

Nonlocal Buckling of Orthotropic Nanosheets with a Central Crack

Vahid Abdolvahab , Parham Memarzadeh * 

Department of Civil Engineering, Na.C., Islamic Azad University, Najafabad, Iran.

ABSTRACT: In this study, a comprehensive study of the non-local buckling of orthotropic nanosheets with a central crack under uniaxial and biaxial loads has been conducted. Given the increasing advances in nanotechnology and the widespread applications of nanosheets in various industries such as electronics, medicine, and engineering structures, a detailed analysis of the mechanical behavior of these nanostructures is essential. Damages such as cracks that occur during the production process of nanosheets can have significant negative effects on the performance of these materials. In this regard, non-local non-classical theories have been used as a new approach to analyze the behavior of nanosheets. This research involves the development of governing equations based on first-order shear deformation theory and the use of the extended finite element method to analyze cracked nanosheets. The main variables studied in this study are: crack length to sheet width ratio, small-scale parameter that refers to the effects of nanostructures on buckling behavior, nanosheet thickness, and different support conditions. The results obtained show that the small-scale parameter significantly reduces the critical buckling capacity of nanosheets. In particular, for nanosheets with an aspect ratio of 0.6, the non-local effect can increase up to 1.18 times that of the case without a crack. Furthermore, as the lateral dimensions of the nanosheets increase, the effect of the non-local factor gradually decreases. By providing comprehensive analysis results, this research provides a solid foundation for the design and optimization of orthotropic nanosheets under various loadings and helps to clarify the buckling behavior of these nanostructures. In addition, these results can lead to the development of new production methods and optimal applications of nanosheets in industries.

Review History:

Received: Apr. 29, 2024

Revised: Jul. 10, 2025

Accepted: Sep. 16, 2025

Available Online: Oct. 02, 2025

Keywords:

Orthotropic Nanosheets

Central Crack

Compressive Buckling

Nonlocal Theory

Extended Finite Element Method

1- Introduction

Nanotechnology, as one of the most revolutionary branches of science and engineering, has opened new horizons in the development of advanced materials and devices. Nanoplates, due to their unique properties, have attracted increasing attention in emerging industries such as battery production [1], chemical and biological sensors [2], solar cells [3], and field emission devices [4]. Considering these widespread and critical applications, a precise understanding of the mechanical behavior of nanostructures, particularly under stresses and structural defects, is essential to ensure reliability and optimize their design.

Buckling, as an elastic instability phenomenon under compressive load, is one of the most critical limit states in the design of mechanical structures. At the nanoscale, phenomena such as the size effect parameters significantly differentiate the mechanical behavior of these materials from that of macro-scale materials. Previous research on the buckling and vibration of nanoplates, especially graphene nanoplates, highlights the importance of studying these phenomena. Studies such as those of Farajpour et al. [5–6], Aksencer

and Aydogdu [7], Malekzadeh et al. [8–9], and Memarzadeh and Abdolvahab [10] have investigated issues such as the buckling of graphene nanoplates using classical and non-classical theories, the influence of boundary conditions, and the effect of small-scale parameters.

In many practical applications, nanomaterials exhibit defects such as cracks, which can significantly affect their load-bearing capacity and stability. Analyzing the behavior of cracked nanoplates, especially while accounting for nonlocal effects, which are key characteristics of nanoscale material behavior, represents an important challenge in materials engineering and mechanics. To date, incorporating both small-scale effects and crack presence in orthotropic nanosheets requires more advanced approaches. Employing nonlocal elasticity theory, which extends the stress-strain relationship to neighboring points, is essential for accurately modeling small-scale effects in nanosheets.

This study provides a comprehensive investigation of the nonlocal buckling of orthotropic nanoplates containing a central crack. Within the framework of nonlocal elasticity theory and the first-order shear deformation theory (FSDT),

*Corresponding author's email: parham.memarzadeh@iau.ac.ir

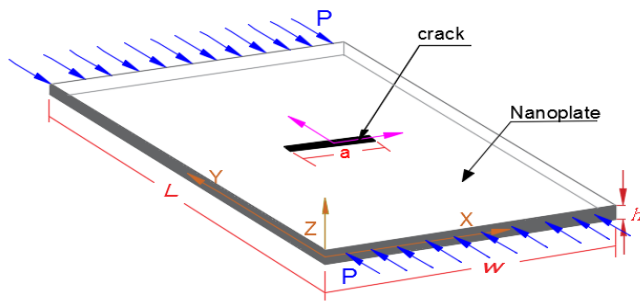


Fig. 1. Schematic of an orthotropic nanosheet in the presence of a center crack defect under a uniform uniaxial compressive load. In this figure, L , W , and h are the length, width, and thickness of the orthotropic nanosheets, respectively, and a denotes the crack length.

the governing equations of these structures are derived. Subsequently, numerical analysis is carried out using the extended finite element method (XFEM). The focus on orthotropic nanoplates, due to their wider applications compared with isotropic materials in certain industries, along with an examination of the influence of geometric parameters, loading mechanisms, and material properties on buckling behavior, places this research among the leading studies in the field.

2- Methodology

2- 1- Theoretical Foundations

To model orthotropic nanoplates while accounting for small-scale effects, the framework of nonlocal elasticity theory is employed. To describe the deformation behavior of nanosheets, the first-order shear deformation theory (FSDT) is used. The governing equations for the buckling of orthotropic nanoplates are derived using the principle of minimum energy along with the application of nonlocal elasticity theory and FSDT. These equations are formulated as an eigenvalue problem, whose solution determines the critical buckling load.

2- 2- Extended Finite Element Method (XFEM)

The extended finite element method (XFEM) is a powerful numerical technique for modeling discontinuities such as cracks in material structures. In XFEM, the solution space is divided into standard finite elements; however, for modeling cracks, additional degrees of freedom are introduced at nodes around the crack. These additional degrees of freedom are defined through enrichment functions, which capture the discontinuous nature of the problem. Since the present research examines the buckling load of an orthotropic nanosheet in the presence of a center crack defect under a compressive load, as shown in Fig. 1.

For crack modeling, a combination of standard finite element shape functions and specific enrichment functions is employed to accurately represent the displacement field near

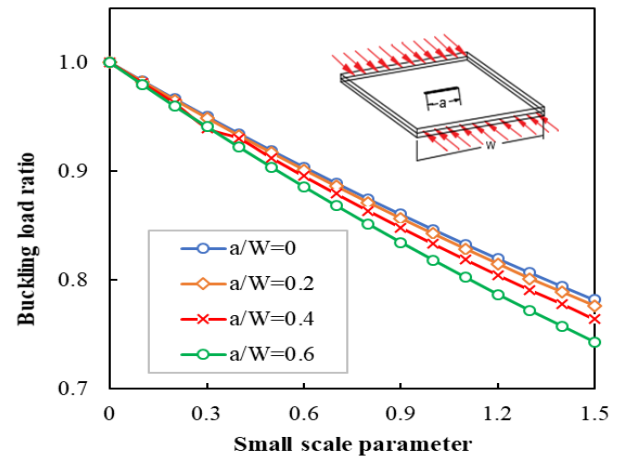


Fig. 2. Investigation of the effect of the small scale parameter (μ) and the component (a/W) on the buckling load capacity of cracked square orthotropic nanosheets under uniaxial loading.

the crack tip and crack edges. These enrichment functions usually include a Heaviside function to model displacement discontinuity along the crack line, and singular functions to represent the asymptotic behavior of stress and displacement fields at the crack tip.

3- Results and Discussion

In this study, eight-node plate elements are used to model cracked nanoplates. The buckling coefficient is typically defined as the ratio of the critical buckling load of the cracked structure to that of the equivalent pristine structure. This coefficient indicates the effect of crack presence and/or small-scale effects on the reduction of buckling capacity. To validate the accuracy of the XFEM-based results, numerical outputs are compared with existing analytical and numerical findings from credible publications. The key variables studied in this research (see Fig. 1) include the crack length-to-width ratio, the small-scale parameter reflecting nanostructural effects on buckling behavior, nanoplate thickness, and different boundary conditions.

In addition, according to Fig. 2, the crack existence in the nanosheet and its length increase intensify the nonlocal effect. e.g., in the case of $\mu=1.5\text{nm}^2$, the nonlocal effect causes a 22% and 26% reduction in the buckling load for $a/W=0$ and 0.6, respectively. It means that a crack with a ratio of 0.6 increases the non-local effect by about 1.18 times compared to the case without a crack.

4- Conclusion

The key findings of this research indicate that:

1. Small-scale effect: The nonlocal parameter significantly reduces the critical buckling capacity of orthotropic nanoplates, with this effect becoming more pronounced at

higher intensities.

2. Crack influence: The presence of a crack, especially at higher relative lengths, amplifies the small-scale effect, leading to further reductions in the critical buckling load of orthotropic nanoplates.

3. Geometric dimensions: The lateral dimensions of the nanoplate play a significant role in the intensity of the small-scale effect; as the dimensions increase, the effect diminishes and the results converge toward classical elasticity theory.

4. Boundary conditions: Boundary constraints also influence the intensity of the nonlocal effect; more restrictive boundary conditions (such as clamped edges) enhance the small-scale effect.

his study provides a solid foundation for a deeper understanding of the buckling behavior of cracked orthotropic nanoplates and for optimizing their design in engineering applications. Understanding the impacts of parameters such as small-scale effects, crack geometry and position, and boundary conditions enables engineers and designers to create nanoscale structures with higher reliability and efficiency. Furthermore, the results of this research can contribute to the development of new methods for producing materials with tailored mechanical properties and for the optimized application of nanoplates in advanced industries.

References

- [1] M. Ma, J. Tu, Y. Yuan, X. Wang, K. Li, F. Mao, Z. Zeng, Electrochemical performance of ZnO nanoplates as anode materials for Ni/Zn secondary batteries, *Journal of Power Sources*, 179(1) (2008) 395-400.
- [2] J. Yguerabide, E.E. Yguerabide, Resonance light scattering particles as ultrasensitive labels for detection of analytes in a wide range of applications, *Journal of Cellular Biochemistry*, 84(S37) (2001) 71-81.
- [3] M. Aagesen, C. Sørensen, Nanoplates and their suitability for use as solar cells, *Proceedings of Clean Technology*, (2008) 109-112.
- [4] W. Bai, X. Zhu, Z. Zhu, J. Chu, Synthesis of zinc oxide nanosheet thin films and their improved field emission and photoluminescence properties by annealing processing, *Applied Surface Science*, 254(20) (2008) 6483-6488.
- [5] A. Farajpour, A. Shahidi, M. Mohammadi, M. Mahzoon, Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics, *Composite Structures*, 94(5) (2012) 1605-1615.
- [6] A. Farajpour, A.A. Solghar, A. Shahidi, Postbuckling analysis of multi-layered graphene sheets under non-uniform biaxial compression, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 47 (2013) 197-206.
- [7] T. Aksencer, M. Aydogdu, Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(4) (2011) 954-959.
- [8] P. Malekzadeh, A. Setoodeh, A.A. Beni, Small scale effect on the thermal buckling of orthotropic arbitrary straight-sided quadrilateral nanoplates embedded in an elastic medium, *Composite Structures*, 93(8) (2011) 2083-2089.
- [9] P. Malekzadeh, A. Setoodeh, A.A. Beni, Small scale effect on the free vibration of orthotropic arbitrary straight-sided quadrilateral nanoplates, *Composite Structures*, 93(7) (2011) 1631-1639.
- [10] V. Abdolvahab, P. Memarzadeh, Effect of crack damage on size-dependent instability of graphene sheets, *Applied Mathematical Modelling*, 129 (2024) 408-427.



کمانش غیرموضعی نانورق‌های اورتوتروپ با ترک مرکزی

وحید عبدالوهاب^{ID}، پرهام معمارزاده^{ID*}

گروه مهندسی عمران، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۱۰
بازنگری: ۱۴۰۴/۰۴/۱۹
پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۲۵
ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۰۷/۱۰

کلمات کلیدی:

نانورق‌های اورتوتروپ
ترک مرکزی
کمانش فشاری
نظریه غیرموضعی
روش اجزاء محدود توسعه‌یافته

خلاصه: در این تحقیق، به بررسی جامع کمانش غیرموضعی نانورق‌های اورتوتروپ با ترک مرکزی تحت بارهای تک و دو-محوری پرداخته شده است. با توجه به پیشرفت‌های روزافزون در فناوری نانو و کاربردهای گسترده نانورق‌ها در صنایع مختلف مانند الکترونیک، پزشکی و سازه‌های مهندسی، تحلیل دقیق رفتار مکانیکی این نانوساختارها امری ضروری است. آسیب‌هایی نظیر ترک که در فرآیند تولید نانورق‌ها به وجود می‌آید، می‌تواند تأثیرات منفی قابل توجهی بر عملکرد این مواد داشته باشد. در این راستا، نظریه‌های غیرکلاسیک غیرموضعی به عنوان رویکردی نوین برای تجزیه و تحلیل رفتار نانورق‌ها به کار گرفته شده است. این تحقیق شامل توسعه معادلات حاکم بر اساس نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول و استفاده از روش المان محدود برای تحلیل نانورق‌های ترک‌دار است. متغیرهای کلیدی مورد مطالعه در این تحقیق عبارتند از: نسبت طول ترک به عرض ورق، عامل مقیاس کوچک که به تأثیرات نانوساختارها بر رفتار کمانشی اشاره دارد، ضخامت نانورق و شرایط تکیه‌گاهی مختلف. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که اثر مقیاس کوچک به طور قابل توجهی ظرفیت کمانشی بحرانی نانورق‌ها را کاهش می‌دهد. به‌ویژه، برای نانورق‌های با نسبت ابعادی ۰/۶، اثر غیرموضعی می‌تواند تا ۱/۱۸ برابر حالت بدون ترک افزایش یابد. علاوه بر این، با افزایش ابعاد جانبی نانورق‌ها، تأثیر عامل غیرموضعی به تدریج کاهش می‌یابد. این پژوهش با ارائه نتایج تحلیل‌های جامع، پایه‌ای مستحکم برای طراحی و بهینه‌سازی نانورق‌های اورتوتروپ تحت بارگذاری‌های مختلف فراهم می‌آورد و به روشن شدن رفتار کمانشی این نانوساختارها کمک می‌کند. به‌علاوه، این نتایج می‌توانند به توسعه روش‌های جدید تولید و کاربردهای بهینه نانورق‌ها در صنایع منجر شوند.

۱- مقدمه

باتوجه به نیاز بشر به مصالح و سازه‌هایی با خواص برتر و پیشرفت علم و فناوری، فناوری نانو^[۱] در حال رشد و توسعه بوده، که این فناوری شامل ساختارها و تجهیزاتی در مقیاس نانو^۲ می‌باشد. یکی از زیرشاخه‌های مهم در نانوساختارها^۳، نانورق‌ها با کاربردهای متعدد در صنایع جدید هستند. که می‌توان به کاربرد آن در تولید باتری‌ها^[۲]، حسگرهای شیمیایی و بیولوژیکی^۴ [۳]، سلول‌های خورشیدی [۴] و دستگاه‌های میدان تشعشعی [۵] اشاره نمود. این کاربردهای متنوع، مطالعه رفتار مکانیکی نانوساختارها برای طراحی و بهبود قابلیت اطمینان آن‌ها را بیش از هر زمان دیگری برجسته می‌کند.

