Amirkabir Journal of Civil Engineering

Amirkabir J. Civil Eng., 57(1) (2025) 63-88
DOI: 10.22060/ceej.2025.22091.7906

Linear Programming and Moving Morphable Components Approach in 2D Structural Topology Optimization

Amin Lotfalian, Peyman Esmailpour, Meisam Takalloozadeh *

Department of Civil and Environmental Engineering, School of Engineering, Shiraz University, Shiraz, Iran

ABSTRACT: Moving morphable components (MMC) is a relatively new and effective approach in structural topology optimization. In comparison with other common methods in topology optimization such as density-based methods and level-set-based methods, it requires fewer design variables, and the boundary of the structure is defined explicitly. However, the obtained topology is highly dependent on the initial shape and position of the components. On the other hand, plastic layout optimization utilizes linear programming to find the global optimum of the structural optimization problem. Assuming rigid plastic behavior for material, the optimum layout can be obtained quickly and accurately. The optimum layout gives only the area of members which is constant along the members, therefore, there is no detail about the connection between members. Hence, the obtained optimum layout cannot be used directly for manufacturing methods such as additive manufacturing. It can be shown that the minimum compliance optimization problem for a single load case is equivalent to a minimum-weight plastic layout optimization formulation. This study utilizes the idea and presents a two-step method to take advantage of and compensate for the shortcomings of these two methods in the topology optimization of 2D structures. To this end, in the first step, the optimum layout is obtained using linear formulation in layout optimization and then, the obtained layout is utilized as an initial point in the MMC approach. The results show the efficiency, accuracy, and high convergence rate of the proposed method.

Review History:

Received: Jan. 17, 2023
Revised: Sep. 28, 2024
Accepted: Nov. 30, 2024
Available Online: Jan. 07, 2025

Keywords:

Topology Optimization
Layout Optimization
Linear Programming
Moving Morphable Components
Additive Manufacturing

1- Introduction

This study presents a new approach to overcome the complexities associated with non-convex optimization in continuum-based topology optimization, a field pivotal to achieving maximum structural efficiency. Non-convex optimization poses significant challenges in locating global optima, particularly in engineering applications where precise material allocation is critical. Heuristic methods, such as genetic algorithms, are commonly employed to address these difficulties. However, while these techniques improve the chances of identifying optimal solutions, they often come with the drawback of high computational demands, especially when handling a large number of design variables [1]. To address these limitations, this research introduces a two-phase framework for topology optimization. The initial phase utilizes Layout Optimization (LO), to generate a preliminary design through well-established mathematical principles. This phase is rooted in Michell's 1904 criterion for optimal truss structures, a foundational concept that has significantly influenced structural optimization [2]. Initially underutilized, Michell's criterion gained traction with later adaptations, such as Dorn's 1964 approach leveraging linear programming to refine structural design [3]. Over time, advancements in LO have incorporated solutions for diverse loading conditions and self-weight considerations, exemplified by innovations like the member-adding algorithm proposed by Gilbert and colleagues, which enhances the overall efficiency of designs [4, 5]. Figure 1 visualizes the phases of the layout optimization process, including the initial design domain, discretization into nodes, the ground structure framework, and the final optimized design.

The second phase of the study leverages the innovative Moving Morphable Components (MMC) method, a cutting-edge technique designed to optimize the positioning and configuration of a finite number of structural components to establish the final topology. This approach utilizes a mathematically defined scalar function, streamlining the design process with enhanced efficiency. By refining the geometry and location of these components, the MMC method effectively integrates aspects of shape and topology optimization. This integration enables direct enforcement of constraints, such as element size limitations or buckling resistance, which are traditionally difficult to address in

*Corresponding author's email: takalloozadeh@shirazu.ac.ir

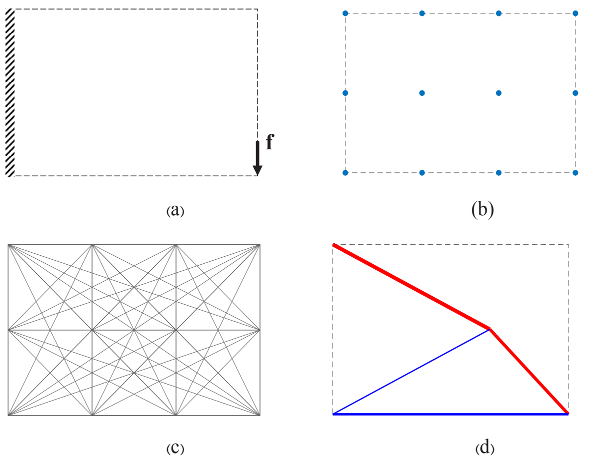


Fig. 1. (a) Design domain, (b) Discretization of the design domain with nodes, (c) The ground structure, and (d) The optimal design.

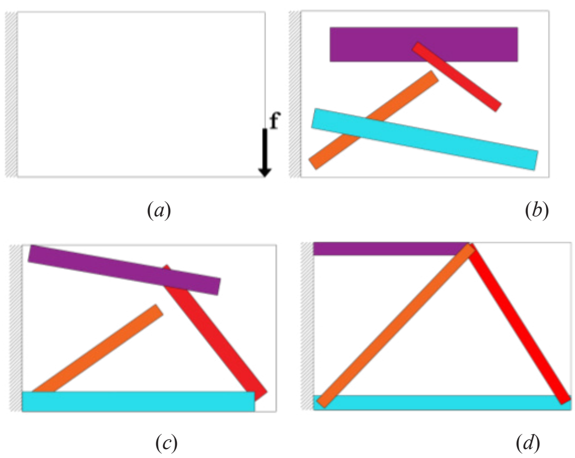


Fig. 2. (a) design domain and boundary conditions, (b) initial state of components, (c) movement of components to achieve the optimal topology, and (d) final optimal topology.

conventional topology optimization.

One of the key advantages of the MMC method is its reliance on a reduced number of design variables compared to other methodologies, resulting in accelerated optimization workflows. Nevertheless, it faces difficulties due to its intrinsic non-linear and non-convex characteristics. The success of the MMC approach heavily depends on the initial design, which plays a critical role in guiding the optimization process and shaping the final results. Fig. 2 illustrates the MMC approach as the second phase, showcasing the transformation from the initial component layout to the optimized 2D structural topology [6-11]

The combination of these two phases aims to improve convergence speed and overall design quality, ultimately leading to more effective structural optimization outcomes.

2- Methodology

This study implements a two-phase optimization process to enhance the MMC approach in topology optimization. The first phase employs LO, which formulates a convex optimization problem to generate an optimal initial design using linear programming techniques. This phase builds on established theories, ensuring that the LO solution minimizes strain energy and provides a robust starting point. The MOSEK solver is specifically used to solve linear programming. In the second phase, the MMC method utilizes the LO-generated design as its initial layout, significantly mitigating the risk of converging to local optima. The transition from LO to MMC involves transformation equations that link the initial design to the MMC framework. Additionally, the design space is constrained by limiting variations in angles, lengths, and thicknesses, which reduces the number of design variables and accelerates the convergence of the optimization process. To solve the non-convex optimization problem, the Method of Moving Asymptotes (MMA) is employed, with both phases implemented in MATLAB.

3- Results and discussion

The proposed two-phase optimization approach was evaluated through three numerical examples: a cantilever beam, a simply supported beam, and an L-shaped structure, demonstrating its effectiveness in enhancing structural performance while reducing computational time compared to the conventional MMC method. In the first example, the cantilever beam, subjected to a unit load, achieved an objective function value of 128.8 in 589 seconds using the two-phase approach, compared to 129.6 in 986 seconds with conventional MMC. The second example, involving a simply supported beam, yielded a final value of 210.9 in 587 seconds for the two-phase method, while the conventional approach took 3482 seconds for a value of 237.8. In the third example, the L-shaped structure reached an optimal solution of 155.0 in just 32 seconds, significantly faster than the conventional method, which took 1937 seconds for a value of 172.2. Overall, the two-phase methodology consistently outperformed the conventional MMC method, highlighting its robustness and potential for broader applications in structural optimization.

4- Conclusion

This research introduces a two-phase structural optimization approach to enhance the convergence speed and outcomes of the Moving Morphable Components method, addressing the challenges posed by its non-convex nature. In the first phase, an optimal structural layout is obtained through layout optimization, which is computationally efficient and serves as a robust starting point for the MMC method. The effectiveness of this approach is validated through numerical examples, showing significant improvements in both convergence speed and optimality compared to conventional MMC methods. Results indicate that the two-phase approach consistently yields better objective function values and reduced optimization computational times. The observed rapid convergence is attributed to starting near the optimal solution and applying tighter constraints on specific design variables, resulting in more manufacturable topologies and less need for post-processing.

References

[1] L. Vandenberghe, S. Boyd, Convex optimization, Cambridge University Press Cambridge, 2004.

[2] A.G.M. Michell, LVIII. The limits of economy of material in frame-structures, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 8(47) (1904) 589-597.

[3] W. Dorn, R.E. Gomory, H. Grenberg, Automatic design of optimal structures, (1964).

[4] M. Gilbert, A. Tyas, Layout optimization of large-scale pin-jointed frames, Engineering computations, 20(8) (2003) 1044-1064.

[5] L. He, M. Gilbert, X. Song, A Python script for adaptive layout optimization of trusses, Structural and Multidisciplinary Optimization, 60 (2019) 835-847.

[6] W. Zhang, J. Yuan, J. Zhang, X. Guo, A new topology optimization approach based on Moving Morphable Components (MMC) and the ersatz material model, Structural and Multidisciplinary Optimization, 53 (2016) 1243-1260.

[7] X. Guo, W. Zhang, W. Zhong, Explicit feature control in structural topology optimization via level set method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 272 (2014) 354-378.

[8] J.A. Norato, B.K. Bell, D.A. Tortorelli, A geometry projection method for continuum-based topology optimization with discrete elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 293 (2015) 306-327.

[9] C. Liu, Y. Zhu, Z. Sun, D. Li, Z. Du, W. Zhang, X. Guo, An efficient moving morphable component (MMC)-based approach for multi-resolution topology optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization, 58 (2018) 2455-2479.

[10] Z. Du, T. Cui, C. Liu, W. Zhang, Y. Guo, X. Guo, An efficient and easy-to-extend Matlab code of the Moving Morphable Component (MMC) method for three-dimensional topology optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization, 65(5) (2022) 158.

[11] T. Cui, Z. Du, C. Liu, Z. Sun, X. Guo, Explicit topology optimization with moving morphable component (MMC) introduction mechanism, Acta Mechanica Solida Sinica, 35(3) (2022) 384-408.

