$h=0.2, L=1, R=1, \alpha=30$		
	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)
ω_1	۰/۲۳۵۵	۰/۲۴۱۹	۲/۶۴	۰/۲۳۶۴	۰/۲۴۵۶	۳/۷۴	۰/۲۳۶۵	۰/۲۴۷۸	۴/۵۶
ω_2	۰/۳۲۰۲	۰/۳۱۷۳	۰/۹۰	۰/۳۳۱۲	۰/۳۲۳۴	۲/۳۵	۰/۳۳۱۷	۰/۳۲۴۶	۲/۱۴
ω_3	۰/۳۶۱۹	۰/۳۵۵۸	۱/۶۸	۰/۴۱۸۳	۰/۴۱۸۵	۰/۰۴	۰/۴۸۵۳	۰/۴۸۵۸	۰/۱۰
ω_4	۰/۶۳۷۴	۰/۶۳۸۹	۰/۲۳	۰/۸۳۷۷	۰/۸۴۱۴	۰/۴۳	۰/۹۹۳۸	۰/۹۹۹۵	۰/۵۷
ω_5	۱/۰۹۳۰	۱/۰۹۴۵	۰/۱۳	۱/۲۳۷۶	۱/۲۲۴۸	۱/۰۳	۱/۲۳۸۳	۱/۲۲۲۹	۱/۲۴

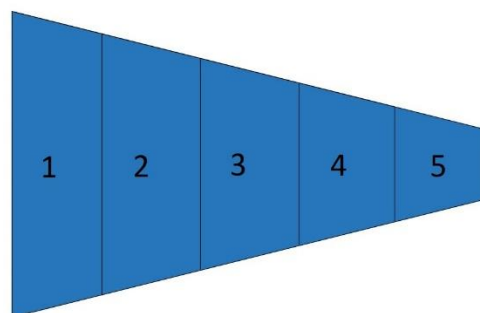
بالاتر مشتق، آسیب ها با وضوح بهتری قابل تشخیص می باشند، برای نشان دادن این موضوع از نسبت آسیب های مشتق مرتبه اول، دوم و سوم برای یک نقطه استفاده شد که به ترتیب ۱/۰، ۱/۱ و ۱/۲ می باشند، با توجه به این امر از مشتق سوم برای نمایش نمودار ها استفاده شده است.

اشکال (۶) تا (۸) تغییرات مشتق سوم شکل مودی اول در طول مخروط

محل آسیب در سناریو ۳ با تکیه گاه ساده مستقر بر بستر الاستیک، در شکل (۵) شکل مود اول تا سوم و همچنین مشتق اول، دوم و سوم اولین شکل مود ارائه شده است. همانطور که ملاحظه می شود منحنی شکل مود به صورت پیوسته بوده و محل های آسیب دیده از روی منحنی شکل مودی قابل تشخیص نمی باشد، همانطور که در شکل ۵-ب مشخص است در مراتب

آسیب دیدگی در سایر المان های سازه است. همچنین مشاهده می شود که با کاهش ضریب بستر، ناپیوستگی در نقاط مورد نظر محسوس تر می باشد. موارد اشاره شده برای هر دو حالت تکیه گاهی گیردار و ساده برقرار می باشد. در شکل (۷) مشتق سوم جابجایی برای سازه ی آسیب دیده در المان اول و چهارم (سناریوی (۲)) با ضرایب سختی ۰، ۵۰ و ۱۰۰ نشان داده شده است؛ در این حالت، برخلاف سناریوی (۱)، تعداد المان های آسیب دیده افزایش یافته است تا کارایی روش مورد استفاده در تشخیص محل آسیب های دوگانه مشخص گردد.

همانطور که از شکل (۷) مشاهده می شود مشتق سوم شکل مود اول در انتهای المان اول و دو سر المان چهارم) در $\dot{w}_m = 0$ ، $\dot{w}_m = 0$ و $\dot{w}_m = 0$ نسبت به ابتدای مخروط) دارای ناپیوستگی بوده که نشان دهنده ی آسیب در المانهای فوق می باشد و در سایر قسمت ها، نمودار پیوسته می باشد که نشانگر عدم وجود آسیب دیدگی در سایر المان های سازه است. همانند شکل (۶)، مشاهده می شود که با کاهش ضریب بستر ناپیوستگی در نقاط مدنظر محسوس تر می باشد. نتایج حاصل از شکل فوق نمایانگر کارایی روش مورد استفاده در تشخیص محل آسیب ها دوگانه است. همانند سناریوهای خرابی پیشین، در شکل (۸)، در اطراف المان های آسیب



شکل ۴. نحوه تقسیم بندی پوسته مخروطی

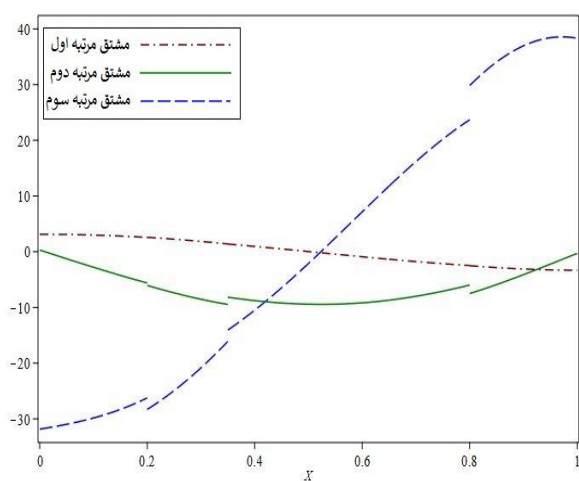
Fig. 4. The method of dividing the conical shell