در مطالعات پیشین گزارش شده بر روی نانورق‌ها، کمانش نانورق

گرافن با استفاده از روش مربع دیفرانسیل توسط فرج پور و همکاران [۶] مورد بررسی قرار گرفت. فرج پور و همکاران [۷]، رفتار پس‌کمانش صفحات گرافن چندلایه را با استفاده از نظریه غیرموضعی مورد ارزیابی قرار دادند. آکسنسر و آی دوق دو^۵ [۸]، ارتعاش و کمانش نانوصفحات را به‌روش لوی و مدل غیرموضعی بررسی کردند. علاوه بر این، در پژوهشی ملک زاده و همکاران [۱۰،۹]، اثر مقیاس کوچک را بر کمانش حرارتی و ارتعاش نانوصفحات ارتوتروپیک را با نظریه الاستیک غیرموضعی گزارش کردند. معمارزاده و عبدالوهاب [۱۱] در گزارشی، تأثیر نقص ترک را بر ناپایداری نانورق‌های گرافن ترک‌دار براساس عامل مقیاس کوچک را مورد بررسی قرار دادند.

کمانش و پس‌کمانش پانل‌های برشی ترک خورده توسط علی‌نیا و همکاران [۱۳،۱۲] مورد بررسی قرار گرفت. بریگنتی و کاریپنتری^۶ [۱۴]،

1. nanotechnology
2. nanoscale
3. nanostructures
4. chemical and biological sensors

5. Aksencer and Aydogdu
6. Brighenti and Carpinteri

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: parham.memarzadeh@iau.ac.ir



در سال‌های اخیر، وانگ و همکاران [۳۱]، به بررسی اثر شار حرارتی خارجی بر رشد ترک در نانوصفحات آلومینیومی پرداختند. آرپناهی و همکاران [۳۲] در تحقیقی، رفتار کمانشی یک نانورق در پایین کانالی که سیال با جریان یک بعدی از روی آن عبور می‌کند، را مورد بررسی قرار دادند. صادقیان و همکاران [۳۳]، به بررسی غیرخطی کمانش حرارتی و مکانیکی نانورق حلقوی-دایره‌ای تک‌لایه و دولایه ارتوتروپیک مستقر بر بسترهای پاسترناک و وینکلر براساس نظریه گرادیان کرنش غیرموضعی پرداختند. آنالویی و همکاران [۳۴]، به آنالیز ترموالکترومکانیکی^۴ نانورق‌های پیزوالکتریک چهار ضلعی و مثلثی براساس نظریه غیرموضعی و نظریه صفحه کیرشلف پرداختند. دایخ^۵ و همکاران [۳۵]، با استفاده از مواد درجه‌بندی عملکردی پوشش داده شده، مدل‌سازی دقیق آن‌ها، یک مدل نانوصفحه جدید را پیشنهاد دادند تا رفتار کمانشی صفحات متخلخل درجه‌بندی عملکردی دولایه را مشخص کنند، که از نظر هندسی و هم از نظر فیزیکی وابسته به ریزساختار بودند. از بررسی سوابق پیش‌گفت، مشاهده می‌گردد که تحقیقات زیادی بر روی ورق‌های ترک‌دار با در نظر گرفتن نظریه‌های کلاسیک محیط پیوسته صورت پذیرفته است. همچنین مطالعات دیگری کمانش نانورق‌ها را بررسی نموده‌اند اما مطالعات محدودی کمانش غیرموضعی نانورق‌های ترک‌دار را مورد بررسی قرار داده‌اند. ضمناً مشاهده می‌گردد که نظریه‌های مختلفی برای مدل‌سازی در ابعاد نانو وجود دارد مانند نظریه تنش کوپل^۶، تنش کوپل اصلاح شده^۷، گرادیان کرنشی و نظریه غیرموضعی؛ اما توجه بیشتری نسبت به نظریه غیرموضعی ارینگن شده است و مقالات بیشتری در این ارتباط مشاهده می‌گردد. نظریه غیرموضعی طیف وسیعی از برهم کنش بین اتمی را در نظر می‌گیرد. چن^۸ [۳۶] در مقاله‌ی بیان نموده که استفاده از نظریه غیرموضعی برای شبیه‌سازی پدیده‌هایی در ابعاد نانو مناسب و قابل پذیرش است. در این پژوهش، تحلیل کمانش فشاری غیرموضعی نانورق‌های ارتوتروپیک ترک‌دار با در نظر گرفتن معادلات حاکم براساس نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول و با استفاده از نظریه غیرموضعی ارینگن توسعه داده می‌شود. متغیرهای مورد مطالعه در نانورق‌های ارتوتروپ ترک‌دار عبارتند از: عامل مقیاس کوچک، نسبت طول ترک، راستای بارگذاری، نسبت ضخامت، ابعاد جانبی، نسبت‌های ابعادی و شرایط تکیه‌گاهی مختلف، که با استفاده از برنامه متلب و به‌روش اجزاء محدود توسعه‌یافته تحلیل گردید. از

رفتار کمانش و شکست صفحات نازک ترک خورده زیر بارگذاری برشی را نشان دادند. روش ریتز تک‌دامنه‌ای برای تحلیل کمانش برشی و پس کمانش صفحات ترک خورده با ضخامت متوسط توسط میلازو و همکاران^۱ [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفت. بریجنتی^۲ [۱۶، ۱۷]، گزارشی را در مورد کمانش صفحات ترک خورده زیر بارهای محوری کششی و فشاری ارائه داد. در تحقیق دیگری، با استفاده از روش اجزاء محدود، کمانش ورق‌ها با ترک مرکزی را زیر بارهای کششی و فشاری را بررسی کرد. با استفاده از روش حل عددی المان محدود، خدمتی و همکاران [۱۸]، کمانش صفحات الاستیک با ترک‌های مرکزی و لبه‌ای را ارزیابی کردند. محمدی و همکاران [۱۹] در پژوهشی رفتار کمانشی صفحات مرکب با ترک‌های مرکزی زیر بارهای فشاری، کششی و برشی را از روش المان محدود توسعه‌یافته مطالعه کردند. صابری و همکاران [۲۰]، کمانش فشاری یک صفحه با ترک خارج از مرکز را با استفاده از المان محدود توسعه‌یافته بررسی کردند. در پژوهش دیگری، معمارزاده و همکاران [۲۱]، از روش حل عددی المان محدود توسعه‌یافته برای بررسی کمانش کششی یک صفحه با ترک خارج از مرکز، استفاده کردند.

در گزارش‌هایی، نتایج آزمایشگاهی و مطالعات عددی با استفاده از روش حل عددی المان محدود توسعه‌یافته، برای کمانش فشاری ورق با ترک خارج از مرکز، توسط طاهری و معمارزاده [۲۲، ۲۳] ارائه گردید. کاداری و همکاران^۳ [۲۴]، با استفاده از نظریه صفحه هذلولی جدید، اثر مقیاس کوچک را با فرض نظریه الاستیک غیرموضعی جهت بررسی کمانش نانورق ارتوتروپ مستقر بر بستر پاسترناک را مورد بررسی قرار دادند. رجبی و همکاران [۲۵] در گزارشی، با استفاده از نظریه الاستیک غیرموضعی اصلاح شده کامل، معادلات انرژی کرنشی و تغییرشکل نانورق‌های مستطیلی با یک ترک مرکزی، زیر بارگذاری یکنواخت عرضی را بازنویسی کردند و تغییرشکل نانورق‌ها با ترک مرکزی، برای مقادیر مختلف عامل مقیاس کوچک تعیین گردید. علاوه بر این، تعدادی از محققین کمانش ورق‌های ترک‌دار را بررسی کردند، به‌طور مثال، تحلیل کمانش ورق ترک‌دار با خواص ناهمسان در ضخامت را با استفاده از نظریه ورق کلاسیک با روش المان محدود [۲۶، ۲۷]، با روش المان محدود توسعه‌یافته [۲۸، ۲۹] مورد بررسی قرار دادند. تن‌زاده و عموشاهی [۳۰]، از روش نوار محدود با مرتبه بالاتر برای ارزیابی آنالیز کمانش نانورق‌های ارتوتروپیک استفاده کردند.

4. Thermo-electro-mechanical

5. Daikh

6. Couples stress theory

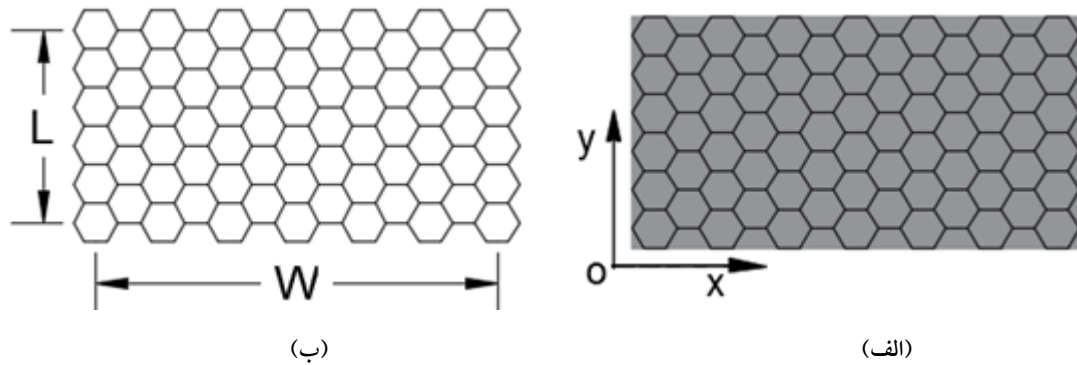
7. Modified couples stress theory

8. Chen

1. Milazzo et al.

2. Brighenti

3. Kadari et al.



شکل ۱. الف) ورق با در نظر گرفتن محیط پیوسته برای ماده، براساس نظریه کلاسیک، ب) ورق با در نظر گرفتن اثر مجزای اتم‌ها طبق نظریه‌های غیرموضعی،

Fig. 1. a) Sheet considering a continuous medium for the material, according to classical theory, b) Sheet considering the separate effect of atoms according to non-local theories,

مدل دقیق و مناسبی از این نانوساختارها را دارد. نظریه ارینگن، یکی از معروف‌ترین نظریه‌های غیرموضعی در مقیاس نانو است، نظریه غیرموضعی، اولین بار توسط ارینگن در سال ۱۹۸۳، با اضافه کردن مقیاس طول به معادلات ساختاری، به‌عنوان یک مؤلفه ماده مطرح شد. این نظریه برای تحلیل مکانیکی نانوساختارها از دقت بسیار خوبی برخوردار است [۳۷]. تفاوت اصلی بین نظریه کلاسیک و نظریه‌های غیرموضعی، در تعریف تنش است. نظریه‌های کلاسیک مکانیک محیط‌های پیوسته^۳، فرض می‌کند که تانسور تنش در نقطه‌ی مادی، تابعی از تانسور کرنش در همان نقطه‌ی مادی می‌باشد، در حالی که نظریه غیرموضعی ارینگن [۳۷-۴۰]، تانسور تنش در نقطه‌ی از محیط مادی، توسط یک معادله‌ی انتگرالی به تانسور کرنش در تمام محیط مادی وابسته می‌شود، معادله‌ی ساختاری^۴ نظریه الاستیسیته غیرموضعی ارینگن^۵ به‌صورت انتگرالی مطابق رابطه (۱) بیان می‌شود:

$$\sigma(x) = \iiint \alpha(|x' - x|, \tau) C \varepsilon(x') dv \quad (1)$$

که در آن $\alpha(|x' - x|, \tau)$ تابعی است که به مدول غیرموضعی^۶ مشهور است و در واقع نوعی تابع وزنی برای معادله‌ی انتگرالی محسوب می‌شود. $|x' - x|$ فاصله‌ی نقطه‌ی موضعی x و نقطه‌ی غیرموضعی x' می‌باشد.

طرفی پدیده‌ی کماتش در سازه‌هایی در مقیاس میکرو و نانو بسیار محتمل بوده و سازه‌های پیش‌گفت در کاربردهای مختلف همواره در معرض بارهای محوری و نهایتاً پدیده‌ی کماتش قرار دارند به‌عنوان مثال با در اختیار داشتن رفتار میکرو/نانوسازه‌ها زیر بار محوری و مقایسه‌ی حالت سالم و معیوب (دارای نقص؛ مثل: شیار، ناچ، نابجایی یا عیوب کریستالی و...) این سازه‌ها با نتایج حاصل از آزمایش روی یک نمونه واقعی می‌توان تا حدود زیادی از وجود نقص در سازه و حتی‌الامکان قرارگیری آن آگاه شد. بنابراین، بررسی پدیده‌ی کماتش نانورق‌های ترک‌دار، می‌تواند از مطالعات مهم و مفید در زمینه‌ی طراحی میکرو/نانو ابزارها باشد.

۲- نظریه غیرموضعی^۱

نظریه‌های مکانیک کلاسیک به‌دلیل صرف‌نظر کردن از اثر اندرکنش بین اتم‌ها و در نظر گرفتن یک محیط پیوسته برای ماده، قادر به ارائه مدل مناسبی از نانوساختارها نیستند. در شکل (۱-الف)، منظور نمودن محیط پیوسته برای ماده، براساس نظریه کلاسیک، و در شکل (۱-ب)، در نظر گرفتن اثر مجزای اتم‌ها طبق نظریه‌های غیرموضعی، نشان داده شده است [۶].

در بین روش‌های مختلف مدل‌سازی در مقیاس نانو، نظریه غیرموضعی ارینگن^۲ [۳۷-۴۰]، با وارد کردن این اثرات در معادلات ترکیبی خود، به‌عنوان خواص مواد و پیش‌بینی عدم تکینگی در نوک ترک، قدرت بالایی در ارائه

3. Continuous medium
4. Constitutive law
5. Eringen's nonlocal elasticity theory
6. Nonlocal modulus

1. Nonlocal theory
2. Eringen

باشد. مؤلفه C آرایه مشخصات مصالح از مرتبه چهار^۱ است. τ در رابطه (۱) مؤلفه‌ای است که با نسبت طول مشخصه داخلی نانو ساختار $\bar{a}$ و طول مشخصه خارجی l تعیین می‌شود و میزان اهمیت مقیاس‌های کوچک را در معادله‌ی ساختاری انتگرالی نظریه غیرموضعی مشخص می‌سازد. در واقع τ به صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود:

$$\tau = \frac{e_0 \bar{a}}{l} = \sqrt{\frac{\mu}{l^2}} \quad (2)$$

که در آن e_0 یک عامل مادی است که با تطابق نتایج نظریه‌ی غیرموضعی با نتایج آزمایش یا شبیه‌سازی تعیین می‌شود. مؤلفه $\mu = (e_0 \bar{a})^2$ به عامل ابعاد کوچک^۲ مشهور است. در معادله‌ی انتگرالی ساختاری، وقتی τ به سمت صفر میل می‌کند باید اثر غیرموضعی بودن تابع تنش و کرنش از بین رفته و معادله به حالت کلاسیک $\sigma = C : \varepsilon$ میل کند. بنابراین مدول غیرموضعی $\alpha(|x' - x|, \tau)$ باید طوری باشد که وقتی τ به سمت صفر میل می‌کند، به تابع دلتای دیراک^۳ میل کند، یعنی:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \alpha(|x' - x|, \tau) = \delta(|x' - x|) \quad (3)$$

همچنین تابع α باید حداکثر مقدار خود را در نقطه‌ی موضعی اختیار کند. با تعریف مدول غیرموضعی مناسبی که شرایط لازم را ارضا کند، قالب دیفرانسیلی معادله‌ی ساختاری غیرموضعی از شکل انتگرالی آن، به صورت رابطه (۴) بدست می‌آید:

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma^{nl} = C : \varepsilon = \sigma^l \quad (4)$$

در رابطه (۴)، σ^{nl} ، تانسور تنش غیرموضعی^۴، σ^l تانسور تنش موضعی^۵ و ∇^2 عملگر لاپلاس است که به صورت $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ تعریف می‌شود در صورت عدم فرض ابعاد کوچک، μ و در نتیجه τ

۳- حل عددی

در این مطالعه، برای تحلیل کمانش نانورق‌های ارتوتروپ ترک‌دار، برنامه‌نویسی در نرم‌افزار متلب^۶ به روش المان محدود توسعه‌یافته^۷ صورت پذیرفت. به طوری که در صورت بروز ترک در نانورق‌ها، روش المان محدود توسعه‌یافته برای تجزیه و تحلیل ورق‌های ترک خورده نسبت به المان محدود استاندارد سودمندتر است. روش المان محدود توسعه‌یافته، یک مدل تکینگی از میدان تنش در نزدیکی نوک ترک ایجاد می‌کند و ناپیوستگی‌های قوی را در اشکال پرش در میدان جابجایی در سطح ترک‌ها ثبت می‌کند. در این تحقیق از المان‌های ورق چهارضلعی هشت‌گره‌ای براساس نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول در چارچوب المان محدود توسعه‌یافته برای تجزیه و تحلیل معادلات درون صفحه و کمانش ویژه استفاده شده است.