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، دوره ۵۷، شماره ۱، سال ۱۴۰۴، صفحات ۶۳ تا ۸۸
DOI: 10.22060/ceej.2025.22091.7906

توپولوژی بهینه‌ی سازه‌ها با استفاده از برنامه‌ریزی خطی و رویکرد اجزا متحرک شکل‌پذیر

امین لطفعلیان، پیمان اسماعیل‌پور، میثم تکلوزاده*

گروه مهندسی راه، ساختمان و محیط زیست، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۴۰۲/۱۰/۲۷
بازنگری: ۱۴۰۳/۰۷/۰۷
پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۱۰
ارائه آنلاین: ۱۴۰۳/۱۰/۱۸

کلمات کلیدی:
بهینه‌یابی توپولوژی
بهینه‌یابی طرح
برنامه‌ریزی خطی
اجزا متحرک شکل‌پذیر
ساخت افزودنی

خلاصه: اجزا متحرک شکل‌پذیر رویکردی جدید و کارا در بهینه‌یابی توپولوژی سازه‌ها می‌باشد. این روش نسبت به سایر روشهای بهینه‌یابی توپولوژی مانند روشهای مبتنی بر چگالی و همچنین روشهای مبتنی بر سطح تراز مزیتهایی دارد. از جمله‌ی این مزیتها، تعداد کمتر متغیرهای طراحی و تعریف مرزهای سازه‌ی بهینه به صورت صریح می‌باشد. با این حال توپولوژی نهایی به دست آمده از این روش، عموما وابستگی زیادی به چیدمان و شکل اولیه‌ی اجزا دارد. از طرف دیگر، روش بهینه‌یابی طرح مبتنی بر تحلیل پلاستیک، با استفاده از برنامه‌ریزی خطی، طرح بهینه‌ی کلی را در زمان کمی به دست می‌آورد. طرح به دست آمده تنها شامل مساحت اعضا می‌شود و جزئیاتی مانند توپولوژی سازه در محل اتصال المانها را شامل نمی‌شود. می‌توان نشان داد که طرح بهینه‌ی به دست آمده از روش بهینه‌یابی طرح با تحلیل پلاستیک، معادل طرح بهینه‌ی به دست آمده از بیشینه کردن سختی در تحلیل الاستیک است. با استفاده از این ایده، تحقیق حاضر به ارائه‌ی روشی دو مرحله‌ای برای استفاده از مزایا و جبران کمبودهای این دو روش می‌پردازد. برای این منظور در مرحلهی اول، از بهینه‌یابی طرح با تابع هدف و قیود خطی استفاده می‌شود و جواب بهینه‌ی کلی در زمان کوتاهی به دست می‌آید. سپس جواب به دست آمده به عنوان نقطه‌ی شروع به رویکرد اجزا متحرک شکل‌پذیر داده می‌شود تا با بهینه کردن شکل و موقعیت اجزا، طرح نهایی بهینه به دست آید. در این مطالعه، سه مسئله نمونه با استفاده از رویکرد معمول اجزا متحرک شکل‌پذیر و رویکرد دو مرحله‌ای پیشنهادی حل و نتایج مقایسه شده‌اند. در مسئله اول، مقدار تابع هدف از ۱۲۹/۶ نیوتن‌متر در رویکرد معمول به ۱۲۸/۸ نیوتن‌متر در رویکرد پیشنهادی کاهش یافته و زمان بهینه‌یابی نیز از ۹۸۶ ثانیه به ۵۸۹ ثانیه رسیده است. در مسئله دوم، مقدار تابع هدف از ۲۳۷/۸ نیوتن‌متر به ۲۱۱/۰ نیوتن‌متر کاهش یافته و زمان حل از ۳۴۸۲ ثانیه به ۵۸۷ ثانیه کاهش پیدا کرده است. در مسئله سوم نیز مقدار تابع هدف از ۱۷۲/۲ نیوتن‌متر به ۱۵۵/۰ نیوتن‌متر بهبود یافته و زمان حل نیز از ۱۹۳۷ ثانیه به تنها ۳۲ ثانیه کاهش یافته است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج به دست آمده نشاندهندهی سرعت بالای این روش و همچنین توپولوژیهای بهینه‌تر نسبت به رویکرد معمول اجزا متحرک شکل‌پذیر می‌باشد.

۱– مقدمه

بهینه‌یابی توپولوژی در کنار بهینه‌یابی شکل و بهینه‌یابی اندازه، یکی از شاخه‌های بهینه‌یابی سازه‌ها می‌باشد. هدف از بهینه‌یابی توپولوژی در سازه‌ها به دست آوردن توزیع بهینه‌ی مواد در فضای طراحی برای بیشینه کردن کارایی سازه می‌باشد. بیشینه کردن کارایی سازه می‌تواند به صورت مسائل مختلف مانند بیشینه کردن سختی، کمینه کردن تنش بیشینه، کمینه کردن فرکانس مدهای مختلف و غیره تعریف شود. امروزه بهینه‌یابی توپولوژی از تحقیقات دانشگاهی فراتر رفته و نقش پررنگ و رو به رشدی در صنعت دارد. بسیاری از نرم‌افزارهای تجاری تحلیل و طراحی سازه‌ها، گزینه‌ی به دست آوردن توپولوژی بهینه را نیز به قابلیت‌های خود افزوده‌اند. همچنین با توسعه‌ی روش‌های ساخت افزودنی[1] و افزایش قابلیت ساخت توپولوژی‌های پیچیده‌تر، این شاخه کاربرد بیشتری در صنعت پیدا کرده است.

بهینه‌یابی توپولوژی در محیط پیوسته با روش همگن‌سازی[2] [۱] معرفی و در ادامه با روش‌های مبتنی بر چگالی [۲] و روش‌های مبتنی بر سطوح تراز[3] [۳] توسعه پیدا کرد. در روش‌های مبتنی بر چگالی، توپولوژی سازه با به

1. Additive manufacturing
2. Homogenization method
3. Level set

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: takalloozadeh@shirazu.ac.ir

دست آوردن چگالی اختصاص داده شده به هر المان در مدل المان محدود دامنه‌ی طراحی تعیین می‌شود. مثلا در روش مواد همسانگرد جامد با جریمه [1] [۴] چگالی یک برای المان به معنی وجود ماده در المان و به همین ترتیب چگالی صفر به معنی عدم وجود ماده در المان است. در روش‌های مبتنی بر سطح تراز، توپولوژی با به دست آوردن مقدار تابعی اسکالر در نقاط مختلف فضا تعیین می‌شود. مقدار مثبت تابع نشان‌دهنده‌ی وجود ماده و مقدار صفر مرز سازه را نشان می‌دهد. خواننده برای آشنایی بیشتر در این زمینه می‌تواند به مقالات مروری [۵-۷] و یا کتاب [۸] مراجعه نماید.

تمامی این روش‌ها با چالش‌هایی از جمله مشکلات همگرایی، نیاز به محاسبات پیچیده، و وابستگی توپولوژی بهینه به توپولوژی اولیه روبه‌رو هستند. این پژوهش در پاسخ به این چالش‌ها، رویکردی دو مرحله‌ای را برای یکی از روش‌های بهینه‌یابی توپولوژی با عنوان روش اجزا متحرک شکل‌پذیر معرفی می‌کند. در ادامه توضیحاتی در مورد این روش نسبتا جدید در بهینه‌یابی توپولوژی آورده شده است.

۱- ۱- رویکرد اجزا متحرک شکل‌پذیر [2] (MMC)

در رویکردی نسبتا جدید تحت عنوان اجزا متحرک شکل‌پذیر، توپولوژی سازه با به دست آوردن موقعیت و شکل بهینه‌ی تعدادی جزء مشخص می‌شود (شکل ۱). این شکل نشان می‌دهد که اجزا با شکل اولیه‌ی دلخواه (شکل ۱-ب)، در طی فرآیند بهینه‌یابی تغییر شکل و موقعیت می‌دهند تا توپولوژی بهینه‌ی سازه (شکل ۱-ت) را ایجاد کنند.

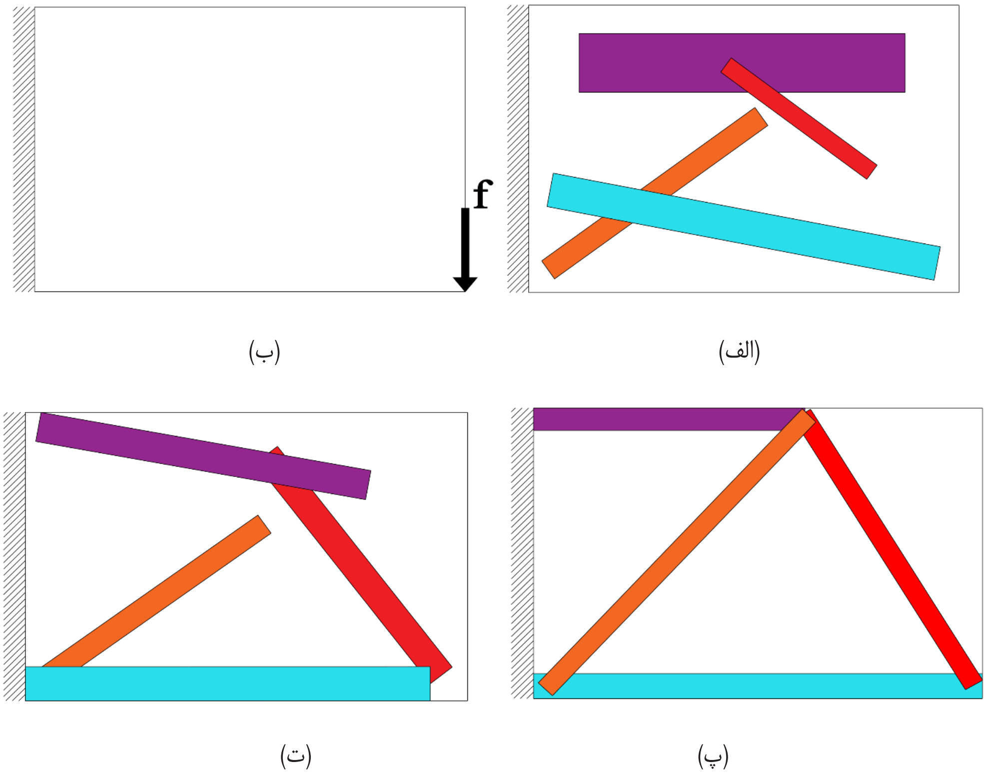
شکل اجزا مشابه روش مبتنی بر سطوح تراز با یک تابع اسکالر که در دامنه‌ی طراحی تعریف شده است، به دست می‌آید. بر خلاف روش سطوح تراز، این تابع به شکل تحلیلی و به صورت صریح [3] تعریف می‌شود که مزیت عمده‌ای در فرایند ساخت طرح نهایی می‌باشد. فرایند بهینه‌یابی توپولوژی با بهینه‌یابی شکل این اجزا، به همراه به دست آوردن موقعیت بهینه‌ی اجزا انجام می‌شود [۹, ۱۰]. از این دیدگاه، این رویکرد پلی بین بهینه‌یابی شکل و بهینه‌یابی توپولوژی می‌باشد. همچنین به دست آوردن توپولوژی با این رویکرد این قابلیت را ایجاد می‌کند که بر روی اندازه‌ی المان‌های سازه‌ای به طور مستقیم قید اعمال کرد. فرایندی که در دیگر روش‌های بهینه‌یابی با چالش فراوان همراه است. بنابراین اعمال قید کمانش یا قید بر روی کوچک‌ترین اندازه‌ی المان‌ها و یا قید شیب قسمت‌های مختلف سازه برای در نظر گرفتن قیود ساخت به راحتی امکان‌پذیر است [۱۱]. از دیگر مزیت‌های این رویکرد، تعداد کم متغیرهای طراحی است که به معنی افزایش سرعت فرایند بهینه‌یابی به خصوص در مسائل سه‌بعدی است [۱۲].

در کنار این مزیت‌ها، رویکرد اجزا متحرک شکل‌پذیر دارای محدودیت‌هایی نیز می‌باشد. مسئله‌ی بهینه‌یابی که با این رویکرد حل می‌شود یک مسئله‌ی بهینه‌یابی غیرخطی و غیرمحدب است که با به دست آوردن گرادیان تابع هدف و قیدها و با استفاده از یکی از حلگرهای بهینه‌یابی مانند حلگر روش مجانب متحرک (MMA [4])، پاسخ بهینه به دست آورده می‌شود. بنابراین این روش برای حل، نیاز به طرح اولیه به عنوان نقطه‌ی شروع دارد. یکی از چالش‌ها، وابسته بودن طرح نهایی به دست آمده به طرح اولیه می‌باشد.