برای سازه آسیب دیده برای هر یک از سناریوهای فوق نشان می دهند. در شکل (۶) مشتق سوم جابجایی برای سازه ی آسیب دیده در المان سوم با ضرایب سختی ۰، ۵۰ و ۱۰۰ نشان داده شده است؛ همانطور که مشاهده می شود مشتق سوم در ابتدا و انتهای المان سوم) در $\dot{w}_m = 0$ و $\dot{w}_m = 0$ نسبت به ابتدای مخروط) دارای ناپیوستگی بوده که نشان دهنده ی آسیب در این المان می باشد و در سایر قسمت ها، نمودار پیوسته می باشد که نشانگر عدم وجود

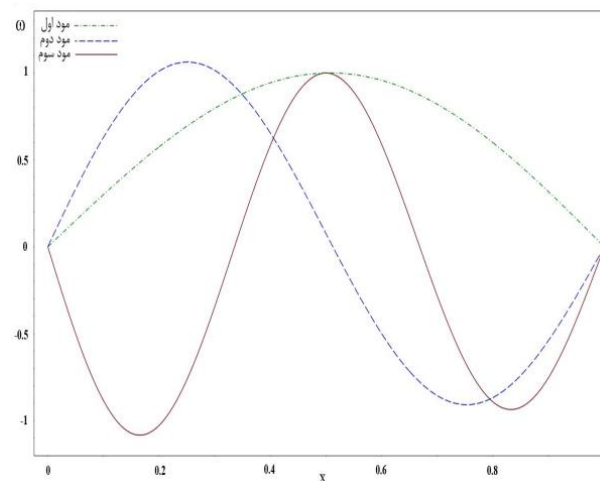
جدول ۸. مقایسه فرکانس بی بعد شده مود اول بدست آمده برای سازه آسیب دیده و سالم در سناریوهای خرابی مختلف در شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار و دوسر ساده به ازای $g=1$.

Table 8. Comparison of the dimensionless frequency of the first mode obtained for the damaged and intact structure in different damage scenarios for fixed and simple end supports and considering $g=1$

	سناریوی ۱			سناریوی ۲			سناریوی ۳		
	شماره المان			شماره المان			شماره المان		
	تک گانه			دو گانه			سه گانه		
	درصد آسیب			درصد آسیب			درصد آسیب		
	۱۰۰	۵۰	۰	۱۰۰	۵۰	۰	۱۰۰	۵۰	۰
سختی بستر ($\bar{k}_w$)	۰/۶۰۳۴	۰/۵۳۷۲	۰/۴۵۹۲	۰/۶۰۳۴	۰/۵۳۷۲	۰/۴۵۹۲	۰/۶۰۳۴	۰/۵۳۷۲	۰/۴۵۹۲
فرکانس سازه سالم	۰/۶۰۳۴	۰/۵۳۷۲	۰/۴۵۹۲	۰/۶۰۳۴	۰/۵۳۷۲	۰/۴۵۹۲	۰/۶۰۳۴	۰/۵۳۷۲	۰/۴۵۹۲
فرکانس سازه آسیب دیده	۰/۶۰۰۱	۰/۵۳۲۵	۰/۴۵۲۱	۰/۵۹۶۸	۰/۵۳۰۲	۰/۴۵۱۸	۰/۵۸۷۴	۰/۵۲۱۱	۰/۴۴۳۱
فرکانس سازه سالم	۰/۵۳۳۱	۰/۴۱۳۷	۰/۳۱۸۳	۰/۵۳۳۱	۰/۴۱۳۷	۰/۳۱۸۳	۰/۵۳۳۱	۰/۴۱۳۷	۰/۳۱۸۳
فرکانس سازه آسیب دیده	۰/۴۸۶۹	۰/۴۰۸۶	۰/۳۱۱۳	۰/۴۸۷۱	۰/۴۰۹۴	۰/۳۱۲۷	۰/۴۸۶۱	۰/۴۰۸۴	۰/۳۱۲۱



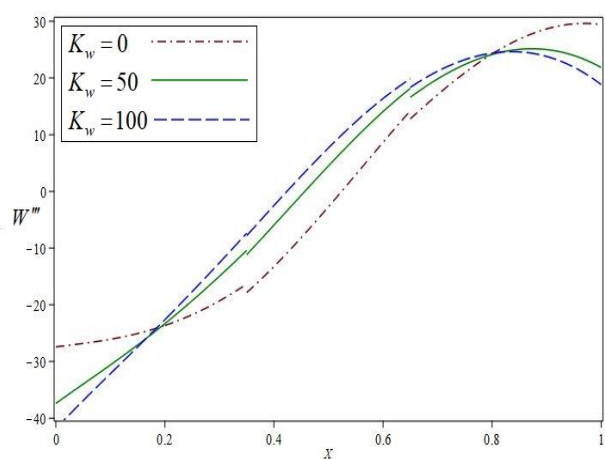
(ب)