۳-۱- پیکربندی مسأله

معادلات تعادل برای المان‌های مستطیلی ورق زیر بارهای درون صفحه، به شرح روابط (۵) می‌باشند [۴۵] (نشان گر (nl) نشان‌دهنده محیط غیرموضعی و نشان گر (l) نشان‌دهنده محیط پیوسته موضعی می‌باشد):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}^{nl}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{nl}}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial N_{xy}^{nl}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}^{nl}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Q_x^{nl}}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^{nl}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx}^{nl} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}^{nl} \frac{\partial w}{\partial y} \right) &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy}^{nl} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy}^{nl} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q = 0 \quad (5) \\ \frac{\partial M_{xx}^{nl}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{nl}}{\partial y} - Q_x^{nl} &= 0, \\ \frac{\partial M_{xy}^{nl}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}^{nl}}{\partial y} - Q_y^{nl} &= 0 \end{aligned}$$

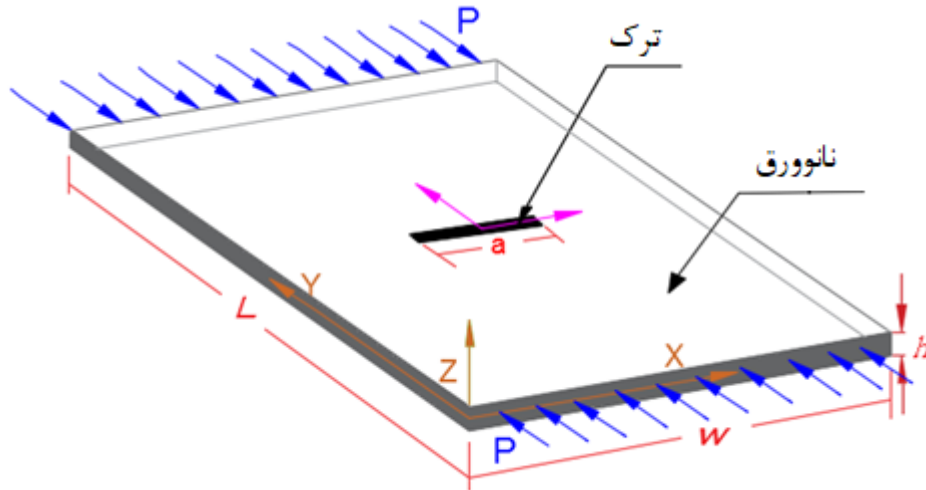
در روابط (۵) عامل‌های بردار نیروهای محوری منتجه^۸ (N) ، نیروهای

1. Fourth-order constitutive tensor
2. Small-scale parameter
3. Dirac's delta function
4. Nonlocal
5. Local

6. MATLAB

7. Extended finite element method (XFEM)

8. Resulting axial forces



شکل ۲. نانوورق اورتوتروپ دارای ترک مرکزی زیر بارگذاری تکمحوری

Fig. 2. Orthotropic nanosheet with central crack under uniaxial loading

$$\int_{\Omega} \chi \left(\frac{\partial M'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M'_{xy}}{\partial y} - Q'_x \right) d\Omega = 0,$$

$$\int_{\Omega} \chi \left(\frac{\partial M'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M'_{yy}}{\partial y} - Q'_y \right) d\Omega = 0$$

که در روابط (۶)، χ تابع وزن^۲ و Ω محیط مادی^۳ در انتگرال گیری وزنی می باشند. از طرفی میدان جابجایی^۴ براساس نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول^۵ [۴۵]، به صورت رابطه (۷) تعریف می شود:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) &= u(x, y) + z \theta_x(x, y) \\ V(x, y, z) &= v(x, y) + z \theta_y(x, y), \\ W(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن U ، V و W مولفه های جابجایی نقطه (x, y, z) از ورق و u ، v و w جابجایی همان نقطه در میان ورق در راستاهای به ترتیب x ، y و z بر اساس مختصات دکارتی ورق می باشند و همچنین θ_x و θ_y به ترتیب بیان گر زاویه ی چرخش صفحه ی میانی حول محورهای x ، y هستند.

برشی (Q)، و گشتاورهای ورق (M) زیر یک بار درون صفحه، منظور شده است. با توجه به این که در این تحقیق، بار کمانشی نانوورق اورتوتروپ با ترک مرکزی زیر بار فشاری مطابق شکل (۲) مورد بررسی می باشد بار عمود بر سطح صفر ($q = 0$) منظور می گردد.

حال با در نظر گرفتن ($q = 0$) و رابطه (۴) براساس نظریه غیرموضعی، شکل انتگرال وزنی^۱ رابطه (۵) با اعمال عملگر $(1 - \mu \nabla^2)$ ، به صورت رابطه (۶) تغییر می یابد:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi \left(\frac{\partial N'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N'_{xy}}{\partial y} \right) d\Omega &= 0, \\ \int_{\Omega} \chi \left(\frac{\partial N'_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N'_{yy}}{\partial y} \right) d\Omega &= 0 \\ \int_{\Omega} \chi \left[\frac{\partial Q'_x}{\partial x} + \frac{\partial Q'_y}{\partial y} + (1 - \mu \nabla^2) \right. & \\ \left. \times \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(N^{nl}_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N^{nl}_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right. \right. & \\ \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(N^{nl}_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N^{nl}_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right] d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

2. Weight function
3. Material domain
4. Displacement field
5. First order shear deformation theory (FSDT)

1. Weighted integral form

در رابطه (۱۰)، κ_s ضریب اصلاح برش^۴ می‌باشد. که برای ورق مستطیلی بدون ترک $\kappa_s = \frac{5}{6}$ است. مؤلفه‌های D_{ij} و A_{ij} به ترتیب سختی‌های طولی و خمشی^۵ در روابط (۱۰)، که به صورت روابط (۱۱) مطرح می‌گردند [۴۵]:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, & A_{22} &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \\ A_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \\ A_{44} &= G_{23} h, & A_{55} &= G_{13} h, & A_{66} &= G_{12} h \\ D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, & D_{22} &= \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \\ D_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, & D_{66} &= \frac{G_{12} h^3}{12} \end{aligned} \quad (11)$$

در روابط (۱۱)، مؤلفه‌های E ، G و ν به ترتیب مدول الاستیسته، مدول برشی و نسبت پواسون در راستاهای ۱، ۲ و ۳ در مواد و h ضخامت نانورق می‌باشد. که در این تحقیق برای نانورق‌های ایزوتروپ، مشخصات مصالح طبق روابط (۱۱) به صورت $E_1 = E_2 = E$ ، $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ ، $G_{12} = G_{23} = G_{13} = G$ منظور می‌گردند. از طرفی، معادلات تعادل نانورق براساس رابطه (۶)، را می‌توان با جایگزینی روابط (۱۰) به صورت روابط (۱۲) بدست آورد:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi \left[A_{11} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial xy} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right) \right. \\ \left. + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \chi \left[A_{66} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] d\Omega = \end{aligned} \quad (12)$$

همچنین روابط کرنش-جابجایی بر اساس رابطه (۸) نیز مطرح می‌گردد [۴۵]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial U}{\partial x}, & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

با جایگذاری میدان جابجایی، رابطه (۷)، در روابط کرنش-تغییر مکان براساس رابطه غیرخطی ون-کارمن^۶، رابطه (۸)، روابط کرنش براساس نظریه برشی مرتبه اول، به صورت روابط (۹) حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

که تانسور نیروهای محوری منته^۷ (N)، نیروهای برشی^۸ (Q) و ممان‌ها (M) بر حسب واحد طول المان‌های دیفرانسیلی ورق زیر بار درون صفحه بر اساس کرنش‌های بدست آمده در رابطه (۶) طبق نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول به شرح روابط (۱۰) بدست می‌آیند [۴۵]:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right]^T \\ \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, \frac{\partial \theta_y}{\partial y}, \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right]^T \\ \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} &= \kappa_s \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y, \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right]^T \end{aligned} \quad (10)$$

4. Shear correction factor
5. Extensional and bending stiffnesses

1. Von-Karman
2. Resulting axial forces
3. Shear forces

که با منظور نمودن مؤلفه $\chi = \varphi_j$ ($j = 1, 2, 3$) براساس روش ریتز، در رابطه (۱۳)، ماتریس سختی استاندارد^۲ نانورق (K_S) به صورت رابطه (۱۴) حاصل می گردد:

$$K_S = \int_{\Omega} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \\ 0 & \varphi_j \\ \varphi_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & 0 & \varphi_i \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & \varphi_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \right) d\Omega \quad (14)$$

و به همین ترتیب، ماتریس سختی هندسی^۳ نانورق (K_G) به شکل رابطه (۱۵) حاصل می گردد:

$$K_G = \int_{\Omega} \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{xx}^I & N_{xy}^I \\ N_{xy}^I & N_{yy}^I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \right) d\Omega \quad (15)$$

$$\int_{\Omega} \left[\begin{aligned} & K_S A_{55} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + K_S A_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right)}_a \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right)}_b \end{aligned} \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \chi \left[\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x \partial y} \right) \\ & - K_S A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \end{aligned} \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \chi \left[\begin{aligned} & D_{66} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x \partial y} \\ & + D_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - K_S A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \end{aligned} \right] d\Omega = 0$$

حال با گرفتن انتگرال جزء به جزء از عبارت های دارای مرتبه بالای مشتق در رابطه (۱۲)، شکل ضعیف^۱ رابطه حاصل می گردد، به طور مثال، با گرفتن انتگرال جزء به جزء سه رابطه آخر رابطه (۱۲) بجز عبارت های a و b، رابطه (۱۳) حاصل گردید:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} K_S A_{55} \frac{\partial w}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} K_S A_{55} \theta_x d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} K_S A_{44} \frac{\partial w}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} K_S A_{44} \theta_y d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \chi K_S A_{55} \frac{\partial w}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \chi K_S A_{55} \theta_x d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \chi K_S A_{44} \frac{\partial w}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega} \chi K_S A_{44} \theta_y d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} D_{66} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} D_{66} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} D_{66} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} D_{66} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

2. Standard stiffness matrices
3. Geometric stiffness matrices

1. Weak form

و هشت گرهی اطراف نوک ترک که با دایره‌ی توپر مشخص شده‌اند از طریق توابع تکنیه غنی می‌شوند.

در حقیقت عمل غنی‌سازی به‌منظور انتقال ناپیوستگی از درون المان‌ها به گره‌ها انجام می‌شود. تابع غنی‌ساز هویساید و تکنیه طبق روابط (۱۶) و (۱۷) بیان می‌شود، در رابطه (۱۷)، Γ فاصله تا نوک ترک و θ زاویه نسبت به راستای ترک در دستگاه مختصات قطبی هستند [۴۳]:

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{برای گره‌های بالای ترک طبق شکل (۳)} \\ -1 & \text{برای گره‌های پایین ترک طبق شکل (۳)} \end{cases} \quad (۱۶)$$

در رابطه (۱۶)، X مختصات نقطه مورد نظر است.

$$B(r, \theta) = \{B_1, B_2, B_3, B_4\} = \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ &\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (۱۷)$$

۳-۳- گسسته‌سازی المان محدود توسعه‌یافته^۶

در این پژوهش از المان‌های هشت گره‌ای^۷ ورق جهت مدل کردن کمایش نانورق‌های ترک‌دار استفاده شده است. برای درون‌یابی این المان‌ها از رابطه (۱۸) استفاده شده است [۴۴].

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \frac{\zeta t}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi, \eta) \mathbf{V}^3, \\ \mathbf{V}^3 &= \begin{Bmatrix} \mathbf{V}^3_{(1)} \\ \mathbf{V}^3_{(2)} \\ \mathbf{V}^3_{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (۱۸)$$

در رابطه فوق، t ضخامت المان نانورق، $\varphi_i(\xi, \eta)$ توابع شکل^۸ در دستگاه مختصات طبیعی، $n=8$ تعداد گره‌ها در المان، $\mathbf{V}^3$ بردار نرمال واحد

$$+ \mu \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial xy} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{xx}^{nl} & N_{xx}^{nl} & 0 \\ N_{yy}^{nl} & N_{yy}^{nl} & 0 \\ N_{xy}^{nl} & N_{xy}^{nl} & 0 \end{bmatrix} d\Omega$$

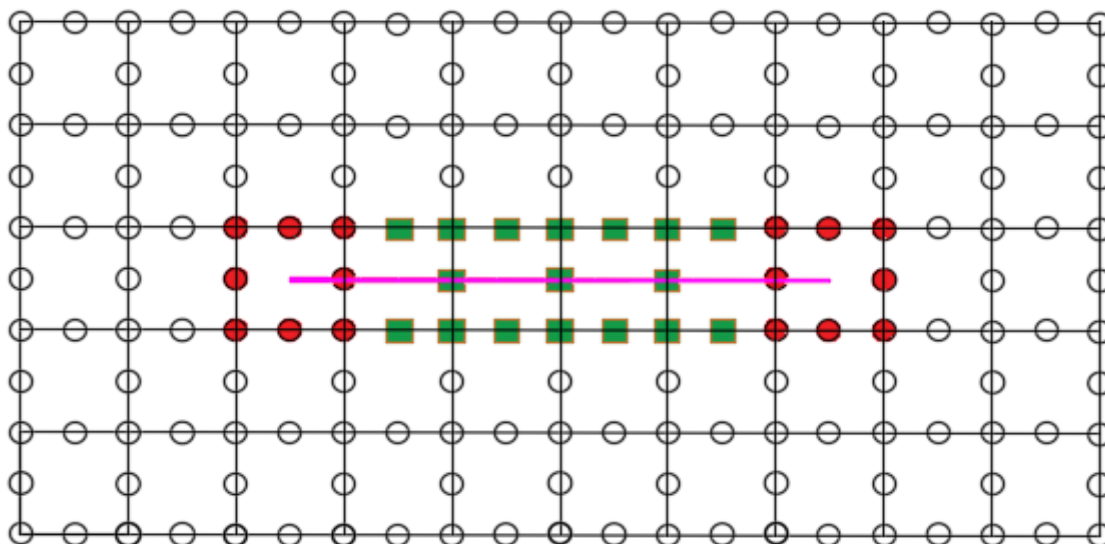
$$+ 2\mu \int_{\Omega} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial xy} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -N_{xx}^{nl} & \frac{1}{2} N_{xy}^{nl} \\ -N_{yy}^{nl} & 0 & \frac{1}{2} N_{xy}^{nl} \\ -\frac{1}{2} N_{xy}^{nl} & -\frac{1}{2} N_{xy}^{nl} & \frac{N_{xx}^{nl} + N_{yy}^{nl}}{4} \end{bmatrix} d\Omega$$

۳-۲- المان محدود توسعه‌یافته^۹

در روش المان محدود توسعه‌یافته از همان توابع شکل روش المان محدود استاندارد استفاده می‌شود و تنها درجات آزادی گره‌های اطراف ترک افزایش پیدا می‌کند (غنی‌سازی^۲). یعنی با اضافه نمودن توابع خاص، درجات آزادی که به‌واسطه ناپیوستگی در محل ترک درون المان بوجود می‌آید، به گره‌های آن المان اختصاص پیدا می‌کند. در روش اجزاء محدود توسعه‌یافته جهت غنی‌سازی برای مدل کردن ناپیوستگی قوی^۳ (ترک) از تابع هویساید^۴ و توابع تکنیه^۵ استفاده می‌شود [۴۳]. به‌عنوان مثال طبق شکل (۳)، گره‌های اطراف ترک که با مربع مشخص شده‌اند از طریق تابع هویساید غنی می‌شوند

1. Extended finite element method (XFEM)
2. Enrichment
3. Strong discontinuity
4. Heaviside function
5. Singular functions

6. Extended finite element method discretization
7. 8-noded elements
8. Shape functions



شکل ۳. گره‌های غنی‌شده با تابع هویساید و توابع تکینه [۴۳].