برای بهبود این روش راهکارهایی متنوعی پیشنهاد شده است. از جمله می‌توان به کار لئو [5] و همکاران اشاره کرد که با تعداد کمتری از متغیرهای طراحی، نتایج بهینه‌یابی با وضوح بالا [6] را به دست آوردند [۱۳]. اساس این روش، جداسازی قسمت بهینه‌یابی توپولوژی و تحلیل المان محدود است. در تحقیق دیگری دئو [7] و همکاران با بهره بردن از تکنیک تجمیع تابع [8] و تحلیل حساسیت دقیق، سرعت و دقت حل مسائل با رویکرد MMC را به میزان قابل توجهی افزایش دادند. علاوه بر این، بر اساس یک الگوریتم شناسایی مسیر انتقال بار، درجات آزادی که به مسیر انتقال بار تعلق ندارند، در تحلیل المان محدود حذف شده‌اند. این امر به طور قابل توجهی روند بهینه‌یابی را تسریع می‌کند [۱۴]. لئی [9] و همکاران برای بهبود نتایج رویکرد MMC از یادگیری ماشین [10] و چارچوب مبتنی بر تولید رگرسیون برداری پشتیبانی شده [11] و همچنین مدل‌های یادگیری ماشین نزدیک‌ترین همسایه [12]، استفاده کردند [۱۵]. کوی [13] و همکاران الگوریتمی معرفی کردند که در آن توپولوژی سازه با زیادتر شدن تعداد اجزا در حین بهینه‌یابی بهبود می‌یابد. این راهکار منجر به بهبود رویکرد بهینه‌یابی توپولوژی مبتنی بر MMC با کاهش وابستگی به جواب اولیه شده است [۱۶]. در تحقیقی

1. Solid Isotropic Material with Penalization method (SIMP)
2. Moving morphable components (MMC)
3. Explicit

4. Method of moving asymptotes (MMA)
5. Chang Liu
6. High-resolution optimization
7. Zongliang Du
8. Function aggregation technique
9. Xin Lei
10. Machine Learning
11. Support Vector Regression
12. K-Nearest Neighbor
13. Tianchen Cui



شکل ۱. مراحل بهینه‌یابی توپولوژی با رویکرد MMC (الف) دامنه طراحی و شرایط مرزی (ب) اجزا در حالت اولیه (پ) حرکت و تغییر شکل اجزا برای رسیدن به توپولوژی بهینه و (ت) توپولوژی بهینه‌ی نهایی.

Fig. 1. Steps of topology optimization using the MMC approach: (a) design domain and boundary conditions, (b) components in the initial topology, (c) movement and deformation of components to achieve optimal topology, and (d) final optimal topology.

دیگر، گو[۱] و همکاران تابع توصیف متفاوتی برای تعریف اجزا منحنی پیشنهاد دادند. روش پیشنهادی قابلیت مدل‌سازی هندسی بسیار انعطاف‌پذیرتری دارد و بهبود قابل‌توجهی در تولید پیکره‌های منحنی در رویکردهای مبتنی بر MMC ایجاد می‌کند [۱۷]. با توجه به این که نتایج به دست آمده از رویکرد MMC تا حدی به انتخاب پارامترهای مرتبط با حلگر مجانب‌های متحرک وابسته است، جیانگ[۲] و همکاران رویکرد تنظیم پارامتر حلگر مبتنی بر یادگیری ماشین را پیشنهاد دادند. این رویکرد بر اساس مرتب‌سازی تصاویر و با الگوریتم بهینه‌یابی ازدحام ذرات[۳] کار می‌کند تا بهترین مقادیر برای پارامترها با توجه به هر مسئله به دست آید [۱۸]. شی[۴] و همکاران با استفاده از قابلیت روش ایزوژئومتریک[۵] و شبکه‌ی بهبودیافته در رویکرد MMC توانستند ضمن افزایش نرخ همگرایی، حجم محاسبات برای به دست آوردن میدان جابه‌جایی را کاهش دهند [۱۹]. شنگ و همکاران با ارائه روشی تحت عنوان FD-MMC[6]، سعی در یکپارچه‌سازی دو حوزه‌ی طراحی ویژگی‌ها و بهینه‌یابی توپولوژی کردند. این رویکرد با تبدیل ویژگی‌های هندسی به اجزای ویژه، امکان دخالت مستقیم این ویژگی‌ها در فرایند بهینه‌یابی را فراهم می‌کند و در نتیجه، طراحی قطعات را بهینه‌تر و منطبق‌تر با نیازهای عملیاتی می‌سازد [۲۰]. به همین ترتیب، زهو و همکاران در پژوهشی دیگر، روشی برای بهینه‌یابی توپولوژی ساختارهای صفحه‌ای با استفاده از MMC ارائه کردند. این روش با استفاده از یک شبکه تیری و ماژول حذف تطبیقی عناصر، کارایی و دقت فرایند بهینه‌یابی را افزایش داده است [۲۱]. در تحقیقی از شنون و همکاران، روشی برای طراحی بهینه سازه‌ها ارائه شده است که با استفاده از منحنی‌های بِزیر[۷]، به طراحان اجازه می‌دهد تا با انعطاف‌پذیری

1. Xu Guo
2. XinchaoJiang
3. Particle Swarm Optimization
4. Xianda Xie
5. Isogeometric

6. Feature-driven
7. Bézier curve

بیشتری شکل‌های هندسی را تعریف کنند. این رویکرد به بهبود طراحی قطعات متحرک منجر شده و به طراحان امکان می‌دهد تا با آزادی بیشتر، به طراحی‌های بهینه‌تری دست یابند [۲۲]. موارد بالا بخشی از تلاش‌هایی بود که در سال‌های اخیر برای بهبود رویکرد اجزا متحرک شکل‌پذیر انجام شده است. جزئیات این رویکرد در بخش ۳-۲ آورده شده است.

۱- ۲- بهینه‌یابی طرح

از اولین تحقیقات در زمینه‌ی بهینه‌یابی سازه‌ها می‌توان به کار میشل در سال ۱۹۰۴ اشاره کرد [۲۳]. میشل شرطی را برای بهینگی سازه‌ی ساخته شده از المان‌های با اتصال مفصلی (که امروزه خرپا نامیده می‌شوند) ارائه کرد که شرط بهینگی میشل[۱] نامیده می‌شوند. بر طبق این شرط، در یک سازه‌ی بهینه، کرنش مجازی در اعضای با نیروی غیرصفر برابر با عکس تنش مجاز در آن المان است. برای سال‌ها اهمیت این تحقیق در حوزه‌ی بهینه‌یابی سازه‌ها مغفول مانده بود. در سال ۱۹۶۴، دُرن[۲] فرمول‌بندی‌ای بر اساس طراحی پلاستیک[۳] سازه برای بهینه‌یابی سازه‌ها ارائه کرد که به سازه‌های بهینه میشل همگرا می‌شود [۲۴]. اهمیت این روش در خطی بودن توابع هدف و قیدها می‌باشد که به معنی محدب بودن مسئله‌ی بهینه‌یابی و همچنین قابلیت حل آن با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی مانند روش سیمپلکس [۲۵] است که در آن زمان به خوبی توسعه یافته بود. بعدها روش طراحی بهینه‌ی پلاستیک برای مسائل با ترکیبات بارگذاری مختلف و همچنین در نظر گرفتن بار وزن توسعه یافت [۲۶]. همچنین برای جلوگیری از همگرایی مسئله به سازه‌ی میشل که سازه‌ای شامل المان‌های زیاد و کوتاه و بنابراین با هزینه‌ی ساخت بالا است، روشی ساده مبتنی بر در نظر گرفتن جریمه برای تعداد المان‌های سازه‌ای به نام هزینه‌ی گره[۴] معرفی شد [۲۷].

یکی از مشکلات بهینه‌یابی طرح[۵] که استفاده از این روش در مسائل واقعی را با چالش رو به رو می‌کرد، محدودیت در ابعاد مسئله است. تعداد المان‌ها در سازه‌ی زمینه[۶] با توان دو تعداد گره‌ها متناسب است، بنابراین در مسائل با تعداد گره بالا از جمله مسائل سه‌بعدی، نیاز به اختصاص حافظه‌ی زیاد برای حلگر و همچنین نیاز به زمان بالایی برای محاسبات وجود دارد. در سال ۲۰۰۳، گیلبرت[۷] و همکاران [۲۸] روشی موسوم به رویکرد اضافه کردن اعضا[۸] را معرفی کردند. در این روش، ابتدا مسئله با سازه‌ی زمینه‌ای با تعداد المان کم حل می‌شود و سپس با به دست آوردن کرنش‌های مجازی در تمام اعضایی که بالقوه می‌توانند وجود داشته باشند، اعضا جدید به سازه‌ی زمینه اضافه و مسئله‌ی خطی بار دیگر حل می‌شود. این کرنش‌ها از پاسخ‌های مسئله‌ی همزاد[۹] برنامه‌ریزی خطی به دست می‌آیند و بنابراین نیاز به محاسبات اضافه‌ای برای به دست آوردن آنها نیست. خواننده برای اطلاعات بیشتر می‌تواند به مقالات [۲۸, ۲۹] و یا به برنامه‌ی تحت وبی که اخیرا برای بهینه‌یابی طرح در سازه‌های دو بعدی توسعه داده شده است [۳۰]، مراجعه نماید.

در تمام این پیشرفت‌ها، فرمول‌بندی مسئله همچنان خطی باقی می‌ماند. طرح بهینه، تابع تعداد گره‌ها در سازه‌ی زمینه و همچنین مکان قرارگیری آنها است. برای به دست آوردن طرحی بهینه‌تر، می‌توان موقعیت گره‌ها را نیز به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفت. در این صورت مسئله‌ی بهینه‌یابی دیگر خطی نیست و می‌توان نشان داد که نقاط بهینه‌ی محلی زیادی در فضای بهینه‌یابی وجود دارد [۳۱]. با این حال با استفاده از روش‌های مرتبه اول (و یا مرتبه دو) بهینه‌یابی مبتنی بر مشتق اول (و یا دوم) تابع هدف و قیدها و حل مسئله با نقطه شروع به دست آمده از برنامه‌ریزی خطی، می‌توان در مدت کوتاهی پاسخ بهینه‌ی مسئله‌ی غیرخطی را به دست آورد.

در بهینه‌یابی طرح پلاستیک، فرض رفتار مواد، رفتار صلب-پلاستیک[۱۰] است و تنها قید تعادل نیروها در گره‌ها در مسئله اعمال می‌شود، بنابراین سازگاری جابجایی‌ها لزوما برقرار نمی‌باشد. در طرف دیگر، مسئله‌ی بهینه‌یابی طرح الاستیک[۱۱] قرار دارد که رابطه‌ی تعادل با استفاده از روابط المان محدود و در نتیجه جابجایی گره‌ها نوشته می‌شود و قید تنش بر روی المان‌ها اعمال می‌شود. در کنار غیرخطی بودن این مسئله، مشکل اصلی این رویکرد تکینگی یا توپولوژی‌های تکینه[۱۲] است که در مسائل بهینه‌یابی اندازه، شکل و توپولوژی سازه‌ها با قید تنش وجود دارد [۳۲]. بنابراین روش‌های عددی عموما به نقطه بهینه همگرا نمی‌شود. این مشکلات محاسباتی در مسائل با چندین حالت بارگذاری به مراتب بیشتر است [۳۳]. می‌توان نشان داد که در مسائلی که تنها یک حالت بارگذاری وجود دارد، طرح بهینه‌ی الاستیک و پلاستیک مشابه خواهند بود [۳۴].

در زمینه‌ی بهینه‌یابی توپولوژی خرپاها تحقیقاتی به زبان فارسی نیز

1. Michell’s optimality criteria
2. Dorn
3. Plastic design
4. Joint cost
5. Layout optimization
6. Ground structure
7. Gilbert
8. Adding member scheme
9. Dual
10. Rigid-plastic relationship
11. Elastic layout optimization
12. Singular topologies

منتشر شده است که در ادامه به تعدادی از آنها اشاره می‌شود. در سال ۱۳۷۵ بهینه‌یابی توپولوژی خرپاهای مستوی توسط قربانی زاویه‌جکی [۳۵] مورد مطالعه قرار گرفت. در این پژوهش از مفاهیم برنامه‌ریزی ریاضی برای کمینه کردن وزن خرپا استفاده شده است. فرمول‌بندی سه مسئله بهینه‌یابی خرپا با هندسه ثابت، بهینه‌یابی هندسه خرپا و بهینه‌یابی توپولوژی آنها بر اساس دو روش سختی و نرمی ارائه شده است. برای حل مسئله، ضمن اشاره به روش‌های کلی حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی، استفاده از دو روش برنامه‌ریزی خطی متوالی و بهینه‌یابی در دو فضای طراحی مجزا مورد توجه قرار گرفته است. ملکی‌فرد [۳۶] از روش الگوریتم اجتماع ذرات برای بهینه‌یابی توپولوژی خرپاها استفاده کرد. در این پژوهش، روش ارائه شده بر اساس عملکرد تنش و جهت طراحی توپولوژی با تنش حداکثر سازه‌های خرپایی در محدوده رفتار خطی می‌باشد. بهینه‌یابی اندازه، شکل و توپولوژی سازه‌های خرپایی تحت بارهای دینامیکی توسط تیاره [۳۷] مورد مطالعه قرار گرفت. در این مطالعه، بهینه‌یابی فاخته و الگوریتم جستجوی فاخته برای حل مسائل به کار گرفته شده است. قیدهای درنظر گرفته شده برای این مسئله، قید فرکانس طبیعی و قید پاسخ دینامیکی می‌باشد. نوروزعلی‌زاده شیرازی [۳۸] با استفاده از روش بهینه‌یابی اجتماع زنبورهای عسل به بهینه‌یابی خرپاهای سه‌بعدی پرداخته است. سازه‌های مورد بررسی در این مطالعه شبکه‌های دولایه می‌باشند. برای دستیابی به پاسخ بهتر، الگوریتم اجتماع زنبورهای عسل مصنوعی بهبود داده شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که روش بهبود یافته می‌تواند جواب‌های بهتری در بهینه‌یابی توپولوژی ساختمان‌های اسکلتی بزرگ نسبت به روش‌های دیگر پیدا کند. بهینه‌یابی توپولوژی خرپاها با روش تقریب سازگار توسط صدر [۳۹] مورد بررسی قرار گرفت. تابع هدف در نظر گرفته شده در این پژوهش وزن سازه و قیدهای در نظر گرفته شده، قیدهای تنش مجاز کششی و فشاری، جابه‌جایی در گره‌ها و پایداری سازه می‌باشد.