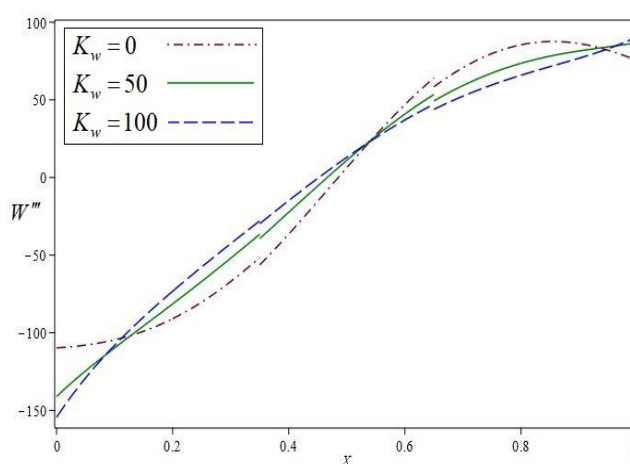
(الف)

شکل ۵. نتایج مربوط به سناریوی (۳) با تکیه گاه ساده مستقر بر بستر الاستیک، الف: شکل مودهای اول تا سوم، ب: مشتق مرتبه اول، دوم و سوم شکل مود اول

Fig. 5. Results for scenario (3) with a simple support resting on an elastic bed, a. first to third mode shapes b. first, second, and third order derivatives of the first mode shape.



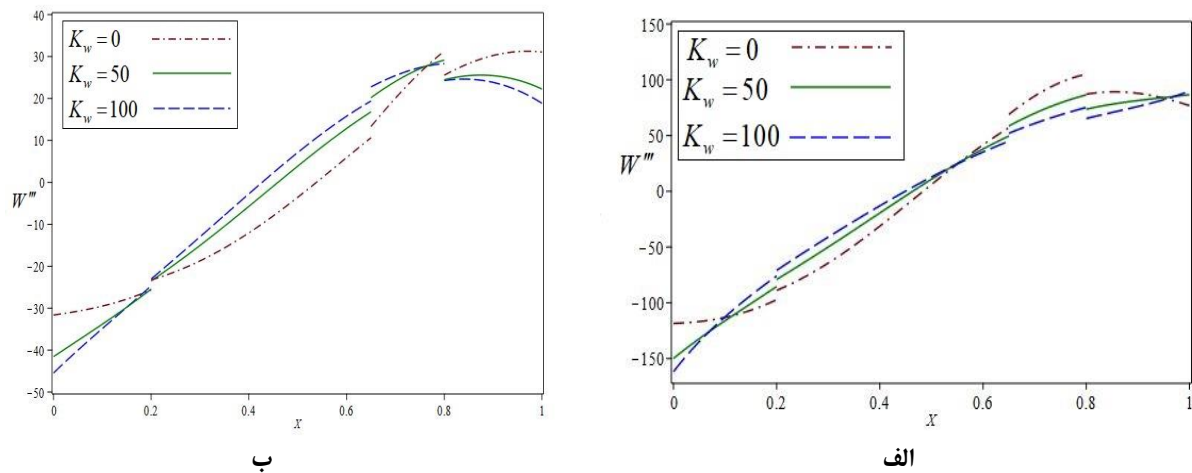
ب



الف

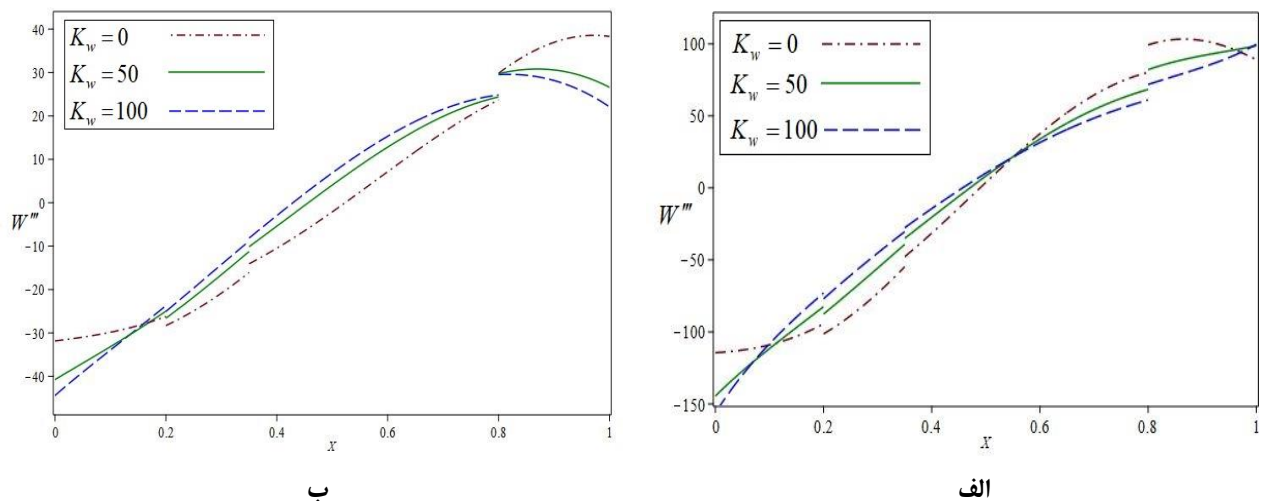
شکل ۶. مقادیر مشتق سوم مود اول فرکانس برای سناریوی (۱): الف: حالت دو سر گیردار، ب: حالت دو سر ساده

Fig. 6. Third derivative values of the first mode frequency for scenario (1); a. for fixed supports ; b. for simple supports



شکل ۷. مقادیر مشتق سوم مود اول فرکانس برای سناریوی (۲): الف: حالت دو سر گیردار و ب: حالت دو سر ساده

Fig. 7. Third derivative values of the first mode frequency for scenario (2); a. for fixed supports; b. for simple supports



شکل ۸. مقادیر مشتق سوم مود اول فرکانس برای سناریوی (۳): الف: حالت دو سر گیردار و ب: حالت دو سر ساده

Fig. 8. Third derivative values of the first mode frequency for scenario (3); a. for fixed supports; b. for simple supports

استفاده قرار گیرد.