Fig. 3. Enriched nodes with the Heaviside function and singular functions [43].

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{u}_{fem} + \mathbf{u}_{enrich} \quad (20)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ و $\mathbf{w}$ به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در راستای X, Y و Z هستند. همچنین $\mathbf{u}_{fem}$ میدان جابجایی اجزاء محدود استاندارد و $\mathbf{u}_{enrich}$ میدان جابجایی قسمت‌های شامل سطح ترک و اطراف نوک ترک است. میدان جابجایی اجزاء محدود استاندارد طبق رابطه (۲۱) بیان می‌شود [۴۳]:

$$\mathbf{u}_{fem} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \frac{\zeta t}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i \{ \beta_i \mathbf{V}^1 - \alpha_i \mathbf{V}^2 \}, \quad (21)$$

$$\mathbf{V}^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}^1_{(1)} \\ \mathbf{V}^1_{(2)} \\ \mathbf{V}^1_{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V}^2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}^2_{(1)} \\ \mathbf{V}^2_{(2)} \\ \mathbf{V}^2_{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

در رابطه فوق، $\mathbf{V}^1$ و $\mathbf{V}^2$ بردارهای متعامد بردار نرمال واحد هستند. α_i و β_i به ترتیب درجات آزادی چرخشی نسبت به راستای X و Y هستند.

و ζ دستگاه مختصات طبیعی عمود بر سطح نانوورق می‌باشد. توابع شکل در دستگاه مختصات طبیعی در یک المان هشت گره‌ای طبق رابطه (۱۹) بدست می‌آیند [۴۵]:

$$\varphi_i = -\frac{1}{4} (1 - \xi_i \xi) (1 - \eta_i \eta) (1 + \xi_i \xi + \eta_i \eta) \quad (19)$$

$$(\xi_i, \eta_i = 0, 1, -1)$$

بر اساس تجربه نویسندگان، استفاده از توابع درون‌یاب مربوط به اجزای محدود ورق چهارگره‌ای در حل عددی ورق‌ها با فرض نظریه میندلین^۲ منجر به ایجاد پدیده قفل برشی^۳ و در نتیجه خطای عمده محاسباتی می‌شود. یک راه پیشگیری از وقوع این پدیده، استفاده از اجزای محدود ورق هشت‌گره‌ای است که در مقاله حاضر از آن استفاده شده است؛ روش دیگر پیشگیری از وقوع قفل برشی، استفاده از روش انتگرال‌گیری کاهش‌یافته است که در مرجع [۲۱] به تفصیل شرح داده شده است. میدان جابجایی کلی در روش اجزاء محدود توسعه‌یافته برای هر نقطه دلخواه طبق رابطه (۲۰) بدست می‌آید [۴۳]:

1. Natural coordinate system
2. Mindlin Theory
3. Shear locking

$$F(r, \theta) = \{F_1, F_2, F_3, F_4\} = \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ &\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$G(r, \theta) = \{G_1\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (26)$$

$$R(r, \theta) = \{R_1, R_2, R_3, R_4\} = \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \\ &\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

بردار جابجایی‌های گره‌ای استاندارد (d)، بردار غنی‌کننده درجات آزادی با تابع هویساید (h) و بردار غنی‌کننده درجات آزادی با توابع تکینه (t) به‌ترتیب طبق روابط (۲۸) تا (۳۰) تعریف می‌شوند [۱۹]:

$$\mathbf{d} = \{u, v, w, \alpha, \beta\}^T \quad (28)$$

$$\mathbf{h} = \{a^u, a^v, a^w, a^\alpha, a^\beta\}^T \quad (29)$$

$$\mathbf{t} = \{b^u, b^v, b^w, b^\alpha, b^\beta\}^T \quad (30)$$

بردار جابجایی گره‌ای کلی طبق رابطه (۳۱) بیان می‌شود [۱۹]:

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{d} \ \mathbf{h} \ \mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3 \ \mathbf{t}_4\}^T \quad (31)$$

با گسسته کردن درجات آزادی با استفاده از توابع شکل درون‌یابی روابط (۱۸) تا (۱۹)، و اعمال شرایط مرزی، جهت بدست آوردن بار بحرانی کماتش نانورقی از معادلات مقدار ویژه استفاده می‌شود. معادله مقدار ویژه نانورقی به‌صورت رابطه (۳۲) بیان می‌شود [۱۹]:

میدان جابجایی قسمت‌های شامل سطح ترک و اطراف نوک ترک ($\mathbf{u}_{enrich}$) (طبق رابطه (۲۲) بیان می‌شود [۴۳]):

$$\mathbf{u}_{enrich} = \mathbf{u}_{Heaviside} + \mathbf{u}_{Tip} \quad (22)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{u}_{Heaviside}$ و $\mathbf{u}_{Tip}$ به‌ترتیب میدان جابجایی غنی‌شده توسط تابع هویساید و میدان جابجایی غنی‌شده توسط توابع تکینه هستند که طبق روابط (۲۳) و (۲۴) بدست می‌آیند [۱۹]:

$$\mathbf{u}_{Heaviside} = \sum_{i=1}^n \varphi_i (H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i)) \begin{Bmatrix} a_i^u \\ a_i^v \\ a_i^w \end{Bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\zeta t}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i (H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i)) \{a_i^\beta \mathbf{V}^1 - a_i^\alpha \mathbf{V}^2\} \\ \mathbf{u}_{Tip} &= \sum_{i=1}^n \varphi_i \sum_{j=1}^m (F_j(\mathbf{x}) - F_j(\mathbf{x}_i)) \begin{Bmatrix} b_i^u \\ b_i^v \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &+ \sum_{i=1}^n \varphi_i \sum_{j=1}^m (G_j(\mathbf{x}) - G_j(\mathbf{x}_i)) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_i^w \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{\zeta t}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i \sum_{j=1}^m (R_j(\mathbf{x}) - R_j(\mathbf{x}_i)) \{b_i^{\beta j} \mathbf{V}^1 - b_i^{\alpha j} \mathbf{V}^2\} \end{aligned} \quad (24)$$

در رابطه (۲۳)، $H(\mathbf{x})$ تابع هویساید است که طبق رابطه (۱۶) محاسبه می‌شود، $\mathbf{x}_i$ مختصات گره‌ی i ام و a_i^j ها درجات آزادی غنی‌کننده‌ی اضافی^۱ هستند. و در رابطه (۲۴)، m تعداد توابع غنی‌کننده نوک ترک^۲، b_i^j ها درجات آزادی غنی‌کننده‌ی اضافی^۳ و F, G, R به‌ترتیب توابع غنی‌کننده تکینه در حالت درون صفحه^۴، خارج از صفحه^۵ و چرخش^۵ هستند که در دستگاه مختصات قطبی طبق روابط (۲۵) تا (۲۷) بیان می‌شوند [۱۹]:

1. Additional enrichment degrees of freedom
2. Crack tip functions
3. In plane
4. Out of plane
5. Rotational

نسبی ترک (a/W)، نسبت ابعادی (L/W)^۴ و شرایط مرزی^۵ مختلف نیز در نظر گرفته شده است، همچنین در جداول (۱) و (۲)، مشخصات نانورق گرافن تک لایه و نانورق های اورتوتروپ در این تحقیق مطرح شده اند.

در نهایت تعدادی مثال عددی متنوع تحقیق حاضر با مراجع معتبر جهت صحت سنجی مورد بحث و بررسی قرار می گیرد، برای این موضوع، صحت سنجی در چند مرحله صورت می پذیرد، نویسندگان در مطالعات پیشین [۱۱] تحلیل های متعددی را برای اثبات اعتبار مدل های اجزای محدود نانورق های ایزوتروپ ترک دار به انجام رسانده اند. و در نهایت براساس جدول (۳)، نتایج تحقیق حاضر برای نانورق های مربعی اورتوتروپ بدون ترک با شرایط تکیه گاهی چهارطرف مفصلی و زیر بارگذاری دومحوری، با نسبت عرض به ضخامت های (W/h) مختلف مورد بررسی قرار گرفت، نتایج حاصل این تحقیق با مشخصات جدول (۲) با عامل ابعاد کوچک (μ) مختلف، با نتایج حاصل از تحقیق صبحی [۴۶] براساس روش حل مثلثاتی^۶، نتایج حاصل از پرادهان^۷ [۴۷] براساس نظریه برشی مرتبه سوم اصلاحی^۸ و نتایج حاصل از کاداری و همکاران [۲۴] براساس نظریه هیپربولیک جدید کنترل گردید و براساس جدول (۳) مشخص گردید نتایج دارای درصد اختلاف قابل قبولی می باشند.

همان طور که مشاهده گردید صحت سنجی برنامه در چهار مرحله برای ورق همگن بدون ترک، نانورق ایزوتروپ و اورتوتروپ بدون ترک و برای ورق همگن ترک دار با مراجع معتبر علمی صورت پذیرفته، پس می توان از نتایج برنامه برای بدست آوردن بار بحرانی کمانش نانورق های اورتوتروپ ترک دار نیز استفاده نمود.

۵- بحث و بررسی

کمانش نانورق های ترک دار زیر بار تک و دومحوری، در این بخش مورد ارزیابی قرار می گیرند. به منظور تأکید بر اعتبار سنجی نتایج حاضر، عامل نسبت بار کمانشی^۹ [۴۸، ۴۹] به عنوان یک مؤلفه بی بعد، به صورت رابطه (۳۴) تعریف می شود:

$$(\mathbf{K}_S + \lambda \mathbf{K}_G) \{\mathbf{D}\} = \mathbf{0} \quad (32)$$

در رابطه (۳۲)، λ و $\mathbf{D}$ به ترتیب مقدار ویژه و بردار ویژه هستند و کوچکترین مقدار λ_{cr} بار بحرانی کمانش را مشخص می کند. پس از بدست آوردن کوچکترین بار بحرانی کمانش (λ_{cr})، ضریب کمانش^۱ (k_{cr}) نانورق طبق رابطه (۳۳) بدست می آید:

$$k_{cr} = \lambda_{cr} \frac{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})W^2}{\pi^2 E_1 h^3} \quad (33)$$

چنان که می دانیم، تحلیل کمانشی سازه ها از نوع حل مسأله ویژه^۲ بوده، معادلات تعادل روی جسم تغییر شکل یافته نوشته شده، با حل آن مقادیر و بردارهای ویژه که به ترتیب بار کمانشی و مود کمانشی به دست می آید. از این روی، شرایط مرزی مربوط به ترک در بار فشاری یا کششی اعمالی بر ورق یکسان اند. قابل توجه است که مودهای کمانشی ورق های ترک دار زیر بار فشاری اغلب از نوع کمانش کلی و زیر بار کششی از نوع کمانش موضعی است.

۴- همگرایی و صحت سنجی^۳

در مطالعه حاضر، شکل های (۴) نشان دهنده همگرایی رضایت بخش برنامه متلب برای نانورق های اورتوتروپ ترک دار تحت تاثیر حالت های مختلف بارگذاری بوده و همچنین دقت و قابلیت اطمینان مدل محاسباتی مورد استفاده در تحلیل، را تایید می کند. بنابراین براساس یافته های تحلیل حساسیت، برای نانورق با ابعاد $W=L=17\text{nm}$ و $h=0.34\text{nm}$ ، تعداد مش 13×13 با ابعاد المان ها تقریباً $1/3$ نانومتر جهت تجزیه و تحلیل در تحقیق حاضر انتخاب گردید.

جهت صحت سنجی، نتایج به دست آمده از مطالعه حاضر با برخی مراجع معتبر مورد بررسی قرار گرفت. تأیید صحت سنجی در چهار مرحله شامل ورق ها، نانورق های ایزوتروپ و اورتوتروپ بدون ترک و برای ورق های ترک دار انجام می شود. که مؤلفه های نانورق ها طبق شکل (۲) عبارتند از: عامل غیرموضعی یا مقیاس کوچک (μ)، طول ترک (a)، ضخامت نانورق (h)، ابعاد جانبی (W, L)، نسبت عرض به ضخامت (W/h)، طول

1. Buckling coefficient
2. Eigen Problem
3. Convergence and verification

4. Aspect ratio

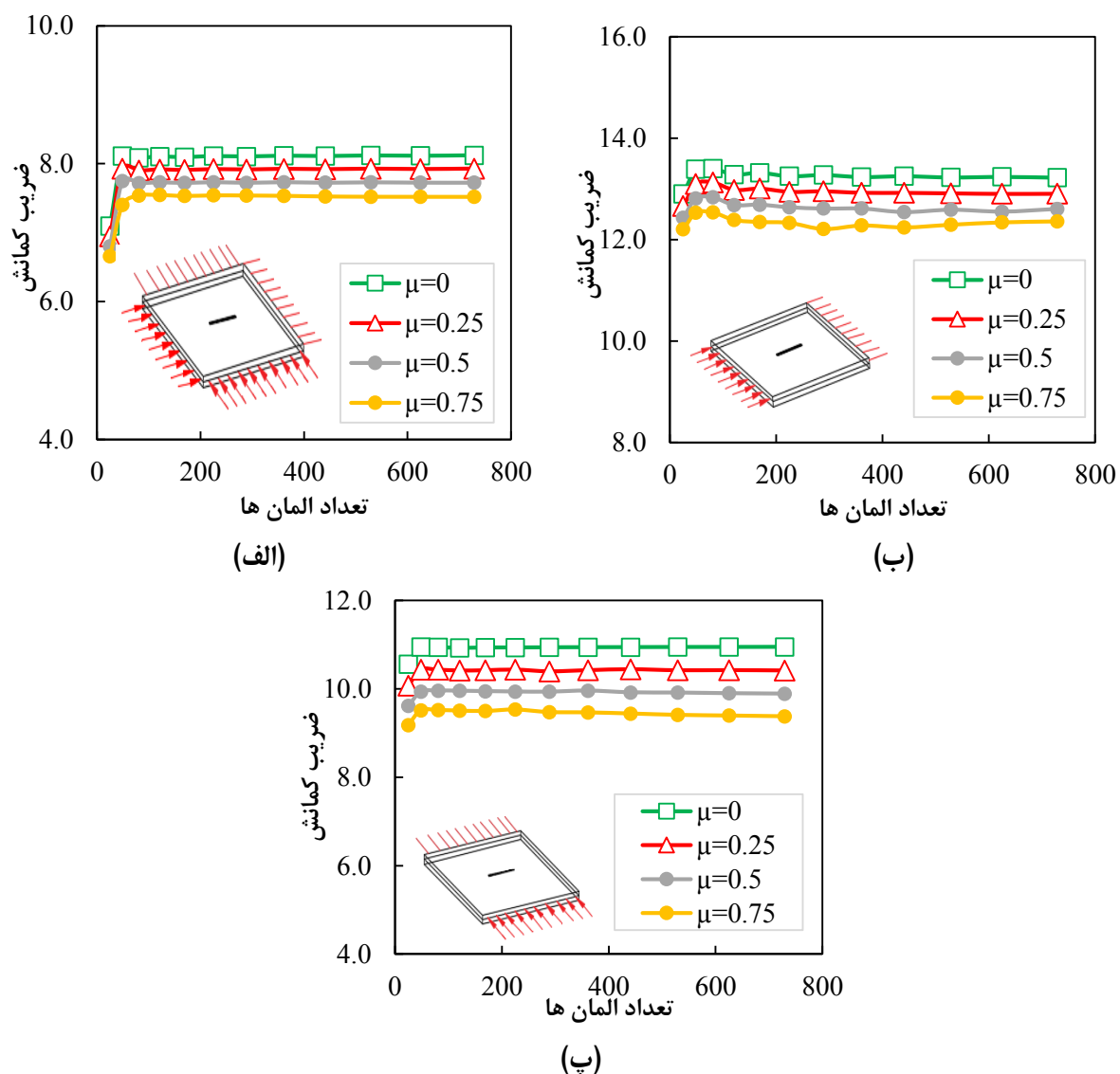
5. Boundary conditions (B.C.)