در این پژوهش، روشی دومرحله‌ای برای بهبود روند همگرایی رویکرد MMC و افزایش دقت و سرعت فرایند بهینه‌یابی در این روش پیشنهاد شده است. نوآوری اصلی این تحقیق در استفاده از روش بهینه‌یابی طرح و برنامه‌ریزی خطی برای تعیین نقطه‌ی شروع مناسب در رویکرد اجزا متحرک شکل‌پذیر است. در مسائلی که تنها یک حالت بارگذاری وجود دارد، کمینه کردن انرژی کرنشی در بهینه‌یابی توپولوژی، معادل کمینه کردن وزن در بهینه‌یابی طرح پلاستیک است که از این ایده به‌عنوان پایه‌ای برای توسعه‌ی روش پیشنهادی استفاده شده است. پس از تعریف دقیق مسئله و ارائه‌ی مدل ریاضی در بخش ۲، جزئیات رویکرد دو مرحله‌ای در بخش ۳ شرح داده شده است. گام‌های این مطالعه شامل برنامه‌نویسی جهت توسعه‌ی مدلی مبتنی بر روش MMC و انجام آزمایش‌های عددی برای ارزیابی کارایی و دقت روش پیشنهادی است که نتایج مربوطه در بخش ۴ آورده شده است. در این بخش با مقایسه‌ی نتایج رویکرد معمول و رویکرد دومرحله‌ای در حل چندین مثال، به مزایای رویکرد پیشنهادی نسبت به رویکردهای معمول می‌پردازد و نشان می‌دهد که این روش می‌تواند به‌طور موثرتری در بهینه‌یابی توپولوژی سازه‌ها مورد استفاده قرار گیرد.

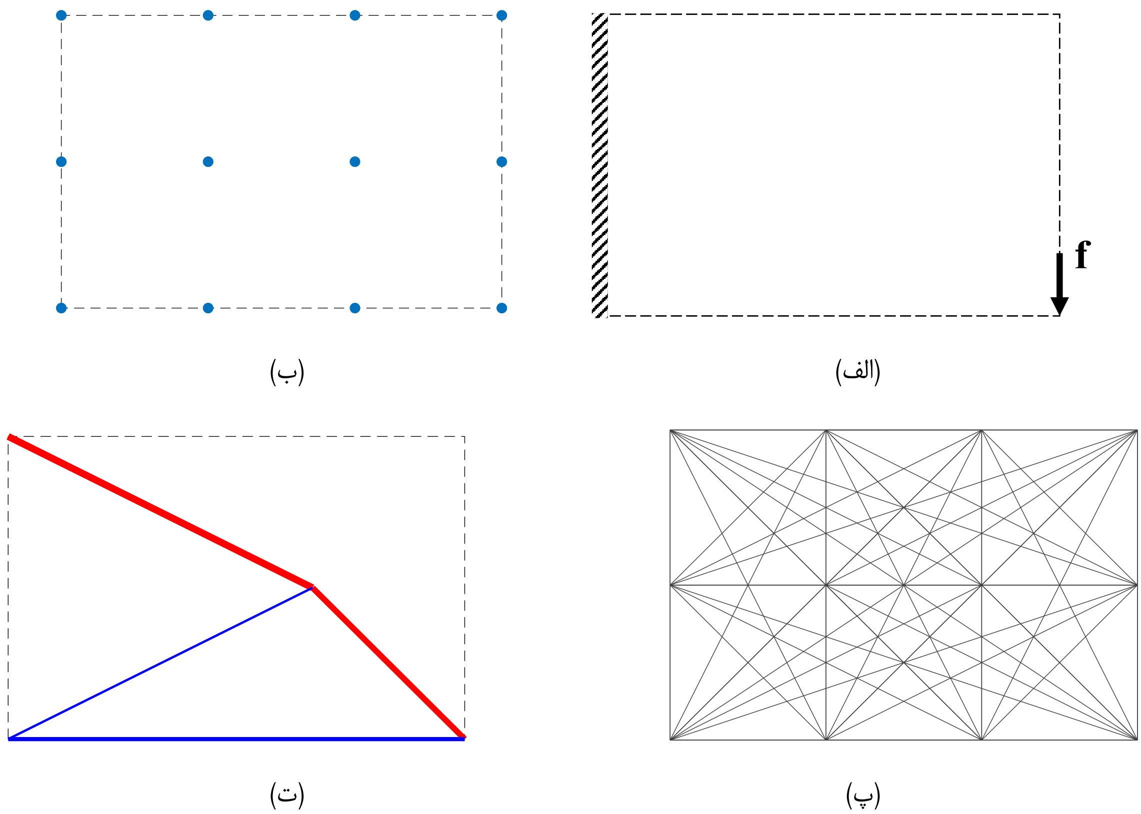
۲- بیان ریاضی مسئله

۲- ۱- بهینه‌یابی طرح

فرایند بهینه‌یابی طرح، با تعریف دامنه و شرایط مرزی مسئله شروع می‌شود (شکل ۲-الف). سپس دامنه‌ی طراحی با استفاده از تعدادی گره گسسته‌سازی می‌شود (شکل ۲-ب) و المان‌هایی بین تمام گره‌ها تعریف می‌شود که بالقوه می‌توانند در سازه بهینه وجود داشته باشند. این المان‌ها سازه‌ی زمینه را می‌سازند (شکل ۲-پ). در نهایت سازه‌ی بهینه (شکل ۲-ت) با حل مسئله‌ی بهینه‌یابی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\text{Find}\ \ \mathbf{A},\mathbf{q}\\
&\min\ \ V=\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\\
&\text{subject to:}\\
&\mathbf{Bq}=\mathbf{f}\\
&-\sigma^{-}\mathbf{A}\le\mathbf{q}\le\sigma^{+}\mathbf{A}\\
&0\le\mathbf{A}
\end{aligned}\qquad (۱)$$

در رابطه بالا، V حجم سازه، $\mathbf{A}=\left[A_1,A_2,...,A_m\right]^{\mathrm{T}}$ برداری شامل مساحت تمام m عضو تعریف‌شده در سازه‌ی زمینه، $\mathbf{q}=\left[q_1,q_2,...,q_m\right]$ بردار بیان‌کننده‌ی مقدار نیرو در این اعضا و $\mathbf{L}=\left[L_1,L_2,...,L_m\right]^{\mathrm{T}}$ بردار طول اعضا است. در مسائل دوبعدی، $\mathbf{B}$ ماتریس تعادل با ابعاد $2n\times m$ است که در آن n تعداد گره‌ها در سازه‌ی زمینه می‌باشد. همچنین $\mathbf{f}$ بردار نیروی اعمالی به گره‌ها و σ^{-} و σ^{+} به ترتیب تنش مجاز فشاری و کششی در اعضا می‌باشد. درایه‌های ماتریس تعادل برای هر المان از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:



شکل ۲. مراحل حل مسئله‌ی بهینه‌یابی طرح، (الف) دامنه‌ی طراحی، (ب) گسسته‌سازی دامنه‌ی طراحی با گره‌ها، (پ) سازه‌ی زمینه و (ت) طرح بهینه (اعضای فشاری با رنگ آبی و المانهای کششی با رنگ قرمز نشان داده شده‌اند)

Fig. 2. Stages of solving the layout optimization problem: (a) design domain, (b) discretization of the design domain using nodes, (c) ground structure, and (d) optimal design (compressive members are shown in blue and tensile elements in red)

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} -\dfrac{x_i^e - x_i^s}{L_i} & -\dfrac{y_i^e - y_i^s}{L_i} & \dfrac{x_i^e - x_i^s}{L_i} & \dfrac{y_i^e - y_i^s}{L_i} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad (۲)$$

که در آن $\begin{bmatrix} x_i^s & y_i^s \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} x_i^e & y_i^e \end{bmatrix}$ به ترتیب مختصات گره‌های ابتدا و انتهای المان iام می‌باشند. نهایتا با سر هم کردن[۱] بردارهای بالا برای تمام اعضا، ماتریس $\mathbf{B}$ به دست می‌آید. در رابطه‌ی تعادل(**Bq=f**)، بایستی سطرهای متناظر با درجات آزادی مقید را به دلیل مجهول بودن نیروهای تکیه‌گاهی حذف کرد.

برای حل مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی بالا و به دست آوردن طرح بهینه‌ی نشان داده شده در شکل ۲–ت، حلگرهای متفاوتی وجود دارد. در این تحقیق از حلگر رایگان MOSEK استفاده شده است که از روش کارای Interior point برای حل مسئله استفاده می‌کند [۴۰, ۴۱].

در حل مسئله‌ی بهینه‌یابی طرح، عموما توزیع گره‌ها به صورت یکنواخت و با فواصل مساوی انجام می‌شود تا کل دامنه‌ی طراحی پوشش داده شود. همچنین لازم است تا در تکیه‌گاه و محل اعمال بار، گره‌هایی وجود داشته باشد. افزایش تعداد گره‌ها در دامنه‌ی طراحی، منجر به طرحی بهینه‌تر می‌شود اما باعث افزایش توانی تعداد المان‌ها و در نتیجه افزایش شدید حجم و زمان محاسبات می‌شود. بنابراین تعداد گره‌ها بایستی با توجه به دقت مورد نیاز و محدودیت‌های محاسباتی انتخاب شود. برای کاهش مشکل محاسبات در مسائل با تعداد گره بالا، روشی پیشنهاد شده که در بخش بعد به آن پرداخته شده است.

1. Assembly

۲- ۲- مسائل با درجه‌ی آزادی بالا

در صورتی که n تعداد گره‌های موجود در دامنه‌ی مسئله باشد، تعداد المان‌ها در سازه‌ی زمینه برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ خواهد بود. از آنجا که تعداد المان‌ها در سازه‌ی زمینه با توان دوم تعداد گره‌ها رابطه دارد، در مسائل با تعداد گره بالا و به طبع تعداد المان بسیار بالاتر، نیاز به حافظه و زمان تحلیل به سرعت افزایش می‌یابد. این موضوع یک چالش اساسی است که حل اینگونه مسائل را عملا غیرممکن می‌سازد.