در ادامه به بررسی مقدار g پرداخته شده است، g پارامتر دلخواه توانی کسر حجمی می باشد که در رابطه (۴) نشان داده شده و تغییرات E نسبت به g در نمودار شکل (۲) ارائه شده است. همانطور که از جداول (۹) و (۱۰) مشخص است تعداد سناریو و نوع و درصد آسیب و سختی بستر مشابه جدول (۸) بیان شده است این مشابهت برای بررسی بهتر تغییرات مقدار g می باشد.

دیده، مشتق سوم شکل مودی دارای ناپیوستگی است. همچنین مشابه حالت های قبل، این ناپیوستگی در حالت ضریب بستر کوچکتر با وضوح بیشتری در نمودارها مشاهده می گردد.

با توجه به آنچه که در اشکال (۶) الی (۸) مشاهده شده است، روش ارائه شده برای مدل سازی پوسته های مخروطی هدفمند، به خوبی قادر به تشخیص محدوده آسیب خواهد بود و می تواند در سازه های واقعی نیز مورد

جدول ۹. مقایسه فرکانس بی بعد شده مود اول بدست آمده برای سازه آسیب دیده و سالم در سناریوهای آسیب مختلف در شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار و دوسر آزاد به ازای $g=0.2$.

Table 9. Comparison of the dimensionless frequency of the first mode obtained for the damaged and intact structures in different damage scenarios for fixed and simple end supports and considering $g=0.2$.

	سناریو آسیب			سناریوی ۱			سناریوی ۲			سناریوی ۳		
	شماره المان			۳			۴ و ۱			۵ و ۱ و ۲ و ۵		
	نوع آسیب			تک گانه			دو گانه			سه گانه		
	درصد آسیب			۸٪			۸٪ و ۱۶٪			۶٪ و ۱۲٪ و ۱۸٪		
	سختی بستر ($\bar{K}_w$)			۱۰۰	۵۰	۰	۱۰۰	۵۰	۰	۱۰۰	۵۰	۰
دو سر گیردار	فرکانس سازه سالم			۰/۶۵۶۲	۰/۶۰۱۸	۰/۵۴۰۷	۰/۶۵۶۲	۰/۶۰۱۸	۰/۵۴۰۷	۰/۶۵۶۲	۰/۶۰۱۸	۰/۵۴۰۷
	فرکانس سازه آسیب دیده			۰/۶۵۱۶	۰/۵۹۵۸	۰/۵۳۲۶	۰/۶۴۷۹	۰/۵۹۳۲	۰/۵۳۱۷	۰/۶۳۶۷	۰/۵۸۲۳	۰/۵۲۱۳
دو سر ساده	فرکانس سازه سالم			۰/۵۷۳۷	۰/۴۵۲۵	۰/۳۷۷۰	۰/۵۷۳۷	۰/۴۵۲۵	۰/۳۷۷۰	۰/۵۷۳۷	۰/۴۵۲۵	۰/۳۷۷۰
	فرکانس سازه آسیب دیده			۰/۵۱۱۸	۰/۴۴۶۰	۰/۳۶۸۸	۰/۵۱۲۳	۰/۴۴۷۱	۰/۳۷۰۴	۰/۵۱۰۸	۰/۴۴۵۷	۰/۳۶۹۴

جدول ۱۰. مقایسه فرکانس بی بعد شده مود اول بدست آمده برای سازه آسیب دیده و سالم در سناریوهای آسیب مختلف در شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار و دوسر آزاد به ازای $g=5$.

Table 10. Comparison of the dimensionless frequency of the first mode obtained for the damaged and intact structures in different damage scenarios for fixed and simple end supports and considering $g=5$.

	سناریو آسیب			سناریوی ۱			سناریوی ۲			سناریوی ۳		
	شماره المان			۳			۴ و ۱			۵ و ۱ و ۲ و ۵		
	نوع آسیب			تک گانه			دو گانه			سه گانه		
	درصد آسیب			۸٪			۸٪ و ۱۶٪			۶٪ و ۱۲٪ و ۱۸٪		
	سختی بستر ($\bar{K}_w$)			۱۰۰	۵۰	۰	۱۰۰	۵۰	۰	۱۰۰	۵۰	۰
دو سر گیردار	فرکانس سازه سالم			۰/۵۵۶۱	۰/۴۷۵۷	۰/۳۷۴۸	۰/۵۵۶۱	۰/۴۷۵۷	۰/۳۷۴۸	۰/۵۵۶۱	۰/۴۷۵۷	۰/۳۷۴۸
	فرکانس سازه آسیب دیده			۰/۵۵۴۷	۰/۴۷۳۰	۰/۳۶۹۳	۰/۵۵۰۸	۰/۴۶۹۹	۰/۳۶۸۶	۰/۵۴۲۵	۰/۴۶۲۰	۰/۳۶۱۳
دو سر ساده	فرکانس سازه سالم			۰/۵۰۳۶	۰/۳۸۰۹	۰/۲۵۷۷	۰/۵۰۳۶	۰/۳۸۰۹	۰/۲۵۷۷	۰/۵۰۳۶	۰/۳۸۰۹	۰/۲۵۷۷
	فرکانس سازه آسیب دیده			۰/۴۷۰۷	۰/۳۷۷۶	۰/۲۵۲۱	۰/۴۷۰۱	۰/۳۷۷۷	۰/۲۵۳۲	۰/۴۶۹۳	۰/۳۷۶۸	۰/۲۵۲۷

thermoelastic buckling and free vibration behavior of functionally graded truncated conical shells, Journal of Sound and Vibration, 292(1-2) (2006) 341-371.