6. Trigonometric solution

7. Pradhan

8. Refined third shear deformation theory solutions

9. Buckling load ratio



شکل ۴. بررسی تحلیل حساسیت نانوورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری دوماحوری (الف)، اورتوتروپ زیر بارگذاری تک‌محوری موازی ترک (ب)، اورتوتروپ زیر بار تک‌محوری عمود به ترک (پ).

Fig. 4. Sensitivity analysis of cracked orthotropic nanosheets under biaxial loading (a), orthotropic under uniaxial loading parallel to the crack (b), orthotropic under uniaxial loading perpendicular to the crack (c).

جدول ۱. مشخصات نانوورق گرافن تک‌لایه

Table 1. Specifications of single-layer graphene nanosheets

نسبت پواسون	مدول الاستیسیته
0.3	0.73 GP

جدول ۲. مشخصات نانوورق اورتوتروپ [۲۴]

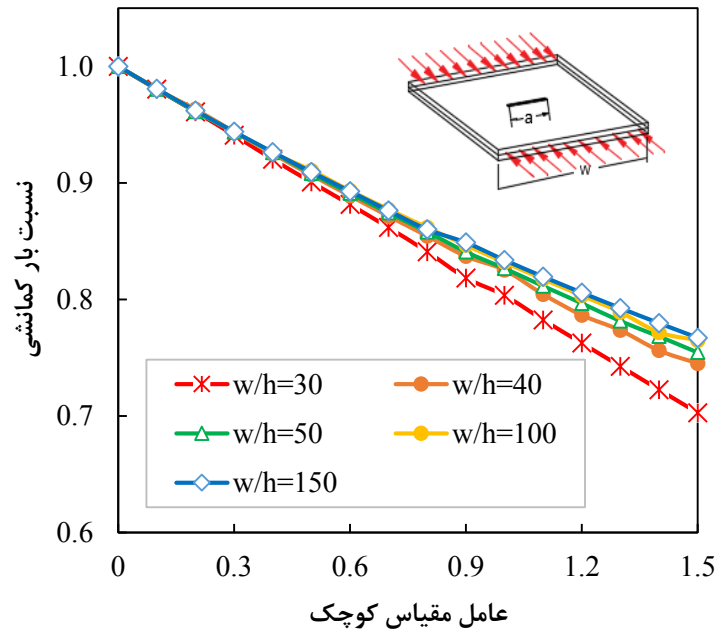
Table 2. Specifications of orthotropic nanosheets [24]

E_1	E_2	ν_{12}	ν_{21}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
1.02 GPa	0.1* E_1	0.3	0.1* ν_{12}	0.6* E_2	0.6* E_2	0.5* E_2

جدول ۳. صحت سنجی بار بحرانی کمانش نانوورق مربعی اورتوتروپ بدون ترک زیر بار فشاری دوجوری

Table 3. Verification of critical buckling load of orthotropic square nanosheet without cracks under biaxial compressive load

μ (nm ²)	نظریه	ضریب کمانش			
		W/h=5	W/h=10	W/h=20	W/h=30
۰/۰۰	روش حل مثلثاتی [۴۶].	۴/۰۱۱۶	۵/۸۵۵۹	۶/۶۶۳۰	۶/۸۴۰۰
	نظریه برشی مرتبه سوم اصلاحی [۴۷].	۴/۰۰۵۵	۵/۸۵۴۰	۶/۶۶۲۵	۶/۸۳۹۸
	نظریه هیپربولیک جدید [۲۴].	۴/۰۳۱۹	۵/۸۶۴۷	۶/۶۶۵۷	۶/۸۴۱۳
	تحقیق حاضر	۳/۹۸۹۵	۵/۸۵۱۷	۶/۶۶۲۴	۶/۸۳۹۸
	درصد اختلاف با مرجع [۴۷].	%۰/۰۴	%۰/۰۴	%۰/۰۰	%۰/..
۱	روش حل مثلثاتی [۴۶].	۰/۵۱۲۳	۲/۱۶۲۸	۴/۶۶۹۶	۵/۷۴۹۲
	نظریه برشی مرتبه سوم اصلاحی [۴۷].	۰/۵۱۱۶	۲/۱۶۲۱	۴/۶۶۹۳	۵/۷۴۹۱
	نظریه هیپربولیک جدید [۲۴].	۰/۵۱۴۹	۲/۱۶۶۱	۴/۶۷۱۵	۵/۷۵۰۳
	تحقیق حاضر	۰/۵۰۱۰	۲/۱۴۴۳	۴/۶۵۳۰	۵/۷۳۹۱
	درصد اختلاف با مرجع [۴۷].	%۲/۱۲	%۰/۸۳	%۰/۳۵	%۰/۱۷
۲	روش حل مثلثاتی [۴۶].	۰/۳۷۳۶	۱/۳۲۶۳	۳/۵۹۴۳	۴/۹۵۸۵
	نظریه برشی مرتبه سوم اصلاحی [۴۷].	۰/۳۷۳۲	۱/۳۲۵۹	۳/۵۹۴۰	۴/۹۵۸۳
	نظریه هیپربولیک جدید [۲۴].	۰/۳۷۵۰	۱/۳۲۸۳	۳/۵۹۵۷	۴/۹۵۹۴
	تحقیق حاضر	۰/۳۶۶۹	۱/۳۱۲۴	۳/۵۷۴۴	۴/۹۴۲۸
	درصد اختلاف با مرجع [۴۷].	%۲/۳۶	%۱/۰۳	%۰/۵۵	%۰/۳۱
۳	روش حل مثلثاتی [۴۶].	۰/۱۸۶۷	۰/۹۵۶۴	۲/۹۲۱۵	۴/۳۵۹۰
	نظریه برشی مرتبه سوم اصلاحی [۴۷].	۰/۱۸۶۴	۰/۹۵۶۱	۲/۹۲۱۳	۴/۳۵۸۸
	نظریه هیپربولیک جدید [۲۴].	۰/۱۸۷۶	۰/۹۵۷۹	۲/۹۲۲۷	۴/۳۵۹۷
	تحقیق حاضر	۰/۱۸۱۹	۰/۹۴۵۶	۲/۹۰۱۸	۰/۳۴۰۶
	درصد اختلاف با مرجع [۴۷].	%۲/۴۷	%۱/۱۱	%۰/۶۷	%۰/۴۲
۴	روش حل مثلثاتی [۴۶].	۰/۱۴۱۷	۰/۷۴۷۹	۲/۴۶۰۹	۳/۸۸۸۸
	نظریه برشی مرتبه سوم اصلاحی [۴۷].	۰/۱۴۱۴	۰/۷۴۷۶	۲/۴۶۰۷	۳/۸۸۸۷
	نظریه هیپربولیک جدید [۲۴].	۰/۱۴۲۴	۰/۷۴۹۰	۲/۴۶۰۷	۳/۸۸۹۵
	تحقیق حاضر	۰/۱۳۸۰	۰/۷۳۹۰	۲/۴۴۲۱	۳/۸۶۹۱
	درصد اختلاف با مرجع [۴۷].	%۲/۴۶	%۱/۱۶	%۰/۷۶	%۰/۵۱



شکل ۵. بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و نسبت عرض به ضخامت (W/h) بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار زیر بارگذاری تک‌محوری.

Fig. 5. Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and the width-to-thickness ratio (W/h) on the buckling load ratio of cracked square orthotropic nanosheets under uniaxial loading.

کمانشی حدود ۷ درصد کاهش می‌یابد.

در شکل (۶)، تأثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و نسبت طول ترک (a/W) بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های ترک‌دار مربعی اورتوتروپ با تکیه‌گاه‌های مفصلی زیر بارگذاری تک‌محوری مورد مطالعه قرار گرفته است. شکل (۶) نشان می‌دهد که اثر غیرموضعی سبب کاهش نسبت بار کمانشی نانورق‌های ترک‌دار و بدون ترک می‌گردد. همان‌طور که نشان داده شده است، در تمام موارد (a/W)، نسبت بار کمانشی با نرخ تقریباً ثابتی با عامل غیرموضعی کاهش می‌یابد. علاوه بر این، افزایش طول ترک در نانورق‌ها، اثر غیرموضعی را تشدید می‌کند. به‌عنوان مثال برای نانورق با شرایط $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، اثر غیرموضعی باعث کاهش ۲۲٪ و ۲۶٪ به‌ترتیب برای نسبت‌های طول ترک ۰ و ۰/۶ در نسبت بار کمانشی می‌شود. به این معنی است که ترک با نسبت ۰/۶، تأثیر غیرموضعی را در مقایسه با حالت بدون ترک حدود ۱/۱۸ برابر می‌کند.

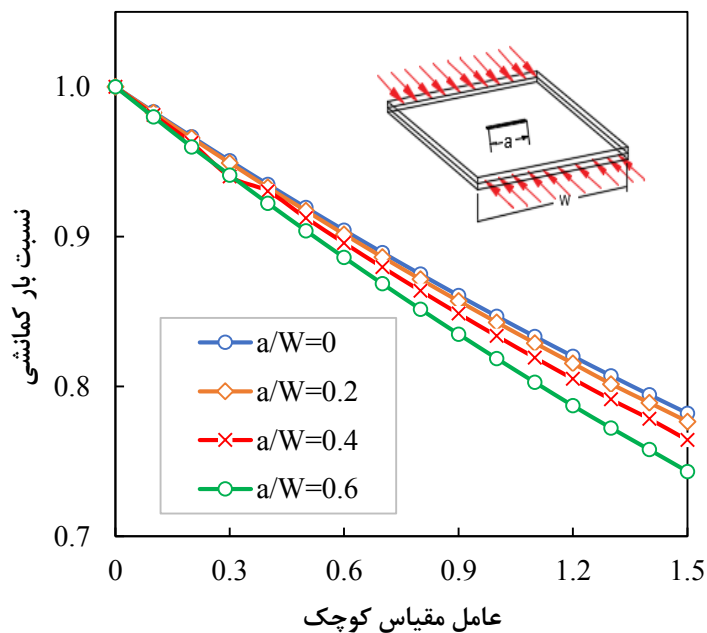
در شکل (۷) نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار با ابعاد جانبی مختلف زیر فشار تک‌محوری یک‌نواخت جهت بررسی تأثیر ابعاد جانبی نانورق بر ضریب کمانشی مورد تحلیل قرار گرفتند. نتایج نشان می‌دهد که برای نانورق‌ها با ابعاد بزرگ، نتایج غیرموضعی و موضعی نزدیک می‌شوند و

$$\text{نسبت بار کمانشی} = \frac{\text{بار کمانشی غیرموضعی}}{\text{بار کمانشی موضعی}} \quad (۳۴)$$

به‌طوری‌که رابطه (۳۴) نشان‌دهنده نسبت ضریب کمانش نانورق به ضریب کمانش ورق همگن با همان مشخصات ابعادی است که ضرایب مذکور براساس رابطه (۳۳)، قبلاً محاسبه شده است.

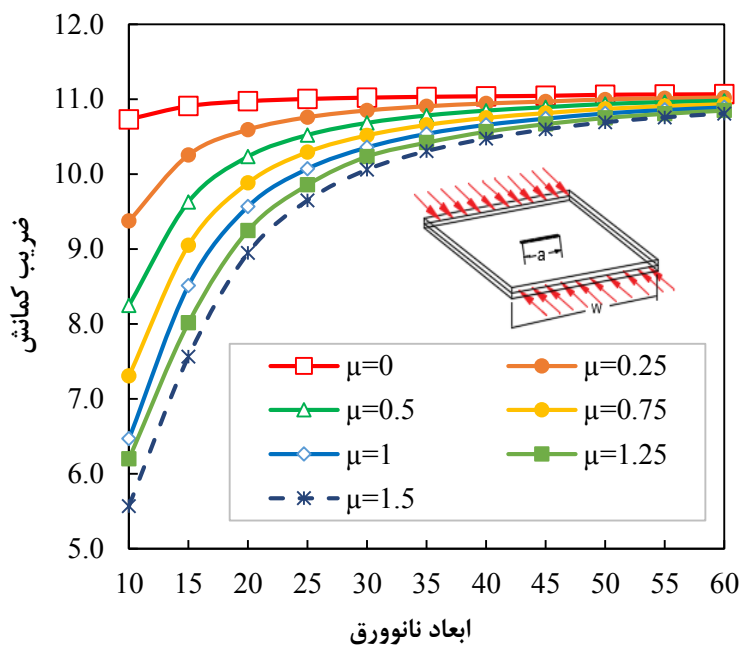
۵-۱- نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری تک‌محوری

کمانش غیرموضعی نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار، زیر بارهای فشاری تک‌محوری یک‌نواخت طبق شکل (۲) در این بخش مورد بحث قرار گرفته است. در شکل (۵)، اثر عامل مقیاس کوچک (μ) و نسبت عرض به ضخامت (W/h) بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار با تکیه‌گاه مفصلی زیر بارگذاری تک‌محوری بررسی شده است. شکل (۵) نشان می‌دهد که ضخامت نانورق تأثیر قابل توجهی بر شدت اثر غیرموضعی ندارد. با این حال، تأثیر عامل غیرموضعی بر کاهش نسبت بار کمانشی برای نانورق‌های ضخیم‌تر کمی بیشتر است. به‌طوری‌که در حالت مورد مطالعه $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، هنگامی که ضخامت حدود ۵ برابر افزایش می‌یابد، نسبت بار



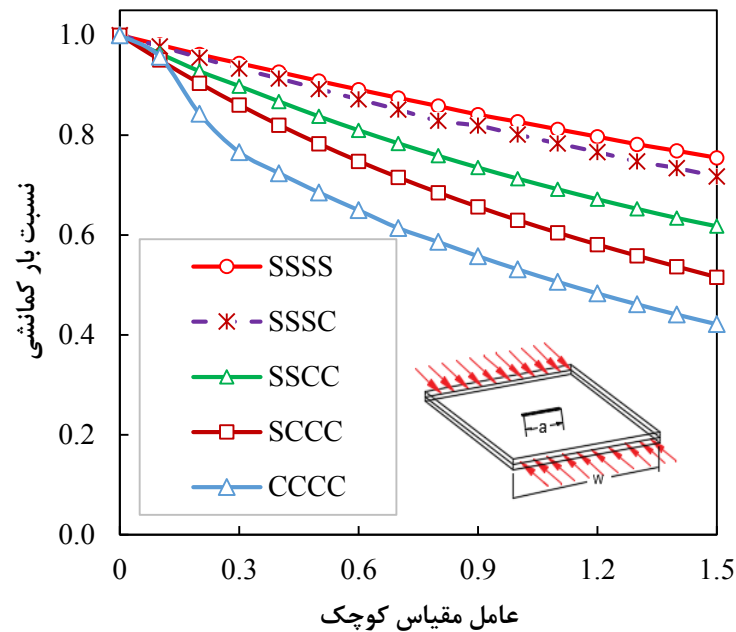
شکل ۶. بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و مؤلفه (a/W) بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار زیر بارگذاری تک‌محوری.