راهکار موثری که برای حل این مشکل پیشنهاد شده است، شروع حل مسئله‌ی بهینه‌یابی با تعداد المان کاهش یافته در سازه‌ی زمینه است. سپس کرنش مجازی در تمامی اعضای بالقوه مطابق رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود [۲۹]:

$$\varepsilon_i = \frac{\max\left(\sigma^{+}\mathbf{B}_i\mathbf{u}_i , -\sigma^{-}\mathbf{B}_i\mathbf{u}_i\right)}{L_i} \qquad \left(i = 1,2,\ldots,m\right) \tag{۳}$$

در رابطه‌ی بالا $\mathbf{u}$ بردار جابجایی مجازی است که از حل مسئله‌ی همزاد برنامه‌ریزی خطی به دست می‌آید. انواع حلگرهای برنامه‌ریزی خطی مانند حلگر MOSEK، مقادیر متغیرهای همزاد[1] را نیز به عنوان خروجی مسئله‌ی اصلی می‌دهند و بنابراین برای به دست آوردن این بردار نیاز به حل مسئله‌ی جدیدی نیست. قابل ذکر است که با وجود حل مسئله در سازه‌ی زمینه‌ی با تعداد المان کاهش یافته، بردار $\mathbf{u}$ در تمامی گره‌ها محاسبه شده است و بنابراین کرنش مجازی در تمامی المان‌های سازه‌ی زمینه با تمامی اتصالات ممکن بین گره‌ها قابل محاسبه است. در سازه‌ی بهینه، طبق شرط بهینگی میشل رابطه‌ی $\varepsilon_i \le 1$ برقرار است. بنابراین در مرحله‌ی بعد، بخشی از المان‌های با کرنش مجازی بزرگتر از یک به سازه‌ی زمینه اضافه و دوباره مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی حل می‌شود. این کار تا برقراری شرط بهینگی برای تمام المان‌های سازه‌ی بهینه ادامه پیدا می‌کند. تعداد گام‌ها برای رسیدن به سازه‌ی بهینه، بستگی به تعداد المان‌هایی دارد که در هر مرحله به سازه‌ی زمینه اضافه می‌شود. هر چه این تعداد بیشتر باشد تعداد گام‌ها کمتر خواهد بود ولی زمان به دست آوردن پاسخ در هر گام افزایش خواهد یافت.

۲- ۳- رویکرد اجزا متحرک شکل پذیر (MMC)

همانطور که از نام رویکرد مشخص است، توپولوژی سازه با استفاده از شکل و موقعیت تعدادی جزء تعیین می‌شود. جزء شماره‌ی $\mathbf{j}$ در شکل ۳ را در نظر بگیرید که در دامنه‌ی طراحی مستطیل شکل D، نشان داده شده با خطچین قرار دارد. موقعیت و شکل این جزء در نقطه‌ای دلخواه از دامنه (Q) با مختصات x و y با تابع توصیف توپولوژی[2] $\phi_j\left(x,y\right)$ و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \phi_j\left(x,y\right) > 0 \quad , \quad Q \in \Omega \subset D \\ \phi_j\left(x,y\right) = 0 \quad , \quad Q \in \partial\Omega \\ \phi_j\left(x,y\right) < 0 \quad , \quad Q \in D \setminus \Omega \end{cases} \tag{۴}$$

اگر مقدار تابع ϕ_j در نقطه‌ای در دامنه‌ی طراحی مثبت باشد، آن نقطه جزئی از سازه (Ω) است و اگر برابر با صفر باشد بر روی مرز جزء مورد نظر ($\partial\Omega$) قرار دارد. با محاسبه مقدار تابع فوق برای تمام اجزا در دامنه‌ی طراحی و اجتماع‌گیری از نتایج، توپولوژی سازه به دست می‌آید:

$$\phi\left(x,y\right) = \max\left(\phi_1,\ldots,\phi_k\right) \tag{۵}$$

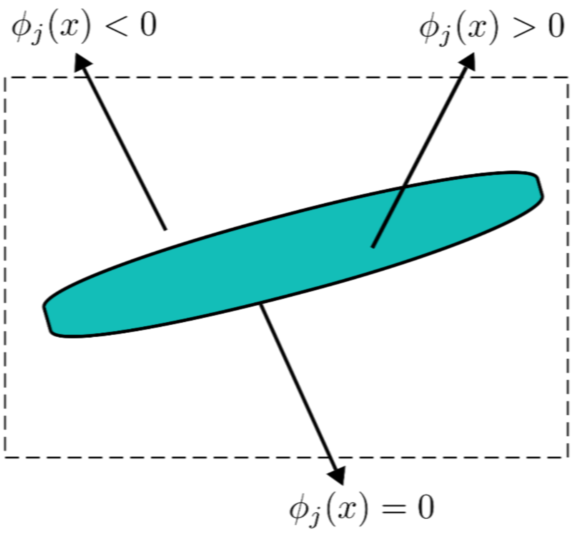
تابع $\phi_j\left(x,y\right)$ به اشکال مختلف قابل تعریف است. هر چه تعداد متغیرها برای تعریف این تابع بیشتر باشد، می‌توان اشکال پیچیده‌تری برای هر جزء داشت و بنابراین توپولوژی منعطف‌تر و بهینه‌تری به دست می‌آید؛ اما این امر به افزایش زمان محاسبات منجر می‌شود. در این تحقیق از رابطه‌ی زیر برای تابع توصیف جزء استفاده شده است:

$$\phi_j\left(x,y\right) = \left(\frac{\bar{x}}{d_j}\right)^p + \left(\frac{\bar{y}}{f\left(\bar{x}\right)}\right)^p - 1 \tag{۶}$$

که در آن p عدد صحیح زوج و بزرگ‌تر از صفری است که در این تحقیق برابر ۶ در نظر گرفته شده است و همچنین:

1. Dual

2. Topology description functions (TDF)



شکل ۳. یک جزء و تابع توصیف آن

Fig. 3. A component and its topological description function

$$\begin{Bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_j & \sin\theta_j \\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x-x_j \\ y-y_j \end{Bmatrix} \tag{۷}$$

و

$$f\left(\bar{x}\right) = \frac{t_{1,j}+t_{2,j}-2t_{3,j}}{2d_j^2}\bar{x}^2 + \frac{t_{2,j}-t_{1,j}}{2d_j}\bar{x} + t_{3,j} \tag{۸}$$

در روابط ۶ تا ۸ شکل جزء شماره‌ی j با هفت متغیر طراحی مختصات مرکز جزء (x_j و y_j)، نصف طول جزء (d_j)، نصف ضخامت ابتدا، انتها و وسط جزء ($t_{1,j}, t_{2,j}, t_{3,j}$) و همچنین زاویه‌ی جزء با افق (θ_j) تعریف می‌شود (شکل ۴). جزء نشان داده شده در این شکل نسبت به محور طولی متقارن است، اما به دلیل تفاوت ضخامت‌های ابتدا و انتها (t_1 و t_3)، نسبت به محور عرضی لزوما متقارن نمی‌باشد. برای هر جزء این متغیرها را می‌توان در بردار متغیر طراحی جزء نوشت:

$$\mathbf{X}_j = \left\{x_j, y_j, d_j, t_{1,j}, t_{2,j}, t_{3,j}, \theta_j\right\} \tag{۹}$$

در روش MMC، برای تحلیل سازه از روش المان محدود استفاده شده و دامنه‌ی طراحی با استفاده از المان‌های چهار گرهی و شبکه مستطیلی منظم گسسته‌سازی شده است. ماتریس سختی هر المان را می‌توان به صورت $\mathbf{k}_e = E_e\mathbf{k}_0$ نوشت که در آن $\mathbf{k}_0$ ماتریس سختی المان در روش المان محدود با فرض مدول یانگ برابر با واحد است. مقدار E_e به وجود یا عدم وجود ماده در گره‌های آن المان بستگی دارد که با علامت تابع $\phi(x,y)$ تعیین می‌شود. بنابراین ابتدا مقدار تابع $\phi(x,y)$ مطابق رابطه‌ی ۵ در گره‌های مدل المان محدود دامنه‌ی طراحی محاسبه می‌شود. سپس برای المان e-ام و با فرض استفاده از المان چهارگرهی، مدول یانگ با میانگین‌گیری و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

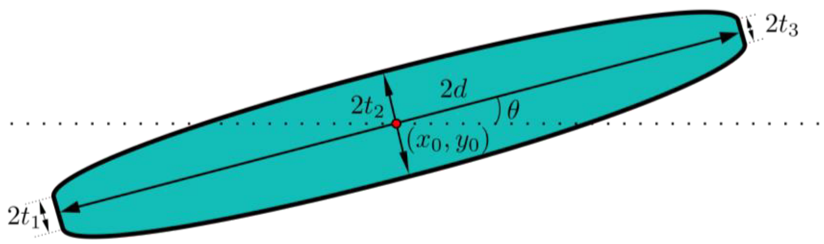
$$E_e = \frac{\sum_{1}^{4}\left(H\left(\phi\right)\right)^2}{4}E_0 \tag{۱۰}$$

در رابطه‌ی بالا E_0 مدول یانگ ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی اجزاء (و سازه) می‌باشد و H تابع پله‌ای هموار شده[1] است که تابع ϕ را به مقدار یک یا صفر برمی‌گرداند:

$$H_\varepsilon\left(x\right) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x > \varepsilon \\ \dfrac{3(1-\delta)}{4}\left(\dfrac{x}{\varepsilon} - \dfrac{x^3}{3\varepsilon^3}\right) + \dfrac{(1+\delta)}{2} & \text{if} \quad -\varepsilon \le x \le \varepsilon \\ \delta & \text{if} \quad x < -\varepsilon \end{cases} \tag{۱۱}$$

هموار بودن تابع پله‌ای آن را مشتق‌پذیر می‌کند. مقادیر δ و ϵ به ترتیب برابر با ۰/۰۰۱ و حداقل چهار برابر کوچکترین بعد یک المان چهار گره‌ای در نظر گرفته شده است. مقدار غیرصفر δ باعث می‌شود که مدول یانگ المان‌هایی که با ماده پوشانده نشده‌اند کوچک ولی غیرصفر به دست آید و

1. Smoothed Heaviside function



شکل ۴. شکل یک جزء و متغیرهای تعریف کننده‌ی آن

Fig. 4. The shape of a component and its description variables.

در نتیجه از مشکلات عددی در حل المان محدود جلوگیری شود. در نهایت ماتریس سختی به دست آمده در هر المان برای محاسبه‌ی ماتریس سختی کل ($\mathbf{K}$) و به دست آوردن میدان جابجایی ($\mathbf{U}$) و در صورت لزوم میدان تنش استفاده می‌شود.

مسئله‌ی بهینه‌یابی با رویکرد MMC به شکل ریاضی به صورت کمینه کردن تابع هدف ψ با پیدا کردن متغیرهای تعریف شکل و موقعیت هر جزء ($\mathbf{X}_j$) و با توجه به قیدهای دیگر، مانند قید حجم نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}&\text{Find } \mathbf{X}=\{\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_2,\ldots,\mathbf{X}_k\}\\&\min\ \psi\\&\text{subject to:}\\&\mathbf{K}(\mathbf{X})\mathbf{U}=\mathbf{F}\\&V(\mathbf{X})\le V^*\\&\mathbf{X}_{\min}\le\mathbf{X}_j\le\mathbf{X}_{\max}\quad j=1,2,\ldots,k\end{aligned} \tag{۱۲}$$

در رابطه‌ی بالا، $\mathbf{F}$ بردار نیرو، $\mathbf{U}$ بردار جابجایی، V^* حجم بیشینه‌ی سازه و نهایتا $\mathbf{X}_{\min}$ و $\mathbf{X}_{\max}$ قیود هندسی بر روی شکل و موقعیت اجزا هستند. از جمله‌ی قیود هندسی می‌توان به منفی نبودن ضخامت و طول اجزا اشاره کرد و همچنین مرکز هر جزء بایستی در دامنه‌ی طراحی (D) قرار داشته باشد.

بیشینه کردن سختی سازه به ازای حجم معینی از مواد، یکی از مسائل کاربردی و یکی از رایج‌ترین توابع هدف در بهینه‌یابی توپولوژی است که می‌توان آن را به شکل کمینه کردن ضریبی از انرژی کرنشی در معادلات وارد کرد: $\psi=\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$. در این تحقیق نیز این تابع هدف در مسئله‌ی بهینه‌یابی در نظر گرفته شده است.

برای حل مسئله‌ی بهینه‌یابی فوق با استفاده از حلگر MMA، نیاز به محاسبه‌ی گرادیان تابع هدف نسبت به متغیر طراحی دلخواه (a) است. گرادیان محاسبه شده، میزان حساسیت تابع هدف به تغییر هر کدام از متغیرهای طراحی مانند شکل و موقعیت اجزا را نشان می‌دهد. جزئیات تحلیل حساسیت فوق در مرجع [۹] آورده شده است که برای دسترسی ساده‌تر خوانندگان، نتیجه‌ی نهایی در ادامه آورده می‌شود:

$$\begin{aligned}&\frac{d\psi}{da}=-\mathbf{u}^T\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial a}\mathbf{u}=\\&-\mathbf{u}^T\left(\frac{E}{2}\left(\sum_{e=1}^{NE}\sum_{i=1}^{4}H(\phi_j^e)\frac{\partial H(\phi_j^e)}{\partial a}\right)\mathbf{k}^s\right)\mathbf{u}\end{aligned} \tag{۱۳}$$

در رابطه‌ی (۱۳)، $\mathbf{k}^s$ بیانگر ماتریس سختی هر المان است که به تابع توصیف توپولوژی وابسته است. همچنین NE تعداد کل المان‌ها در روش اجزای محدود را نشان می‌دهد.