- [3] M. Shariyat, M. Alipour, A Differential Transform Approach for Modal Analysis of Variable Thickness Two-directional FGM Circular Plates on Elastic Foundations, Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME, 11(2) (2010) 15-38.
- [4] M. Shariyat, M. Alipour, A power series solution for vibration and complex modal stress analyses of variable thickness viscoelastic two-directional FGM circular plates on elastic foundations, Applied Mathematical Modelling, 37(5) (2013) 3063-3076.
- [5] M. Alipour, M. Shariyat, An analytical global-local Taylor transformation-based vibration solution for annular FGM sandwich plates supported by nonuniform elastic foundations, Archives of Civil and Mechanical Engineering, 14(1) (2014) 6-24.
- [6] G. Jin, Z. Su, T. Ye, X. Jia, Three-dimensional vibration analysis of isotropic and orthotropic conical shells with elastic boundary restraints, International Journal of Mechanical Sciences, 89 (2014) 207-221.
- [7] N. Navabian, M. Bozorgnasab, R. Taghipour, O. Yazdanpanah, Damage identification in plate-like structure using mode shape derivatives, Archive of Applied Mechanics, 86(5) (2016) 819-830.
- [8] M. Alipour, A novel economical analytical method for bending and stress analysis of functionally graded sandwich circular plates with general elastic edge conditions, subjected to various loads, Composites Part B: Engineering, 95 (2016) 48-63.
- [9] S. Mohammadrezazadeh, A.A. Jafari, The influences of magnetostrictive layers on active vibration control of laminated composite rotating cylindrical shells based on first-order shear deformation theory, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 233(13) (2019) 4606-4619.
- [10] E. Aghaahmadi, R. Taghipour, M. Bozorgnasab, M.

بر اساس نتایج نشان داده شده در جدول (۹) و همانطور که انتظار می رود، مقدار فرکانس های سازه سالم و هم فرکانس های سازه آسیب دیده نسبت به جدول (۸) افزایش پیدا کرده است این افزایش به دلیل کاهش مقدار g می باشد. در ادامه مشابه جدول قبل و این بار مقدار g افزایش داده شده است و نتایج در جدول (۱۰) نشان داده شده است. همانطور که از جدول فوق مشخص است با افزایش مقدار g و بدون تغییر بقیه عوامل، مشاهده می شود که مقدار فرکانس سازه سالم و فرکانس سازه آسیب دیده در هر دو حالت تکیه گاهی کاهش پیدا می کند. همانطور که از جداول (۹) و (۱۰) پیداست مقدار g با فرکانس رابطه عکس دارد، هرچقدر مقدار g از یک کمتر باشد مقدار فرکانس بیشتر است و جنس جسم به سمت سرامیک میل پیدا می کند و هرچقدر مقدار g بیشتر از یک باشد مقدار فرکانس کاهش می یابد و خواص ماده به سمت فلز میل پیدا می کند. حال باید به این نکته اشاره کرد که اگر مقدار g یک باشد رابطه خطی می باشد که در جدول (۸) به آن پرداخته شده است.

۵- نتیجه گیری و جمع بندی

در این مطالعه، یک روش تحلیلی براساس تئوری برشی مرتبه ی اول برای مدلسازی پوسته های مخروطی هدفمند بیان گردیده است. با استخراج معادلات حاکم و بمنظور بررسی صحت مدلسازی عددی، نتایج حاصله با نتایج ارائه شده در مرجع [۱] مقایسه شده است و همچنین با نتایج بدست آمده از نرم افزار آباکوس برای پوسته مخروطی هدفمند با تکیه گاه دو سر ساده و دو سر گیردار و دو سر آزاد مورد مقایسه قرار گرفته است که در هر دو حالت صحت سنجی از تطابق قابل قبولی برخوردار بوده است. در ادامه برای بررسی کارایی روش پیشنهادی در تشخیص محدوده آسیب دیده سازه، پوسته مخروطی به پنج المان تقسیم گردید؛ سناریوهای خرابی تک گانه، دوگانه و چندگانه در شرایط تکیه گاهی مختلف و با اعمال شرایط بستر متفاوت تعریف گردید. با کمک مشتقات اشکال مودی، محدوده آسیب بررسی گردید. بررسی ها نشانگر عملکرد مناسب مدل پیشنهادی در تشخیص محل آسیب می باشند. روش پیشنهادی قابلیت گسترش در سازه های واقعی را دارا می باشد.