Fig. 6. Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and the component (a/W) on the buckling load ratio of cracked square orthotropic nanosheets under uniaxial loading.



شکل ۷. بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و افزایش ابعاد نانورق مربعی بر روی بار بحرانی بی‌بعد کمانش نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری تک‌محوری.

Fig. 7. Investigating the effect of the small-scale parameter (μ) and increasing the dimensions of the square nanosheet on the dimensionless critical buckling load of cracked orthotropic nanosheets under uniaxial loading.



شکل ۸. بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و شرایط تکیه گاهی بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار زیر بارگذاری تک‌محوری.

Fig. 8. Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and support conditions on the buckling load ratio of cracked square orthotropic nanosheets under uniaxial loading.

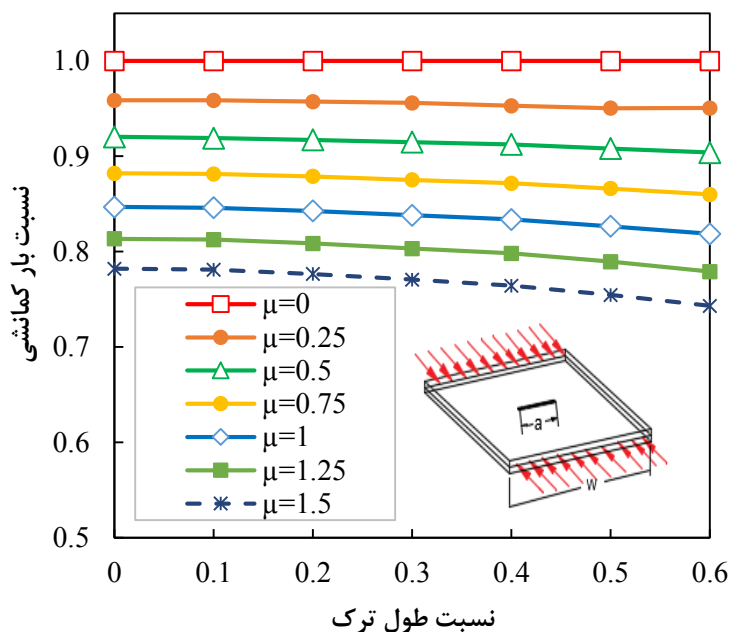
به ترتیب ۲۵٪ و ۴۸٪ است.

شکل (۹) نشان می‌دهد که وجود ترک در نانورق‌های اورتوتروپ با عامل‌های مقیاس کوچک مختلف، تاثیر زیادی بر نسبت بار کمانشی ندارد. مقایسه بین اثرات غیرموضعی برای دو حالت بارگذاری تک‌محوری، موازی و عمود بر راستای ترک، بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های مربعی اورتوتروپ در شکل (۱۰) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نسبت بار کمانشی با افزایش عامل مقیاس کوچک، کاهش می‌یابد، به این معنی که اثر غیرموضعی افزایش می‌یابد. علاوه بر این، برای نانورق‌ها با شرایط $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، کاهش نسبت بار کمانشی در صورتی که بار عمود بر راستای ترک وارد شود ۴٪ بیشتر از زمانی است که بارگذاری موازی راستای ترک باشد.

در شکل (۱۱)، اثر ابعاد جانبی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار برای دو حالت بارگذاری تک‌محوری موازی و عمود بر راستای ترک مقایسه گردید و مشاهده شد که با افزایش ابعاد جانبی نانورق‌ها، ضریب کمانش با نرخ تقریباً مشابهی افزایش می‌یابد، علاوه بر این، ضرایب کمانش مربوط به بارگذاری موازی با راستای ترک، بیشتر از ضرایب مربوطه برای حالت

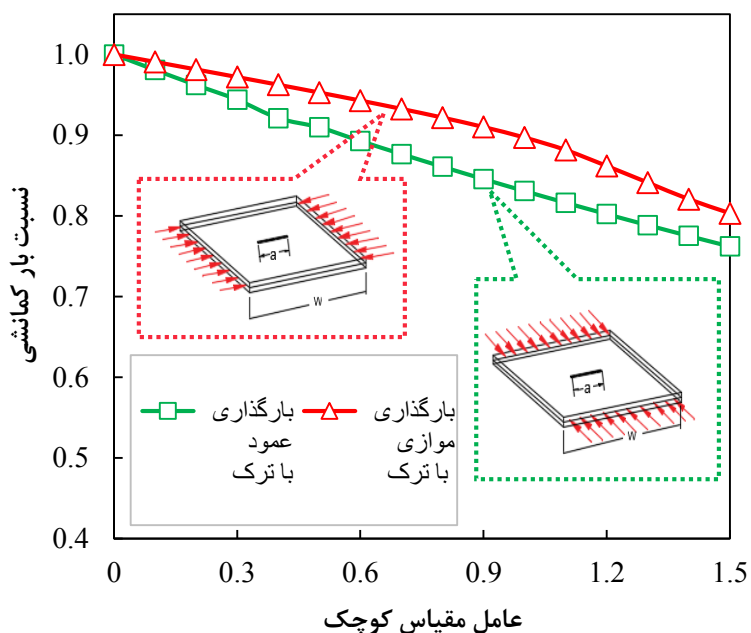
اثر غیرموضعی به تدریج از بین می‌رود. به عنوان مثال، نانورق با شرایط W است در صورتی که ابعاد جانبی شش برابر افزایش داده شود، تاثیر اثر غیرموضعی تقریباً از بین می‌رود. علاوه بر این، ضریب کمانش نانورق‌های با ابعاد کوچک و مقادیر زیاد عامل غیرموضعی، حساسیت بیشتری نسبت به تغییر ابعاد جانبی نانورق‌ها دارند.

شکل (۸)، تاثیر عامل مقیاس کوچک را بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر فشار تک‌محوری برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف را نشان می‌دهد. پنج شرط مرزی در نظر گرفته شده است. برای اختصار، از یک نماد چهار حرفی برای تعریف شرایط مرزی استفاده می‌شود، به طوری که حروف S و C به ترتیب نشان‌دهنده شرایط مفصلی و گیردار هستند. شکل (۸) نشان می‌دهد که اثر غیرموضعی، تحت تاثیر شرایط مرزی قرار می‌گیرد. همچنین مطابق شکل پیش‌گفت، در حالت بارگذاری تک‌محوری، اثر غیرموضعی با مقید کردن لبه‌های نانورق‌های ترک‌دار افزایش می‌یابد. برای نانورق با شرایط $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، کاهش نسبت بار کمانشی ناشی از اثر غیرموضعی برای شرایط مرزی SSSS و CCCC



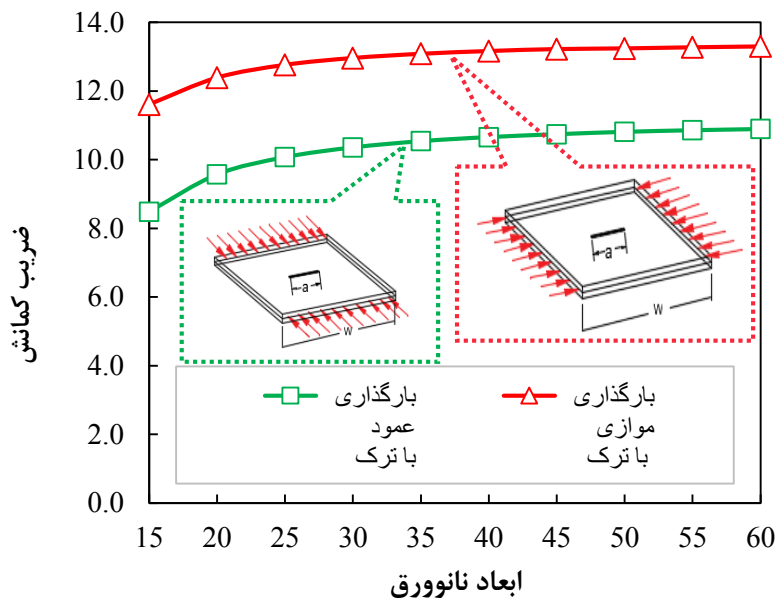
شکل ۹. بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و مؤلفه (a/W) بر نسبت بار کمناشی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار زیر بارگذاری تک‌محوری.

Fig. 9. Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and the component (a/W) on the buckling load ratio of cracked square orthotropic nanosheets under uniaxial loading.



شکل ۱۰. بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و بارگذاری عمود و موازی با راستای ترک بر نسبت بار کمناشی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار.

Fig. 10. Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and loading perpendicular and parallel to the crack direction on the buckling load ratio of cracked square orthotropic nanosheets.



شکل ۱۱. بررسی تاثیر ابعاد نانورق و بارگذاری عمود و موازی ترک بر روی بار بحرانی بی بعد کمانش نانورق‌های مربعی اورتوتروپ ترک‌دار.

Fig. 11. Investigating the effect of nanosheet dimensions and loading perpendicular and parallel to the crack on the dimensionless critical buckling load of cracked orthotropic square nanosheets.

هر دو نانورق اورتوتروپ و ایزوتروپ ترک‌دار، با افزایش عامل مقیاس کوچک، نسبت بار کمانشی با شیب یکسان کاهش می‌یابد. علاوه بر این، برای نانورق‌های اورتوتروپ و ایزوتروپ ترک‌دار با شرایط $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، کاهش نسبت بار کمانشی نانورق اورتوتروپ ۸٪ بیشتر از نانورق ایزوتروپ ترک‌دار می‌باشد.

۵-۲- نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری دومحوری

کمانش غیرموضعی نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار، زیر بارهای فشاری دومحوری یکنواخت، در این بخش مورد بحث قرار گرفته است. تأثیر عامل مقیاس کوچک بر نسبت بار کمانشی برای نسبت‌های ابعادی مختلف نانورق اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری دو محوری در شکل (۱۵) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، نسبت بار کمانشی با افزایش نسبت ابعادی، افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، اثر غیرموضعی با افزایش نسبت ابعادی نانورق کاهش می‌یابد. در شرایط $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، افزایش نسبت ابعادی از $L/W = 1$ به $L/W = 1.8$ ، باعث کاهش اثر غیرموضعی حدود ۱۲ درصد می‌گردد.

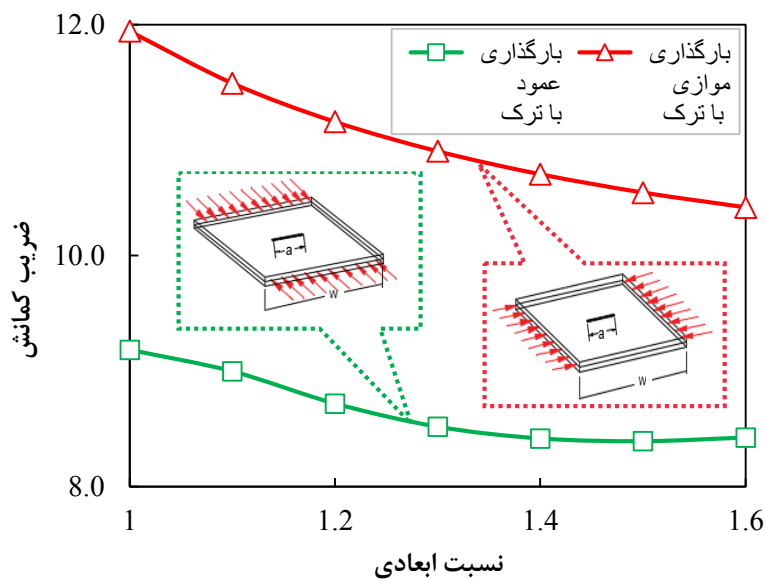
همان‌طور که در شکل (۱۶) مشاهده می‌شود، ضخامت بر ضریب کمانش نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار تأثیر دارد. برای نانورق‌های

بارگذاری عمود بر راستای ترک است.

شکل (۱۲) نشان‌دهنده تأثیر نسبت ابعادی نانورق و راستای بارگذاری تک‌محوری، بر ضریب کمانشی نانورق‌های مربعی اورتوتروپ ترک‌دار با شرایط $(W = 17 \text{ nm}, a = 8.5 \text{ nm}, h = 0.34, \mu = 1 \text{ nm}^2)$ می‌باشد. از شکل (۱۲) می‌توان نتیجه گرفت که در حالت بارگذاری تک‌محوری عمود بر راستای ترک و بارگذاری موازی بر راستای ترک، با افزایش نسبت ابعادی نانورق‌ها، ضریب کمانشی در دو حالت با نرخ ثابتی کاهش می‌یابد.

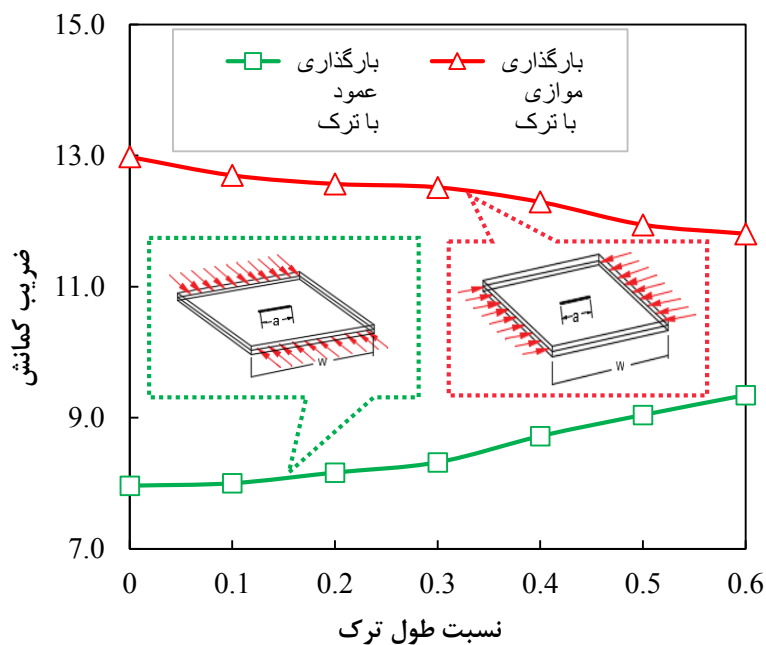
در شکل (۱۳) اثر راستای بارگذاری بر ضریب کمانش نانورق‌های مربعی اورتوتروپ با شرایط تکیه‌گاهی چهارطرف مفصلی مورد بررسی قرار گرفت. بر این اساس، همان‌طور که مشاهده می‌گردد، رفتار کمانشی نانورق‌های ترک‌دار برای دو حالت بارگذاری موازی و عمود بر راستای ترک متفاوت است. تفاوت بین ضرایب کمانش دو حالت مورد مطالعه با افزایش طول ترک کاهش می‌یابد، به طوری که در حالت بارگذاری عمود بر راستای ترک، با افزایش طول ترک، ضریب کمانش افزایش می‌یابد در حالی که در حالت دیگر، ضریب کمانش کاهش می‌یابد.