۳- رویکرد پیشنهادی

مسئله‌ی بهینه‌یابی شرح داده شده در بخش قبل، یک مسئله‌ی بهینه‌یابی غیرخطی است. برای حل آن با روش‌های بهینه‌یابی مرتبه‌ی یک، لازم است تا گرادیان تابع هدف و قیدها نسبت به متغیرهای طراحی محاسبه شود. برای مطالعه‌ی جزئیات این محاسبات، خواننده می‌تواند به مرجع [۴۲] مراجعه نماید. بعد از محاسبه‌ی گرادیان‌ها و برای پیدا کردن نقطه‌ی بهینه، از حلگرهای بهینه‌یابی غیرخطی استفاده می‌شود که در این تحقیق، روش مجانب‌های متحرک به کار گرفته شده است. جزئیات این حلگر نیز در مراجع [۴۳, ۴۴] شرح داده شده است.

علاوه بر غیرخطی بودن، چالش اصلی مهم دیگر در مسئله‌ی بهینه‌یابی شرح داده شده، غیرمحدب بودن آن است. در مسائل بهینه‌یابی سازه، عموما

تعدادی از توابع هدف یا قیدها غیرمحدب و در نتیجه مسئله‌ی بهینه‌یابی دارای چندین بهینه‌ی محلی است. این بدین معنا است که در روش‌های مبتنی بر گرادیان، جواب به دست آمده وابستگی زیادی به نقطه‌ی شروع دارد. انتخاب نقطه‌ی شروعی نزدیک به جواب بهینه‌ی کلی تاثیر بسزایی در دقت و همچنین سرعت حل مسئله دارد. رویکرد بهینه‌یابی MMC نیز در حل مسائل مختلف سازه‌ای با این چالش مواجه است. چیدمان، موقعیت و شکل اولیه‌ی اجزا بر توپولوژی نهایی تاثیر فراوانی دارد و گاهی باعث می‌شود الگوریتم به جواب‌های غیربهینه همگرا شود.

از طرفی همانطور که در معادلات ۱ نشان داده شد، مسئله‌ی بهینه‌یابی طرح، مسئله‌ای خطی و محدب است و می‌توان جواب بهینه‌ی کلی مسئله را با دقت و سرعت بالایی به دست آورد. طرح بهینه‌ی به دست آمده از این روش، معادل طرح بهینه‌ی به دست آمده از کمینه کردن انرژی کرنشی در سازه در روش‌های بهینه‌یابی توپولوژی از جمله روش MMC است. اثبات این موضوع در مرجع [۴۵] و همچنین در پیوست این تحقیق آورده شده است. بنابراین می‌توان از این ویژگی استفاده و الگوریتمی دو مرحله‌ای را پیاده‌سازی کرد که در مرحله‌ی اول، مسئله‌ی بهینه‌یابی طرح با شرایط مرزی مشابه مسئله‌ی بهینه‌یابی توپولوژی حل شود. سپس جواب به دست آمده، در مرحله‌ی دوم به عنوان توپولوژی اولیه (نقطه‌ی شروع) در الگوریتم غیرخطی رویکرد MMC مورد استفاده قرار گیرد. با توجه به هم‌ارزی دو مسئله می‌توان انتظار داشت که استفاده از این پاسخ به عنوان نقطه‌ی شروع در روش MMC به همگرایی سریع‌تر مسئله کمک کند و از گیر افتادن مسئله در کمینه‌های محلی جلوگیری کند. برای این منظور نیاز است تا طرح بهینه‌ی به دست آمده از بهینه‌یابی طرح به متغیرهای طراحی روش MMC برگردانده شود. برای برگرداندن جواب بهینه‌ی به دست آمده از مرحله‌ی اول به نقطه‌ی شروع مرحله‌ی دوم، از روابط زیر برای به دست آوردن پارامترهای جزء j–ام از داده‌های المان i–ام سازه‌ی زمینه، استفاده می‌شود:

$$
\begin{aligned}
t_{1,j} &= t_{2,j} = t_{3,j} = \frac{A_i}{thickness} \\
d_j &= \frac{L_i}{2} \\
x_j &= \frac{x_i^s + x_i^e}{2} \\
y_j &= \frac{y_i^s + y_i^e}{2} \\
\sin\theta_j &= \frac{y_i^e - y_i^s}{d_j}
\end{aligned}
\qquad (۱۴)
$$

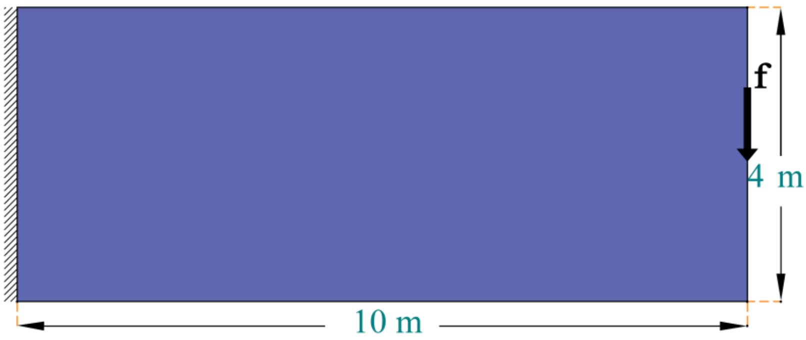
که در آن $thickness$ ضخامت صفحه در تحلیل المان محدود دو بعدی در رویکرد MMC می‌باشد. با توجه به اینکه طرح به دست آمده از مرحله‌ی اول بسیار نزدیک به بهینه‌ی کلی است، در مرحله‌ی دوم می‌توان قیود هندسی $\mathbf{X}_{\min}$ و $\mathbf{X}_{\max}$ را محدودتر انتخاب کرد زیرا توپولوژی سازه نیاز به تغییر چندانی ندارد. این امر مشابه کاهش تعداد متغیرهای طراحی، به افزایش سرعت همگرایی در مرحله‌ی دوم منجر می‌شود. در مثال‌های حل شده در این تحقیق، مقدار تغییر زاویه‌ی هر جزء برابر ۵± درجه‌ی زاویه‌ی اولیه‌ی جزء، نصف طول هر جزء برابر ۱۵± درصد نصف طول اولیه، ضخامت ابتدا، انتها و وسط هر جزء برابر ۵۰± درصد ضخامت اولیه و نهایتا مقدار تغییر موقعیت مرکز هر جزء ضریب کوچکی از طول جزء کوتاه‌تر دامنه در نظر گرفته شده است.

در روش دومرحله‌ای پیشنهادی، محدود کردن فضای بهینه‌یابی با استفاده از طرح و مساحت اعضای به‌دست‌آمده از بهینه‌یابی طرح، مزیتی اساسی است. این محدودیت در اطراف نقطه‌ای نزدیک به نقطه‌ی بهینه در فضای بهینه‌یابی MMC شکل می‌گیرد، زیرا طرح بهینه‌ی مرحله‌ی اول، از حل یک مسئله‌ی محدب با جواب بهینه‌ی کلی به دست آمده است. پاسخ بهینه‌یابی طرح، معادل توپولوژی بهینه با تابع هدف کمینه‌کردن انرژی است. بنابراین، توپولوژی به‌دست‌آمده از این مرحله، نقطه‌ی شروع بسیار مناسبی برای مرحله‌ی دوم بهینه‌یابی غیرمحدب در روش MMC خواهد بود. این نقطه‌ی شروع نزدیک به بهینه‌ی کلی، خطر گرفتار شدن در بهینه‌های محلی غیرمطلوب را کاهش می‌دهد و منجر به همگرایی سریع‌تر و دقت بالاتر در حل مسئله می‌شود.

بنابراین به طور خلاصه، نوآوری این تحقیق افزایش سرعت همگرایی و بهبود پاسخ‌های روش MMC با به دست آوردن نقطه‌ی شروع مناسب می‌باشد که این نقطه‌ی شروع از حل یک مسئله‌ی بهینه‌یابی طرح با شرایط مرزی مشابه مسئله‌ی MMC به دست می‌آید.

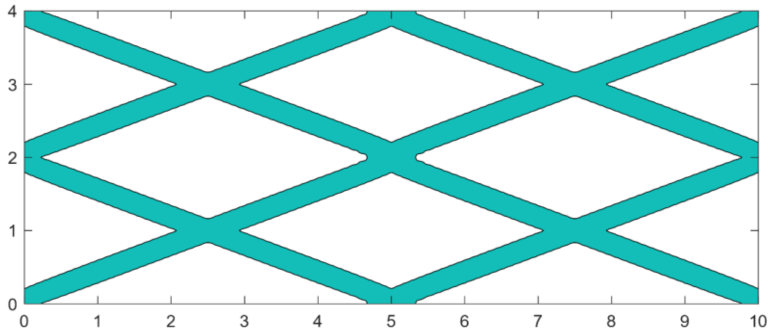
۴- مسائل عددی

برای بررسی کارایی رویکرد پیشنهادی، جزئیات و نتایج حل سه مثال در این قسمت آورده شده است. در تمامی مثال‌ها، نسبت پواسون ۰/۳ و مدول یانگ ۱ $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ می‌باشد. هر سه مثال با هر دو رویکرد معمول MMC و رویکرد دو مرحله‌ای مورد بررسی قرار گرفته‌اند. تمامی مثال‌ها با استفاده از کدنویسی در محیط Matlab2022a حل و برای مقایسه مدت زمان رسیدن به پاسخ در دو رویکرد، همه‌ی مثال‌ها بر روی سیستمی با مشخصات



شکل ۵. دامنه‌ی طراحی و شرایط مرزی مسئله‌ی تیر طره

Fig. 5. The shape of a component and its description variables.



شکل ۶. توپولوژی اولیه در رویکرد MMC

Fig. 6. Initial topology in the MMC approach

Intel(R) Core(TM) i7 6700HQ CPU @ 2.60GHz و 7.90 GB RAM اجرا شده‌اند.

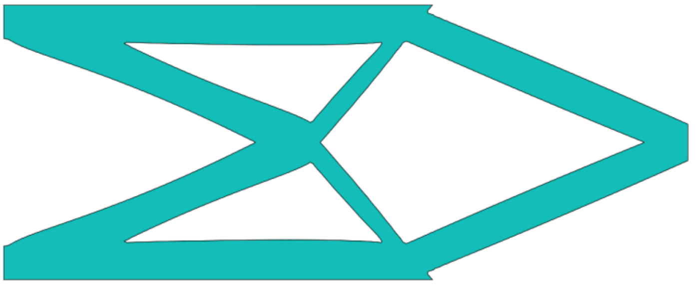
همچنین تمامی مثال‌های مرتبط با روش معمول MMC با استفاده از کد منبع باز[1] که در پیوست مرجع [۹] ارائه شده، حل شده‌اند و تغییری نیز در پارامترهای کد یا حلگر MMC ایجاد نشده است. این کد همچنین در مرحله‌ی دوم بهینه‌یابی در رویکرد دو مرحله‌ای پیشنهادی مورد استفاده قرار گرفته است، بنابراین نتایج این پژوهش به راحتی قابل بازتولید و تأیید توسط سایر پژوهشگران می‌باشد. همچنین انتخاب هندسه و شرایط مرزی مثال‌های مطرح‌شده در این مطالعه، به دلیل شناخته‌شده و مورد استفاده بودن آن‌ها در مقالات معتبر حوزه‌ی بهینه‌یابی توپولوژی بوده است و این امکان را فراهم می‌کند تا نتایج این تحقیق با سایر مطالعات به طور مستقیم مقایسه شوند.