منابع

- [1] G. Buchanan, F.-I. Wong, Frequencies and mode shapes for thick truncated hollow cones, International journal of mechanical sciences, 43(12) (2001) 2815-2832.
- [2] R.K. Bhangale, N. Ganesan, C. Padmanabhan, Linear

- Mirgolbabaee, A novel method for identification of damage location in frame structures using a modal parameters-based indicator, Archives of Civil Engineering, 68(3) (2022) 633-643.
- [14] G. Fan, M. Lezgy-Nazargah, An efficient seven-parameter double superposition-based theory for free vibration analysis of laminated composite shells, European Journal of Mechanics-A/Solids, 106 (2024) 105299.
- [15] D. Yao, M. Lezgy-Nazargah, A new double superposition-based shear deformation theory for static analysis of multilayered composite and sandwich doubly-curved shells, Thin-Walled Structures, 198 (2024) 111703.
- Mollaaliipour, Damage Identification In Cylindrical Shells With Functionally Graded Materials Resting On Elastic Foundation, Sharif Journal of Civil Engineering, 36.2(3.2) (2020) 125-133.
- [11] E. Sotoudehnia, F. Shahabian, A.A. Sani, Damage detection of cylindrical shells based on Sander's theory and model updating using incomplete modal data considering random noises, European Journal of Mechanics-A/Solids, 85 (2021) 104110.
- [12] R. Taghipour, M.R. Nashta, M. Bozorgnasab, H. Mirgolbabaee, A new index for damage identification in beam structures based on modal parameters, Archive of Mechanical Engineering, 68(4) (2021) 375-394.
- [13] M.R. Nashta, R. Taghipour, M. Bozorgnasab, H.

پیوست (الف). معادلات حاکم بر اساس سری توانی

همانطور که در متن بیان گردید با استفاده از سری توانی تیلور و با جایگذاری معادلات (۱۴) در معادلات (۱۲) و (۱۳) معادلات حاکم و شرایط مرزی به صورت سری قابل بیان می باشد. همچنین در روابط زیر ω فرکانس طبیعی سازه می باشد:

معادله اول:

$$\begin{aligned} & A \sum_{i=2}^N (i)(i-1)U_i(x-x_0)^{i-2} - A \sum_{i=1}^N iU_i(x-x_0)^{i-1} \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j - A \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j - \\ & - B \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \sum_{i=1}^N (i)\Psi_i^{(x)}(x-x_0)^{i-1} + B \sum_{i=2}^N i(i-1)\Psi_i^{(x)}(x-x_0)^{i-2} - B \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i - \\ & - \bar{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=1}^N (i)W_i(x-x_0)^{i-1} - A \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N W_i(x-x_0)^i = -I_0 \omega^2 \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i - \\ & I_1 \omega^2 \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i \Rightarrow A \sum_{i=0}^N (i+1)(i+2)U_{i+2}(x-x_0)^i - A \sum_{i=0}^N (i+1)U_{i+1}(x-x_0)^i \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j - \\ & A \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j - B \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N (i+1)\Psi_{i+1}^{(x)}(x-x_0)^i + B \sum_{i=0}^N (i+1)(i+2)\Psi_{i+2}^{(x)}(x-x_0)^i - \\ & B \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i - \bar{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N (i+1)W_i(x-x_0)^i - \\ & A \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N W_i(x-x_0)^i + I_0 \omega^2 \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i + I_1 \omega^2 \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

الف-۱

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^N \left[\sum_{j=0}^{i+1} (i-j+1)Y^{j+1} \left(A U_{i-j+1} + B \Psi_{i-j+1}^{(x)} + \tan(\phi) \bar{A} W_{i-j+1} \right) + \sum_{j=0}^i (j+1)Y^{j+2} \left((\bar{A}-A)U_{i-j} + (\bar{B}-B)\Psi_{i-j}^{(x)} + \tan(\phi)(\bar{A}-A)W_{i-j} \right) + (i+2)(i+1) \left(A U_{i+2} + B \Psi_{i+2}^{(x)} \right) + \omega^2 \left(I_0 U_i + I_1 \Psi_i^{(x)} \right) \right] (x-x_0)^i = 0$$

معادله دوم:

$$\begin{aligned}
 & B \sum_{i=2}^N i(i-1)U_i(x-x_0)^{i-2} - B \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \sum_{i=1}^N iU_i(x-x_0)^{i-1} - \\
 & B \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i + D \sum_{i=2}^N i(i-1)\Psi_i^{(x)}(x-x_0)^{i-2} - \\
 & D \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \sum_{i=1}^N i\Psi_i^{(x)}(x-x_0)^{i-1} - D \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i - \\
 & -\bar{B} \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N W_i(x-x_0)^{i-1} - B \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N W_i(x-x_0)^i - \\
 & -k\tilde{A} \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i - k\tilde{A} \sum_{i=0}^N W_i(x-x_0)^{i-1} = -I_1 \omega^2 \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i - I_2 \omega^2 \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Rightarrow B \sum_{i=0}^N (i+1)(i+2)U_{i+2}(x-x_0)^i - B \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N (i+1)U_{i+1}(x-x_0)^i - \\
 & B \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i + D \sum_{i=0}^N (i+1)(i+2)\Psi_{i+2}^{(x)}(x-x_0)^i - \\
 & D \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N (i+1)\Psi_{i+1}^{(x)}(x-x_0)^i - D \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i - \\
 & -\bar{B} \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N (i+1)W_{i+1}(x-x_0)^i - B \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N W_i(x-x_0)^i - \\
 & -k\tilde{A} \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i - k\tilde{A} \sum_{i=0}^N (i+1)W_{i+1}(x-x_0)^i + I_1 \omega^2 \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i + I_2 \omega^2 \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i = 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