مقایسه بین اثرات غیرموضعی برای دو حالت بارگذاری تک و دومحوری، در نانورق‌های اورتوتروپ و ایزوتروپ ترک‌دار بر نسبت بار کمانشی در شکل (۱۴) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای



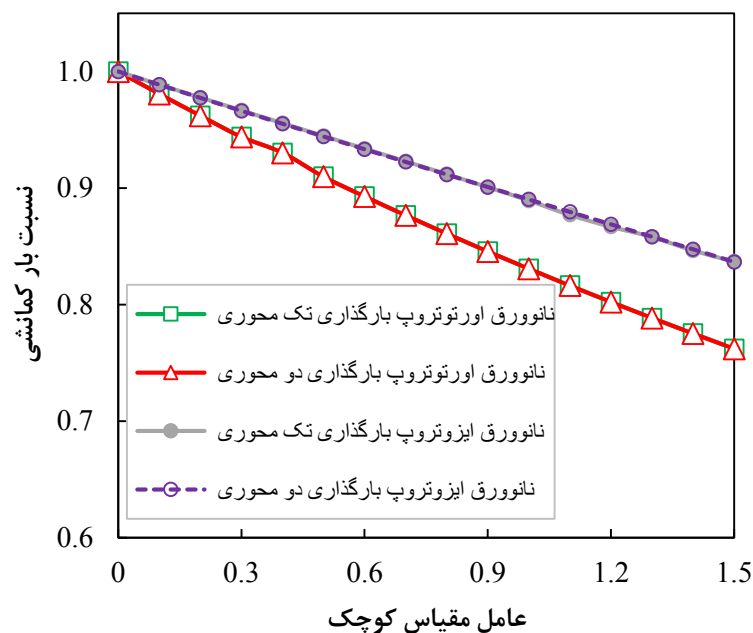
شکل ۱۲. بررسی عامل نسبت طول به عرض نانورق (L/W) و بارگذاری عمود و موازی ترک بر روی بار بحرانی بی بعد کماتش نانورق های اورتوتروپ ترک دار.

Fig. 12. Investigation of the factor of length to width ratio of nanosheet (L/W) and loading perpendicular and parallel to the crack on the dimensionless critical buckling load of cracked orthotropic nanosheets.



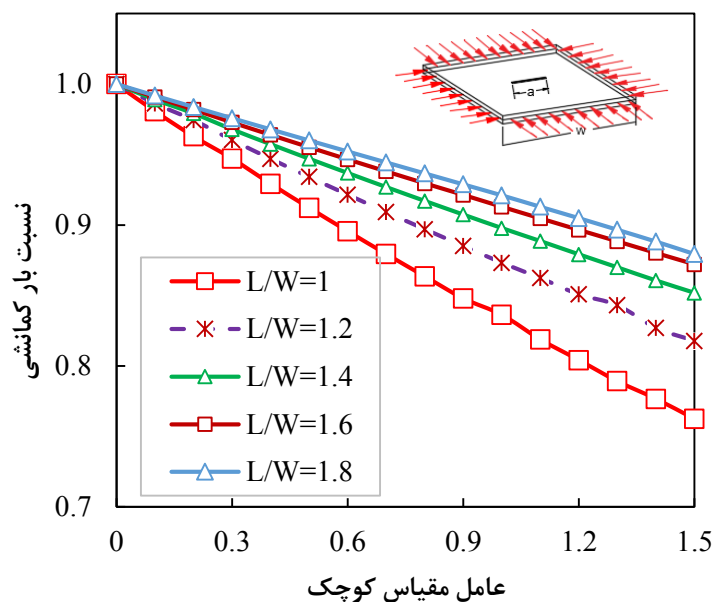
شکل ۱۳. بررسی تاثیر عامل (a/W) و بارگذاری عمود و موازی با ترک بر روی بار بحرانی بی بعد کماتش نانورق های اورتوتروپ مربعی ترک دار.

Fig. 13. Investigation of the effect of the factor (a/W) and loading perpendicular and parallel to the crack on the dimensionless critical buckling load of cracked square orthotropic nanosheets.



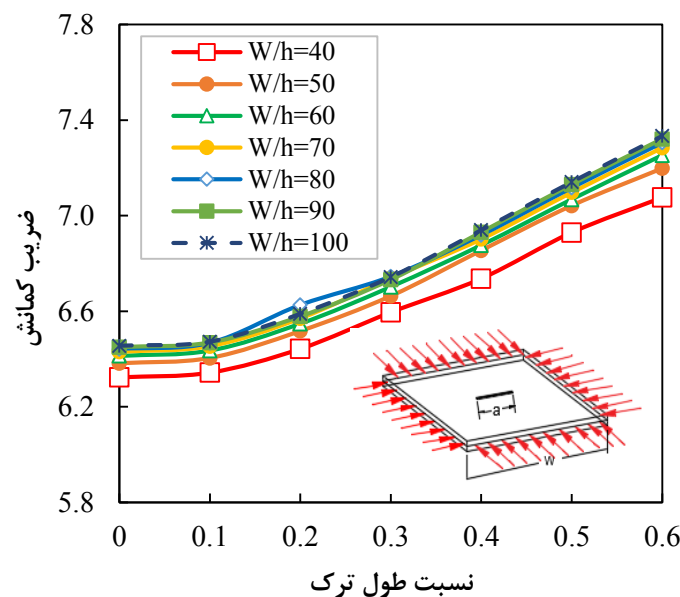
شکل ۱۴. بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و بارگذاری تک و دوماحوری بر نسبت بار کمائشی نانورقهای اورتوتروپ و ایزوتروپ مربعی ترکدار.

Fig. 14. Investigation of the effect of small-scale parameter (μ) and uniaxial and biaxial loading on the buckling load ratio of orthotropic and isotropic square cracked nanosheets



شکل ۱۵. بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و نسبت طول به عرض ورق (L/W) بر نسبت بار کمائشی نانورقهای اورتوتروپ ترکدار زیر بارگذاری دوماحوری.

Fig. 15. Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and the aspect ratio of the nanosheet (L/W) on the buckling load ratio of cracked orthotropic nanosheets under biaxial loading.



شکل ۱۶. بررسی تاثیر مؤلفه (a/W) و نسبت عرض به ضخامت (W/h) بر روی بار بحرانی بی بعد کماتش نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار زیر بارگذاری دوماحوری

Fig. 16. Investigation of the effect of the component (a/W) and the width-to-thickness ratio (W/h) on the dimensionless critical buckling load of cracked square orthotropic nanosheets under biaxial loading.

نانورق‌ها با نسبت ابعادی کوچکتر از $1/4$ ، ضریب کماتش با تغییر این مؤلفه، تغییر قابل توجهی می‌کند. کمترین و بیشترین مقدار ضریب کماتش به ترتیب متعلق به نسبت‌های ابعادی $0/4$ و یک است. از شکل (۱۹)، برای همه نسبت‌های ابعادی، ضریب کماتش نانورق با افزایش عامل مقیاس کوچک، کاهش می‌یابد.

شکل (۲۰) اثر طول ترک به عرض ورق (a/W) را بر ضریب کماتش نانورق‌های اورتوتروپ با نسبت‌های مختلف ابعادی را نشان می‌دهد. که حداکثر تغییر در ضریب کماتش ناشی از تغییر طول ترک حدود ۱۲ درصد متعلق به نانورق‌های با نسبت ابعادی یک است. با افزایش نسبت ابعادی نانورق‌ها از یک، اثر طول ترک به تدریج کاهش می‌یابد. در نانورق‌های با نسبت ابعادی بیشتر از $1/3$ ، تا نسبت طول ترک حدود $0/2$ ، حساسیت ضریب کماتش به افزایش طول ترک ناچیز است. پس از آن اثر بیشتری دارد.

۶- پیشنهاد برای تحقیقات آینده

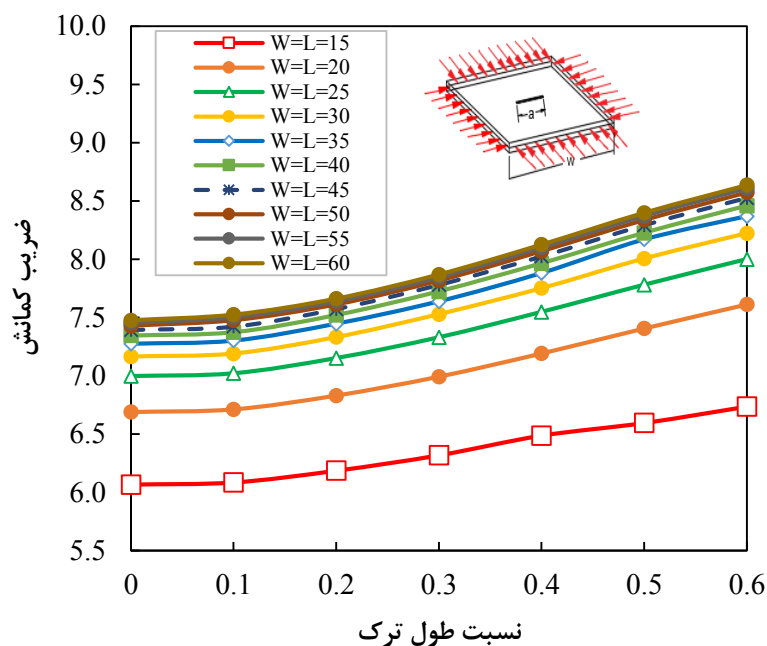
مقاله حاضر پایه‌ای برای تحلیل کماتش نانورق‌های ترک‌دار به همراه راستی‌آزمایی مربوط و نیز بررسی تأثیر متغیرهای مختلف ورق و اثر اندازه را ارائه نموده است. روشن است که تأثیر متغیرهای مربوط به میزان اورتوتروپ

ترک‌دار، با افزایش ضخامت، ضریب کماتش کاهش می‌یابد. نانورق‌های با ضخامت‌های مختلف دارای حداقل ضریب کماتش در شرایط ترک با نسبت $0/1$ می‌باشند.

در شکل (۱۷) به بررسی تاثیر نسبت طول ترک (a/W) بر ضریب کماتشی نانورق اورتوتروپ مربعی ترک‌دار با شرایط تکیه‌گاهی چهارطرف مفصلی با شرایط $(W = L = 17nm, \mu = 1nm^2)$ زیر بارگذاری دو محوری پرداخته شد و مشخص گردید با افزایش نسبت طول ترک در ابعادهای مختلف نانورق‌ها، ضریب کماتشی نانورق مربعی اورتوتروپ با نرخ ثابتی افزایش می‌یابد.

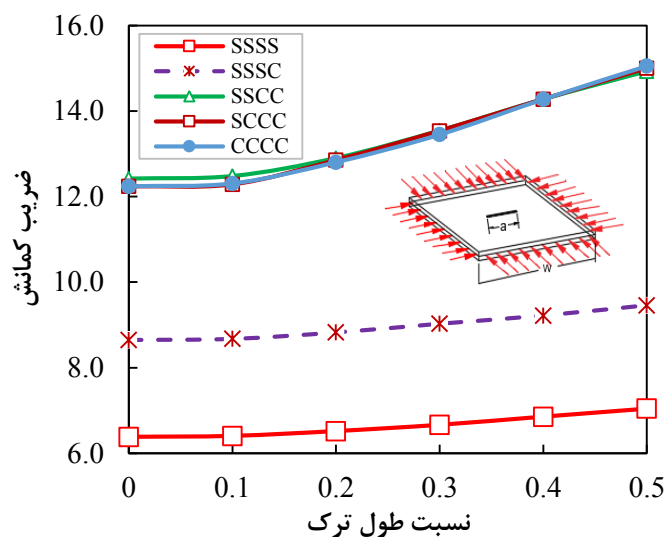
در شکل (۱۸) به بررسی اثر شرایط مرزی بر ضریب کماتش نانورق‌های اورتوتروپ زیر فشار دوماحوری پرداخته شده است. همان‌طور که در شکل (۱۸) برای نانورق‌های ترک‌دار مشاهده می‌شود، ضریب کماتش با مقید کردن لبه‌های نانورق‌ها افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، اثر غیرموضعی کاهش می‌یابد.

در شکل (۱۹) ضریب کماتش نانورق با عامل ابعاد کوچک بر حسب نسبت‌های مختلف ابعادی ورق ترسیم شده است. با توجه به این نمودار، نسبت ابعاد نانورق‌ها عاملی تأثیرگذار بر رفتار کماتش است. که برای



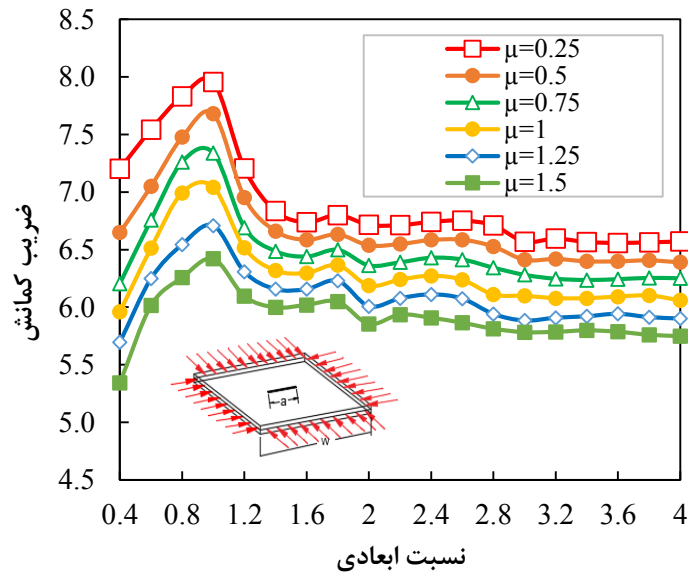
شکل ۱۷. بررسی تأثیر مؤلفه (a/W) و افزایش ابعاد ورق مربعی بر روی بار بحرانی بی‌بعد کمایش نانوورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری دوشعری.

Fig. 17. Investigating the effect of the (a/W) component and increasing the dimensions of the square sheet on the dimensionless critical buckling load of cracked orthotropic nanosheets under biaxial loading.