1 Open source

۴- ۱- مسئله‌ی اول

مسئله اول یک تیر طره با طول و ارتفاع به ترتیب برابر ۱۰ و ۴ متر می‌باشد که به میانه لبه سمت راست آن بار متمرکز ۱ نیوتونی اعمال شده و جابه‌جایی‌های لبه سمت چپ آن مقید شده است (شکل ۵). هدف از این مسئله یافتن توپولوژی با سختی بیشینه و حداکثر حجم ۴۰ درصد دامنه طراحی ($V^* = 0.4V_0$) می‌باشد. از آنجا که تعداد اعضای سازه به دست آمده از روش بهینه‌یابی طرح برابر ۸ عضو است، جهت مقایسه هر چه بهتر نتایج در دو رویکرد، تعداد اجزای در نظر گرفته‌شده برای رویکرد معمول MMC نیز برابر ۸ جزء می‌باشد.

برای تمام اجزا ضخامت‌های اولیه (t_1, t_2, t_3) برابر ۰/۱۵ متر و نصف طول اولیه (d) برابر ۳ متر است. زاویه‌ی اجزا با محور افق برابر ۴۵± می‌باشد و فاصله مرکز به مرکز اجزا در راستای افق و قائم به ترتیب برابر ۵ و ۲ متر است. طرح اولیه با پارامترهای ذکر شده در شکل ۶ نشان داده



شکل ۷. توپولوژی بهینه با رویکرد معمول MMC برای مسئله‌ی تیر طره

Fig. 7. Optimal topology using the conventional MMC approach for the cantilever beam problem

شده است. با استفاده از روش معمول MMC تابع هدف کمینه برابر ۱۲۹/۶ نیوتن‌متر و در مدت زمان ۹۸۶ ثانیه محاسبه شد که طرح بهینه آن در شکل ۷ آورده شده است.

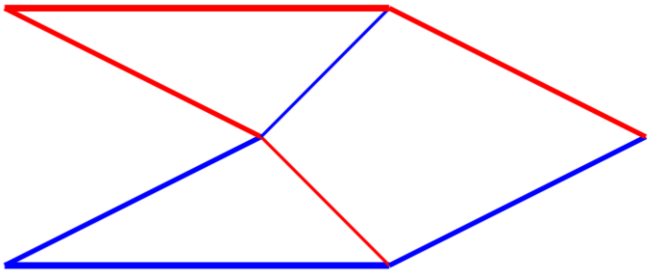
بار دیگر این مسئله با رویکرد دو مرحله‌ای پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفت. در مرحله اول با استفاده از بهینه‌یابی طرح، طرح اولیه برای سازه به دست آمد (شکل ۸–الف). در ادامه، این طرح با استفاده از روابط (۱۴) به طرح اولیه برای روش MMC برگردانده شد (شکل ۸–ب). مقدار تابع هدف در طرح برگردانده شده ۱۳۰/۸ نیوتون متر می‌باشد که با حل مسئله در مرحله‌ی دوم با استفاده از رویکرد MMC، طرح نهایی با تابع هدف کمینه‌ی ۱۲۸/۸ نیوتون متر حاصل شد (شکل ۸–پ). مقایسه‌ی این دو طرح به وضوح نشان می‌دهد که در مرحله دوم بهینه‌یابی، عملکرد سازه بهبود یافته است. توپولوژی نهایی، به مقدار تابع هدف کمتری نسبت به توپولوژی به دست آمده از بهینه‌یابی طرح دست یافته است و توزیع مواد و ضخامت اعضا به خصوص در محل اتصال دو عضو به یکدیگر بهینه‌تر شده است. برای مقایسه بهتر نتایج، در ادامه سیر همگرایی به توپولوژی بهینه برای هر دو روش در شکل ۹ آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود حل مسئله با رویکرد پیشنهادی با یک جواب اولیه که به جواب بهینه نزدیک است و به مراتب از مقدار اولیه روش معمول MMC کمتر می‌باشد شروع می‌شود و در تعداد تکرار بسیار کمتری به جواب بهینه همگرا می‌شود.

کل مدت زمان بهینه‌یابی این رویکرد برای به دست آوردن توپولوژی نشان داده شده در شکل ۸–پ برابر ۵۸۹ ثانیه بود. مقایسه‌ی نتایج دو رویکرد با تعداد جزء برابر و شبکه‌ی المان محدود مشابه، بیانگر سرعت بالاتر و همچنین دقت بیشتر رویکرد دومرحله‌ای در به دست آوردن پاسخ بهینه می‌باشد.

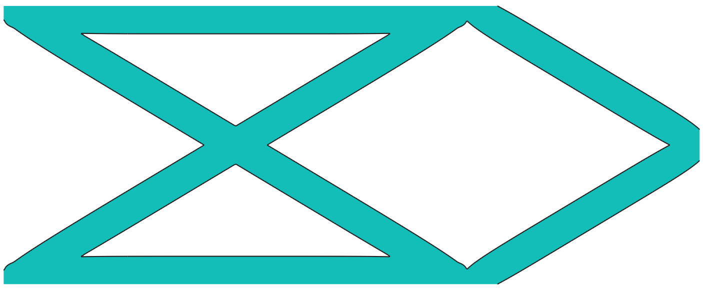
۴– ۲– مسئله‌ی دوم

دومین مثال یک تیر دو سر مفصل با طول و ارتفاع به ترتیب ۷ و ۱ متر می‌باشد که بار واحد (۱ نیوتن) به وسط دهانه آن اعمال شده است (شکل ۱۰). قید حجم برای این مثال برابر۳۰ درصد دامنه طراحی می‌باشد. برای تحلیل سازه دامنه‌ی طراحی به ۸۰×۵۶۰ المان چهار گرهی گسسته‌سازی شده است. در رویکرد معمول MMC، مقادیر اولیه‌ی ضخامت (t_1, t_2, t_3) برابر ۰/۰۴ متر و نصف طول اولیه (d) برابر ۰/۷ متر در نظر گرفته شده است. فاصله‌ی مرکز اجزا ۰/۵ متر و زاویه اولیه ۲۰± درجه می‌باشد. جهت پیوستگی مسیر بار تا تکیه‌گاه، نصف طول تعدادی از اجزا (d) برابر ۰/۹ متر در نظر گرفته شده و قدری مختصات افقی مراکز این اجزا نیز تغییر داده شده است. برای مقایسه رویکرد معمول MMC و رویکرد دومرحله‌ای، در هر دو روش از ۲۴ جزء استفاده شده است.

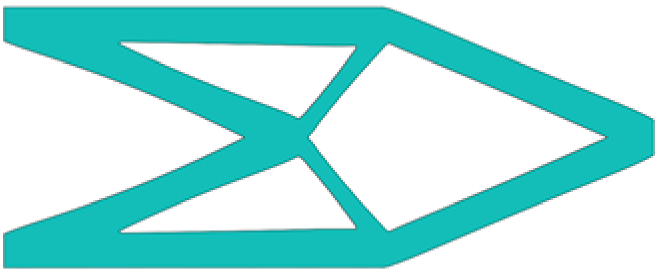
چیدمان بهینه‌ی به دست آمده از رویکرد معمول MMC در شکل ۱۱ نشان داده شده است. همچنین چیدمان بهینه‌ی رویکرد دومرحله‌ای با در نظر گرفتن طرح اولیه‌ی به دست آمده از طرح پلاستیک (شکل ۱۲–الف) در شکل ۱۲–ب نشان داده شده است. با در نظر گرفتن طرح بهینه‌ی پلاستیک به عنوان نقطه‌ی شروع در روش MMC، زمان بهینه‌یابی از ۳۴۸۲ به ۵۸۷ ثانیه و همچنین مقدار تابع هدف از ۲۳۷/۸ به ۲۱۰/۹۸ نیوتن‌متر کاهش یافته است. در این مثال علاوه بر این که رویکرد پیشنهادی زمان حل بسیار کمتری دارد (حدود ۶ برابر)، به وضوح به جواب بهینه‌تری نیز همگرا شده است. با توجه به تقارن هندسه و بارگذاری مسئله، طرح بهینه‌ی به دست آمده از رویکرد معمول (شکل ۱۱) متقارن نیست. همچنین علیرغم ارضا شرط همگرایی، اجزایی در طرح نهایی وجود دارند که پیوستگی کافی با سایر اعضا نداشته و آشکارا عملکرد سازه‌ای ندارند. در رویکرد معمول MMC، با



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۸. (الف) جواب به دست آمده از بهینه‌یابی طرح و (ب) طرح اولیه برگردانده شده از بهینه یابی طرح به روش MMC (پ) توپولوژی بهینه‌ی به دست آمده از رویکرد پیشنهادی در مسئله‌ی تیر طره

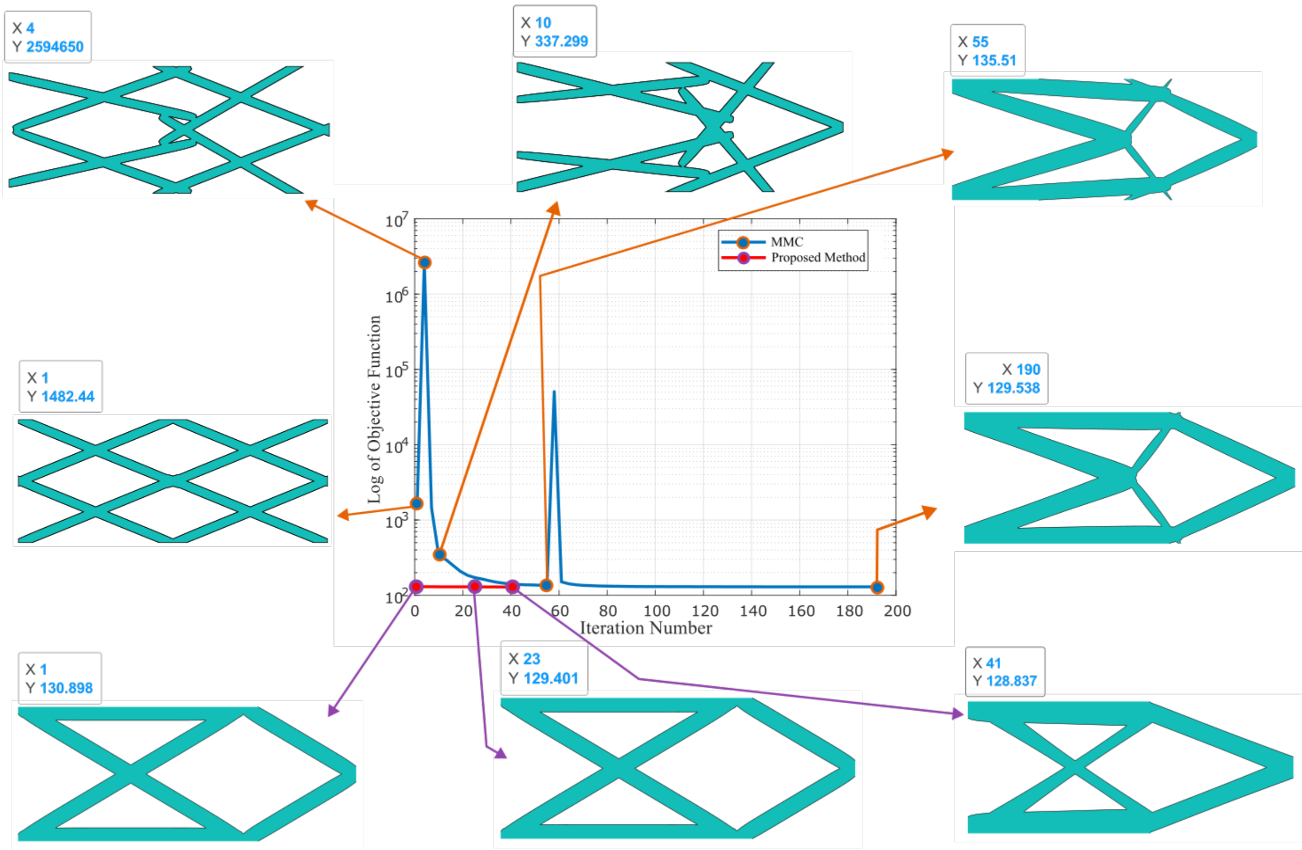
Fig. 8. (a) The solution obtained from the layout optimization, (b) the initial design converted from the layout optimization to the MMC method, and (c) the optimal topology obtained from the proposed approach in the cantilever beam problem

تغییر نقطه‌ی شروع و یا تغییر پارامترهای حلگر MMC، می‌توان پاسخ‌های مناسب‌تری برای این مسئله به دست آورد که فرایندی همراه با سعی و خطا و بسیار زمان‌بر است. هیچ‌کدام از این دو مشکل در رویکرد دومرحله‌ای وجود ندارند.