الف-۲

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^N \left[\sum_{j=0}^i (j+1)Y^{j+2} \left((-B)U_{i-j} + (-D)\Psi_{i-j}^{(x)} + (-B)\tan(\phi)W_{i-j} \right) + \right. \\
 \left. (i+2)(i+1) \left(BU_{i+2} + D\Psi_{i+2}^{(x)} \right) - k\tilde{A} \left(\Psi_i^{(x)} + (i+1)W_{i+1} \right) + \omega^2 \left(I_1 U_i + I_2 \Psi_i^{(x)} \right) \right] (x-x_0)^i = 0$$

معادله سوم:

$$\begin{aligned} & \bar{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=1}^N (i) \mathcal{U}_i (x-x_0)^{i-1} - A \sum_{j=0}^N (j+1) Y^{j+2} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N U_i (x-x_0)^i + \\ & + \bar{B} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=1}^N i \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^{i-1} - B \sum_{j=0}^N (j+1) Y^{j+2} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^i + \\ & + k \tilde{A} \sum_{i=1}^N i \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^{i-1} - k \tilde{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^i + k \tilde{A} \sum_{i=2}^N (i)(i-1) \mathcal{W}_i (x-x_0)^{i-2} - \\ & - k \tilde{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \sum_{i=1}^N (i) \mathcal{W}_i (x-x_0)^{i-1} - A \sum_{j=0}^N (j+1) Y^{j+2} (x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \mathcal{W}_i (x-x_0)^i - \\ & + k_w a_0 \sum_{i=0}^N \mathcal{W}_i (x-x_0)^i + k_w a_1 \sum_{i=1}^N (i) \mathcal{W}_i (x-x_0)^{i-1} + k_w a_2 \sum_{i=2}^N (i)(i-1) \mathcal{W}_i (x-x_0)^{i-2} = -I_1 \omega^2 \sum_{i=0}^N \mathcal{W}_i (x-x_0)^i \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Rightarrow \bar{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N (i+1) \mathcal{U}_{i+1} (x-x_0)^i - A \sum_{j=0}^N (j+1) Y^{j+2} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N U_i (x-x_0)^i + \\ & + \bar{B} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N (i+1) \Psi_{i+1}^{(x)} (x-x_0)^i - B \sum_{j=0}^N (j+1) Y^{j+2} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^i + \\ & + k \tilde{A} \sum_{i=0}^N (i+1) \Psi_{i+1}^{(x)} (x-x_0)^i - k \tilde{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^i + k \tilde{A} \sum_{i=0}^N i(i+1) \mathcal{W}_{i+2} (x-x_0)^i - \\ & - k \tilde{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \sum_{i=0}^N (i+1) \mathcal{W}_{i+1} (x-x_0)^i - A \sum_{j=0}^N (j+1) Y^{j+2} (x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \mathcal{W}_i (x-x_0)^i + I_1 \omega^2 \sum_{i=0}^N \mathcal{W}_i (x-x_0)^i - \\ & + k_w a_0 \sum_{i=0}^N \mathcal{W}_i (x-x_0)^i + k_w a_1 \sum_{i=0}^N (i+1) \mathcal{W}_{i+1} (x-x_0)^i + k_w a_2 \sum_{i=0}^N (i+1)(i+2) \mathcal{W}_{i+2} (x-x_0)^i = 0 \Rightarrow \end{aligned} \quad \text{الف-۳}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^N \left[\begin{aligned} & \tan(\phi) \sum_{j=0}^{i+1} Y^{j+1} (i-j+1) (\bar{A} U_{i-j+1} + \bar{B} \Psi_{i-j+1}^{(x)}) - \tan(\phi) \sum_{j=0}^i (j+1) Y^{j+2} (A U_{i-j} + B \Psi_{i-j}^{(x)}) + \\ & + k \tilde{A} ((i+1) \Psi_{i+1}^{(x)} + (i+2)(i+1) \mathcal{W}_{i+2}) - k \tilde{A} \sum_{j=0}^{i+1} Y^{j+1} (i-j+1) \mathcal{W}_{i-j+1} - k \tilde{A} \sum_{j=0}^i Y^{j+1} \Psi_{i-j}^{(x)} - \\ & - A \tan^2(\phi) \sum_{j=0}^i (j+1) Y^{j+2} \mathcal{W}_{i-j} + I_1 \omega^2 \mathcal{W}_i + k_w a_0 \mathcal{W}_i + k_w a_1 (i+1) \mathcal{W}_{i+1} + k_w a_2 (i+1)(i+2) \mathcal{W}_{i+2} \end{aligned} \right] (x-x_0)^i = 0$$

معادلات حاکم حول نقطه L (نقطه انتهای پوسته در راستای محور X) بسط داده شده است. در ادامه برای به دست آوردن شرایط

مرزی از معادلات (۱۳) و (۱۰) استفاده شده است که با کمک سری توانی تیلور معادلات زیر بدست می آیند :