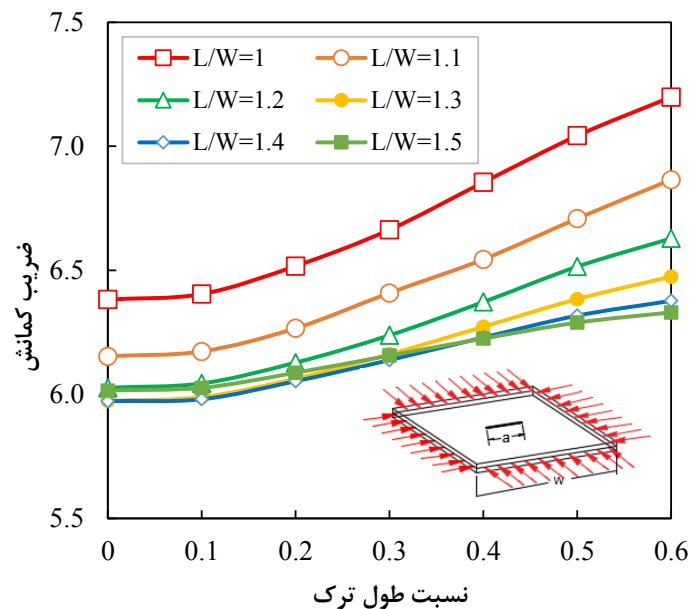
شکل ۱۸. بررسی تأثیر مؤلفه (a/W) و شرایط تکیه‌گاهی بر روی بار بحرانی بی‌بعد کمایش نانوورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار زیر بارگذاری دوشعری.

Fig. 18. Investigation of the effect of the component (a/W) and support conditions on the dimensionless critical buckling load of cracked square orthotropic nanosheets under biaxial loading.



شکل ۱۹. بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و نسبت ابعادی نانورق (L/W) بر روی بار بحرانی بی بعد کمانش نانورق های اورتوتروپ ترک دار زیر بارگذاری دوماحوری.

Fig. 19. Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and the aspect ratio of the nanosheet (L/W) on the dimensionless critical buckling load of cracked orthotropic nanosheets under biaxial loading.



شکل ۲۰. بررسی تاثیر مؤلفه (a/W) و نسبت طول به عرض (L/W) بر روی بار بحرانی بی بعد کمانش نانورق های اورتوتروپ ترک دار زیر بارگذاری دوماحوری.

Fig. 20. Investigation of the effect of the component (a/W) and the aspect ratio of the nanosheet (L/W) on the dimensionless critical buckling load of cracked orthotropic nanosheets under biaxial loading

بیشتر از نانورق ایزوتروپ می‌باشد.

- ۷- ضریب کماتش نانورق‌های اورتوتروپ با مقید کردن لبه‌های نانورق‌ها افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، اثر غیرموضعی کاهش می‌یابد.
- ۸- مشاهده گردید که ضریب کماتش نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار درحالت بارگذاری عمود بر راستای ترک، با افزایش طول ترک، افزایش می‌یابد در حالی‌که در حالت بارگذاری موازی بر راستای ترک، ضریب کماتش کاهش می‌یابد.

منابع

- [1] N. Taniguchi, On the basic concept of 'nano-technology', in: Proc. Intl. Conf. Prod. Eng. Tokyo, Part II, 1974, Japan Society of Precision Engineering, 1974.
- [2] M. Ma, J. Tu, Y. Yuan, X. Wang, K. Li, F. Mao, Z. Zeng, Electrochemical performance of ZnO nanoplates as anode materials for Ni/Zn secondary batteries, Journal of Power Sources, 179(1) (2008) 395-400.
- [3] J. Yguerabide, E.E. Yguerabide, Resonance light scattering particles as ultrasensitive labels for detection of analytes in a wide range of applications, Journal of Cellular Biochemistry, 84(S37) (2001) 71-81.
- [4] M. Aagesen, C. Sørensen, Nanoplates and their suitability for use as solar cells, Proceedings of Clean Technology, (2008) 109-112.
- [5] W. Bai, X. Zhu, Z. Zhu, J. Chu, Synthesis of zinc oxide nanosheet thin films and their improved field emission and photoluminescence properties by annealing processing, Applied Surface Science, 254(20) (2008) 6483-6488.
- [6] A. Farajpour, A. Shahidi, M. Mohammadi, M. Mahzoon, Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics, Composite Structures, 94(5) (2012) 1605-1615.
- [7] A. Farajpour, A.A. Solghar, A. Shahidi, Postbuckling analysis of multi-layered graphene sheets under non-uniform biaxial compression, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 47 (2013) 197-206.
- [8] T. Aksencer, M. Aydogdu, Levy type solution method

بودن مصالح ورق جزو مباحث مهمی است که نویسندگان در نظر دارند در تحقیقات بعدی به آن بپردازند.

۷- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، اثر مقیاس کوچک بر رفتار پایداری کماتش نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری فشاری به روش مکانیک پیوسته غیرموضعی بررسی گردید. راه حل‌های غیرموضعی برای ضریب کماتشی و نسبت بار کماتشی با روش المان محدود توسعه یافته انجام پذیرفت. مؤلفه‌های مورد مطالعه عبارتند از: عامل مقیاس کوچک (μ)، طول ترک (a)، ضخامت نانورق (h)، ابعاد جانبی (W, L)، و نسبت ابعادی (L/W). شرایط مرزی متفاوتی برای نانورق‌ها در نظر گرفته شد. نتایج حاصل از پژوهش حاضر بر روی ضریب کماتشی و نسبت بار کماتشی نانورق‌های اورتوتروپ دارای ترک مرکزی زیر بار فشاری تک و دومحوری عبارتند از:

- ۱- بر اساس یافته‌های این تحقیق، اثر مقیاس کوچک، باعث کاهش نسبت بار کماتشی نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار و بدون ترک می‌گردد. اما وجود ترک و افزایش طول آن اثر غیرموضعی را تشدید می‌کند. به طوری‌که تاثیر غیرموضعی یک ترک با نسبت ابعادی $0/6$ در نانورق‌های اورتوتروپ مربعی با شرایط تکیه‌گاهی چهارطرف مفصلی و زیر بار فشاری تک‌محوری، نسبت به حالت نانورق بدون ترک، حدود $1/18$ برابر می‌گردد.
- ۲- حداکثر تغییر ضریب کماتش به دلیل تغییر طول ترک حدود 12 درصد متعلق به نانورق‌های اورتوتروپ با نسبت ابعادی یک است. با افزایش نسبت ابعادی نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار از یک، اثر مقیاس کوچک به تدریج کاهش می‌یابد.
- ۳- ضخامت نانورق‌ها تاثیر قابل توجهی بر شدت اثر غیرموضعی ندارد. با این حال، تاثیر عامل غیرموضعی برای نانورق‌های ضخیم‌تر کمی بیشتر است.

۴- با افزایش ابعاد جانبی نانورق‌های اورتوتروپ، اثر غیرموضعی به تدریج از بین می‌رود. به طوری‌که وقتی ابعاد جانبی حدود شش برابر افزایش می‌یابد، تاثیر اثر غیرموضعی تقریباً از بین می‌رود.

۵- اثرات غیرموضعی برای نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر فشار تک‌محوری عمود و موازی بر راستای ترک تقریباً یکسان است، اگرچه رفتار کماتشی آن‌ها متفاوت است.

۶- مشاهده گردید که برای نانورق‌های اورتوتروپ و ایزوتروپ ترک‌دار با شرایط $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، کاهش نسبت بار کماتشی نانورق اورتوتروپ $8/1\%$

- analysis of cracked composite plates, *Composite Structures*, 131 (2015) 333-343.
- [20] S. Saberi, P. Memarzadeh, T. Zirakian, Study of buckling stability of cracked plates under uniaxial compression using singular FEM, *Structural Engineering and Mechanics*, An Int'l Journal, 69(4) (2019) 417-426.
- [21] P. Memarzadeh, S. Mousavian, M.H. Ghehi, T. Zirakian, Effect of crack location on buckling analysis and SIF of cracked plates under tension, *Steel and Composite Structures*, An International Journal, 35(2) (2020) 215-235.
- [22] M.H. Taheri, P. Memarzadeh, Experimental and numerical study of compressive buckling stability of plates with off-center crack, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 109 (2020) 102706.
- [23] M.H. Taheri, P. Memarzadeh, Effect of crack on shear buckling of CNTRC plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 229 (2022) 107519.
- [24] B. Kadari, A. Bessaim, A. Tounsi, H. Heireche, A.A. Bousahla, M.S.A. Houari, Buckling analysis of orthotropic nanoscale plates resting on elastic foundations, *Journal of Nano Research*, 55 (2018) 42-56.
- [25] M. Rajabi, H. Lexian, A. Rajabi, Analysis of Nanoplate with a Central Crack Under Distributed Transverse Load Based on Modified Nonlocal Elasticity Theory, *Journal of Solid Mechanics*, 13(2) (2021) 213-232.
- [26] D. Panahandeh-Shahraki, A.A. Rad, Buckling of cracked functionally graded plates supported by Pasternak foundation, *International Journal of Mechanical Sciences*, 88 (2014) 221-231.
- [27] A.A. Rad, D. Panahandeh-Shahraki, Buckling of cracked functionally graded plates under tension, *Thin-Walled Structures*, 84 (2014) 26-33.
- [28] S. Natarajan, S. Chakraborty, M. Ganapathi, M. Subramanian, A parametric study on the buckling of functionally graded material plates with internal discontinuities using the partition of unity method, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 44 (2014) 136-147.
- for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(4) (2011) 954-959.
- [9] P. Malekzadeh, A. Setoodeh, A.A. Beni, Small scale effect on the thermal buckling of orthotropic arbitrary straight-sided quadrilateral nanoplates embedded in an elastic medium, *Composite Structures*, 93(8) (2011) 2083-2089.
- [10] P. Malekzadeh, A. Setoodeh, A.A. Beni, Small scale effect on the free vibration of orthotropic arbitrary straight-sided quadrilateral nanoplates, *Composite Structures*, 93(7) (2011) 1631-1639.
- [11] V. Abdolvahab, P. Memarzadeh, Effect of crack damage on size-dependent instability of graphene sheets, *Applied Mathematical Modelling*, 129 (2024) 408-427.
- [12] M. Alinia, S. Hosseinzadeh, H. Habashi, Numerical modelling for buckling analysis of cracked shear panels, *Thin-Walled Structures*, 45(12) (2007) 1058-1067.
- [13] M. Alinia, S. Hosseinzadeh, H. Habashi, Buckling and post-buckling strength of shear panels degraded by near border cracks, *Journal of Constructional Steel Research*, 64(12) (2008) 1483-1494.
- [14] R. Brighenti, A. Carpinteri, Buckling and fracture behaviour of cracked thin plates under shear loading, *Materials & Design*, 32(3) (2011) 1347-1355.
- [15] A. Milazzo, I. Benedetti, V. Gulizzi, A single-domain Ritz approach for buckling and post-buckling analysis of cracked plates, *International Journal of Solids and Structures*, 159 (2019) 221-231.
- [16] R. Brighenti, Buckling of cracked thin-plates under tension or compression, *Thin-Walled Structures*, 43(2) (2005) 209-224.
- [17] R. Brighenti, Numerical buckling analysis of compressed or tensioned cracked thin plates, *Engineering structures*, 27(2) (2005) 265-276.
- [18] M.R. Khedmati, P. Edalat, M. Javidruzi, Sensitivity analysis of the elastic buckling of cracked plate elements under axial compression, *Thin-Walled Structures*, 47(5) (2009) 522-536.
- [19] A. Nasirmanesh, S. Mohammadi, XFEM buckling

- [38] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, 1983.
- [39] A.C. Eringen, D. Edelen, On nonlocal elasticity, International journal of engineering science, 10(3) (1972) 233-248.
- [40] A. Eringen, J. Wegner, Nonlocal continuum field theories, in, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, 2003.
- [41] P.P. Minh, T. Van Do, D.H. Duc, N.D. Duc, The stability of cracked rectangular plate with variable thickness using phase field method, Thin-Walled Structures, 129 (2018) 157-165.
- [42] J.N. Reddy, Theory and analysis of elastic plates and shells, CRC press, 2006.
- [43] A.R. Khoei, Extended finite element method: theory and applications, John Wiley & Sons, 2015.
- [44] R.D. Cook, Concepts and applications of finite element analysis, John wiley & sons, 2007.
- [45] J.N. Reddy, An introduction to the finite element method, McGraw-Hill New York, 2005.
- [46] M. Sobhy, Natural frequency and buckling of orthotropic nanoplates resting on two-parameter elastic foundations with various boundary conditions, Journal of Mechanics, 30(5) (2014) 443-453.
- [47] S. Pradhan, Buckling of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory, Physics letters A, 373(45) (2009) 4182-4188.
- [48] S. Pradhan, T. Murmu, Small scale effect on the buckling analysis of single-layered graphene sheet embedded in an elastic medium based on nonlocal plate theory, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures, 42(5) (2010) 1293-1301.
- [49] S. Pradhan, T. Murmu, Small scale effect on the buckling of single-layered graphene sheets under biaxial compression via nonlocal continuum mechanics, Computational materials science, 47(1) (2009) 268-274.
- [29] P. Liu, T. Bui, D. Zhu, T. Yu, J. Wang, S. Yin, S. Hirose, Buckling failure analysis of cracked functionally graded plates by a stabilized discrete shear gap extended 3-node triangular plate element, Composites Part B: Engineering, 77 (2015) 179-193.
- [30] H. Tanzadeh, H. Amoushahi, Buckling analysis of orthotropic nanoplates based on nonlocal strain gradient theory using the higher-order finite strip method (H-FSM), European Journal of Mechanics-A/Solids, 95 (2022) 104622.
- [31] X. Wang, X. Shi, A.E. Ragab, R. Sabetvand, Investigating the effect of external heat flux on the crack growth process in an aluminum nanoplate using molecular dynamics simulation, International Communications in Heat and Mass Transfer, 150 (2024) 107199.
- [32] R.A. Arpanahi, B. Mohammadi, M.T. Ahmadian, S.H. Hashemi, Study on the buckling behavior of nonlocal nanoplate submerged in viscous moving fluid, International Journal of Dynamics and Control, 11(6) (2023) 2820-2830.
- [33] M. Sadeghian, A. Palevicius, G. Janusas, Nonlinear Thermal/Mechanical Buckling of Orthotropic Annular/ Circular Nanoplate with the Nonlocal Strain Gradient Model, Micromachines, 14(9) (2023) 1790.
- [34] H.R. Analooei, M. Azhari, H. Salehipour, Thermo-electro-mechanical vibration and buckling analysis of quadrilateral and triangular nanoplates with the nonlocal finite strip method, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 51(3) (2023) 1684-1704.
- [35] A.A. Daikh, M.-O. Belarbi, A. Khechai, L. Li, H.M. Ahmed, M.A. Eltaher, Buckling of bi-coated functionally graded porous nanoplates via a nonlocal strain gradient quasi-3D theory, Acta Mechanica, 234(8) (2023) 3397-3420.
- [36] Y. Chen, J.D. Lee, A. Eskandarian, Atomistic viewpoint of the applicability of microcontinuum theories, International journal of solids and structures, 41(8) (2004) 2085-2097.
- [37] A.C. Eringen, Nonlocal polar elastic continua, International journal of engineering science, 10(1) (1972) 1-16.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

V. Abdolvahab, P. Memarzadeh, *Nonlocal Buckling of Orthotropic Nanosheets with a Central Crack*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 57(7) (2025) 1165-1194.

DOI: [10.22060/ceej.2025.23146.8118](https://doi.org/10.22060/ceej.2025.23146.8118)