معادله چهارم:

$$\begin{aligned}
 N_x &= A \sum_{i=1}^N (i) u_i (x - x_0)^{i-1} + \bar{A} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N u_i (x - x_0)^i + \\
 &\bar{A} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N w_i (x - x_0)^i + B \sum_{i=1}^N (i) \psi_i^{(X)} (x - x_0)^{i-1} + \\
 &\bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N \psi_i^{(X)} (x - x_0)^i \Rightarrow N_x = A \sum_{i=0}^N (i+1) u_{i+1} (x - x_0)^i + \\
 &\bar{A} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N u_i (x - x_0)^i + \bar{A} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N w_i (x - x_0)^i + \\
 &B \sum_{i=0}^N (i+1) \psi_{i+1}^{(X)} (x - x_0)^i + \bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N \psi_i^{(X)} (x - x_0)^i \Rightarrow \\
 \Rightarrow N_x &= \sum_{i=0}^N \left[\begin{aligned} &A (i+1) u_{i+1} + \bar{A} \frac{\cos(\phi)}{R_0} u_i + \bar{A} \frac{\sin(\phi)}{R_0} w_i + \\ &B (i+1) \psi_{i+1}^{(X)} + \bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_i^{(X)} \end{aligned} \right] (x - x_0)^i
 \end{aligned}$$

الف-۴

معادله پنجم:

$$\begin{aligned}
 M_x &= B \sum_{i=1}^N (i) u_i (x - x_0)^{i-1} + \bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N u_i (x - x_0)^i + \\
 &\bar{B} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N w_i (x - x_0)^i + D \sum_{i=0}^N (i) \psi_i^{(X)} (x - x_0)^{i-1} + \\
 &\bar{D} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=1}^N \psi_i^{(X)} (x - x_0)^i \Rightarrow M_x = B \sum_{i=0}^N (i+1) u_{i+1} (x - x_0)^i + \\
 &\bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N u_i (x - x_0)^i + \bar{B} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N w_i (x - x_0)^i + \\
 &D \sum_{i=0}^N (i+1) \psi_{i+1}^{(X)} (x - x_0)^i + \bar{D} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=1}^N \psi_i^{(X)} (x - x_0)^i \Rightarrow \\
 \Rightarrow M_x &= \sum_{i=0}^N \left[\begin{aligned} &B (i+1) u_{i+1} + \bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} u_i + \bar{B} \frac{\sin(\phi)}{R_0} w_i + \\ &D (i+1) \psi_{i+1}^{(X)} + \bar{D} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_i^{(X)} \end{aligned} \right] (x - x_0)^i
 \end{aligned}$$

الف-۵

معادله ششم:

$$\begin{aligned} Q_x &= k \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = k \tilde{A} (\psi_x + w_{,x}) = k \tilde{A} \sum_{i=0}^N \psi_i^{(X)} (x - x_0)^i + \\ &k \tilde{A} \sum_{i=1}^N (i) w_{,i} (x - x_0)^{i-1} \Rightarrow Q_x = k \tilde{A} \sum_{i=0}^N \psi_i^{(X)} (x - x_0)^i + \\ &k \tilde{A} \sum_{i=0}^N (i+1) w_{,i+1} (x - x_0)^i \Rightarrow \\ Q_x &= \sum_{i=0}^N \left[k \tilde{A} \psi_i^{(X)} + k \tilde{A} (i+1) w_{,i+1} \right] (x - x_0)^i \end{aligned}$$

الف-۶

بخشی از کد مورد استفاده در مقاله (دستور for)

for i from 0 to N do

```
Equation_1[i]:=evalf(simplify((i+2)*(i+1)*(Aa*U[i+2]+Ba*F[i+2])-sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*(i-j+1)*(Aa*U[i-j+1]+Ba*F[i-j+1]),j=0..i+1)-sum((j+1)*(-cos(phi)/Rb)^(j+2)*(Aa*U[i-j]+Ba*F[i-j]),j=0..i)+tan(phi)*Ab*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*(i-j+1)*W[i-j+1],j=0..i+1)-Aa*tan(phi)*sum((j+1)*(-cos(phi)/Rb)^(j+2)*W[i-j],j=0..i)+omega^2*I0*U[i]+omega^2*I1*F[i]));
```

```
Equation_2[i]:=evalf(simplify((i+2)*(i+1)*(Ba*U[i+2]+Ca*F[i+2])-sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*(i-j+1)*(Ba*U[i-j+1]+Ca*F[i-j+1]),j=0..i+1)-sum((j+1)*(-cos(phi)/Rb)^(j+2)*(Ba*U[i-j]+Ca*F[i-j]),j=0..i)+tan(phi)*Bb*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*(i-j+1)*W[i-j+1],j=0..i+1)-Ba*tan(phi)*sum((j+1)*(-cos(phi)/Rb)^(j+2)*W[i-j],j=0..i)-k*Ac*(F[i]+(i+1)*W[i+1])+omega^2*I1*U[i]+omega^2*I2*F[i]));
```

```
Equation_3[i]:=evalf(simplify(tan(phi)*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*(i-j+1)*(Ab*U[i-j+1]+Bb*F[i-j+1]),j=0..i+1)-tan(phi)*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+2)*(j+1)*(Aa*U[i-j]+Ba*F[i-j]),j=0..i)-k*Ac*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*F[i-j],j=0..i)-k*Ac*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*(i-j+1)*W[i-j+1],j=0..i+1)+k*Ac*(i+1)*F[i+1]+k*Ac*(i+1)*(i+2)*W[i+2]-Aa*tan(phi)^2*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+2)*(j+1)*W[i-j],j=0..i)+omega^2*I0*W[i]));
```

end do;

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

E. Aghaahmadi, R. Taghipour, M. Bozorgnasab, M. Mollaalipour, Damage Identification in Conical Shell Structures Using Analytical Methods Based on Free Vibration of the Structure, Amirkabir J. Civil Eng., 57(7) (2025) 1195-1220.

DOI: [10.22060/ceej.2025.23141.8119](https://doi.org/10.22060/ceej.2025.23141.8119)