۴- ۳- مسئله‌ی سوم

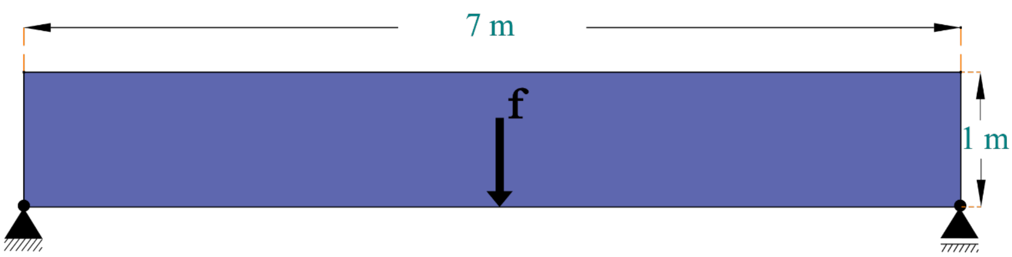
هدف از این مسئله به دست آوردن توپولوژی بهینه‌ی سازه‌ای در دامنه‌ای قلاب‌شکل[1] است که هندسه و شرایط مرزی آن درشکل ۱۳ نشان

1. L-shaped bracket



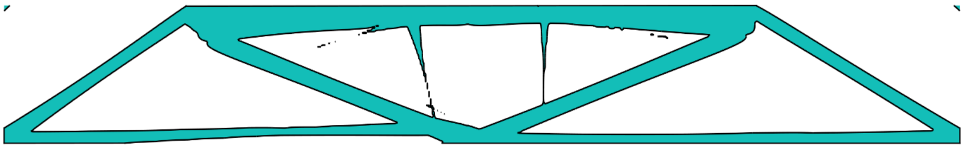
شکل ۹. سیر همگرایی به توپولوژی بهینه برای روش معمول MMC و رویکرد پیشنهادی

Fig. 9. Convergence path to optimal topology for the conventional MMC method and the proposed approach



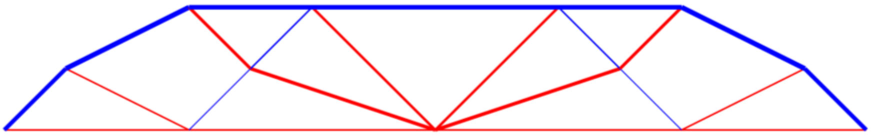
شکل ۱۰. دامنه‌ی طراحی و شرایط مرزی تیر دوسر مفصل

Fig. 10. Design domain and boundary conditions of the simply supported beam

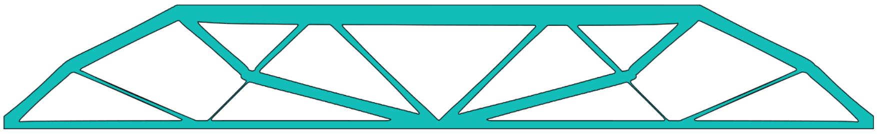


شکل ۱۱. توپولوژی بهینه با رویکرد معمول روش MMC برای تیر دو سر مفصل.

Fig. 11. Optimal topology using the conventional MMC method for the simply supported beam.



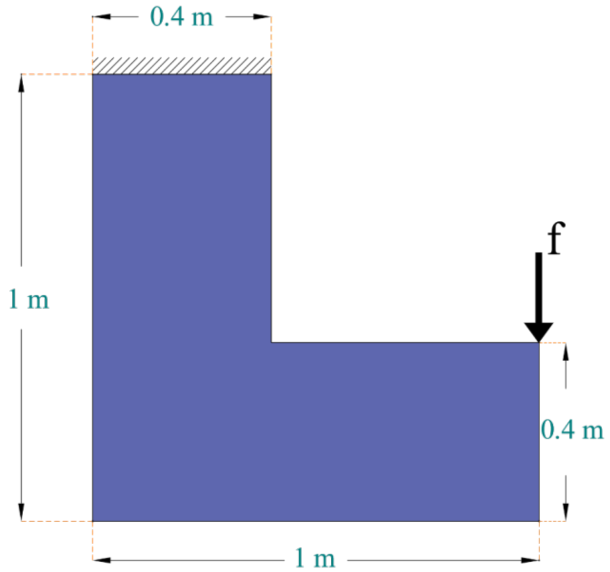
(الف)



(ب)

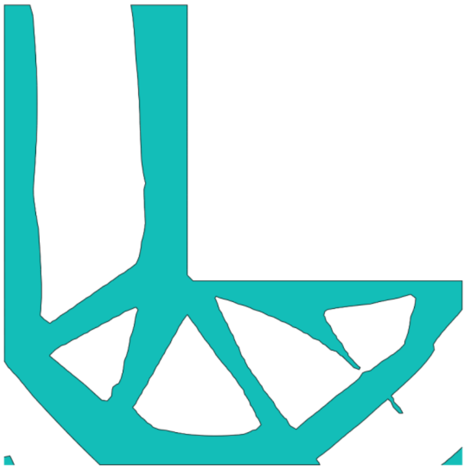
شکل ۱۲. (الف) جواب به دست آمده از بهینه‌یابی طرح و (ب) توپولوژی بهینه‌ی به دست آمده از رویکرد پیشنهادی برای تیر دو سر مفصل

Fig. 12. (a) The solution obtained from the Layout optimization, and (b) the optimal topology obtained from the proposed approach for the simply supported beam



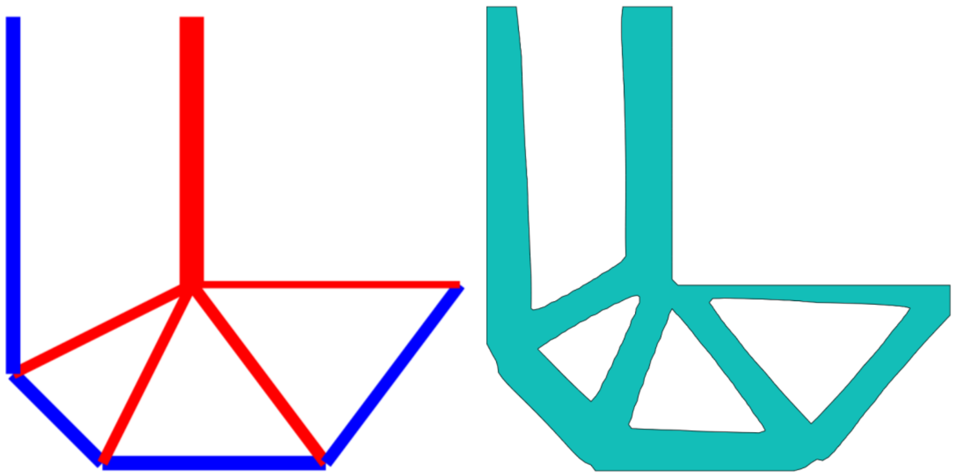
شکل ۱۳. دامنه‌ی طراحی L-Shape و بارگذاری و شرایط مرزی

Fig. 13. Design domain of L-shape problem and loading and boundary conditions



شکل ۱۴. توپولوژی بهینه با رویکرد معمول روش MMC در سازه L-Shape

Fig. 14. Optimal topology using the conventional MMC method in an L-shape structure



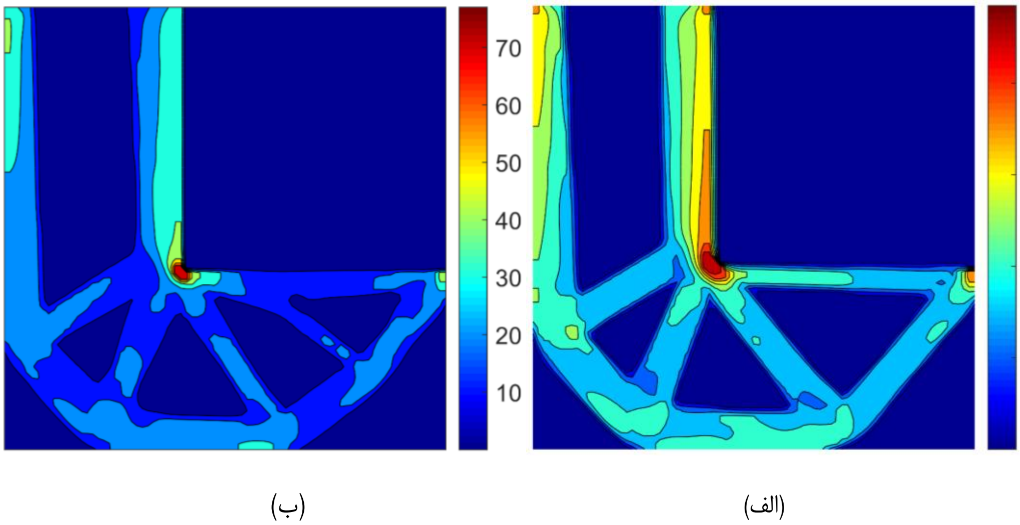
(ب) (الف)

شکل ۱۵. (الف) جواب به دست آمده از بهینه‌یابی طرح و (ب) توپولوژی بهینه‌ی به دست آمده از رویکرد پیشنهاد در سازه L-Shape

Fig. 15. (a) The solution obtained from the layout optimization, and (b) the optimal topology obtained from the proposed approach in the L-shape structure

داده شده است. بار یک نیوتن در قسمت بالای لبه سمت راست اعمال می‌شود و قسمت بالا سمت چپ دامنه گیردار می‌باشد. قید حجم برابر ۵۰ درصد دامنه‌ی طراحی می‌باشد و تعداد ۴۰۹۶ المان چهار گرهی برای تحلیل المان محدود استفاده شده است.

در رویکرد معمول MMC، ضخامت اولیه تمام اجزا (t_1, t_2, t_3) برابر ۰/۰۲ متر و نصف طول اولیه (d) برابر ۰/۲ متر در نظر گرفته شده است که موجب می‌شود طرح اولیه شامل ۳۲ جزء باشد. توپولوژی بهینه‌ی به دست آمده پس از ۱۹۳۷ ثانیه با تابع هدف ۱۷۲/۲ نیوتن‌متر در شکل ۱۴ نشان داده شده است. طرح به دست آمده از روش بهینه‌یابی طرح در شکل ۱۵–الف و طرح بهینه با در نظر گرفتن طرح پلاستیک به عنوان نقطه شروع، در شکل ۱۵–ب آورده شده است. جواب بهینه برای این مسئله با استفاده از رویکرد دو مرحله‌ای تنها در ۳۲ ثانیه به دست آمده است و مقدار تابع هدف



شکل ۱۶. توزیع تنش فون میسز (الف) با رویکرد معمول و (ب) با رویکرد دو مرحله‌ای در سازه L-Shape

Fig. 16. Von Mises stress distribution: (a) with the conventional approach and (b) with the two-stage approach in the L-shape structure

برای طرح بهینه ۱۵۵ نیوتن‌متر می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود، زمان اجرا کاهش چشمگیر حدود ۶۰ برابری داشته و همچنین جواب بهینه‌تری حاصل شده است.

این مثال یکی از مسائل معیار[1] در بهینه‌یابی توپولوژی با در نظر گرفتن قید تنش است. اگرچه این موضوع هدف این تحقیق نمی‌باشد، با این حال توزیع تنش فون میسز[2] در دو توپولوژی بهینه که با رویکرد معمول MMC و رویکرد دو مرحله‌ای پیشنهادی به دست آمده، در شکل ۱۶ آورده شده است. تنش در شکل ۱۶-ب نسبت به شکل ۱۶-الف از توزیع یکنواخت‌تری برخوردار است و همچنین مقدار بیشینه تنش کاهش یافته است.

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این تحقیق، رویکردی دومرحله‌ای جهت افزایش سرعت همگرایی و بهبود پاسخ‌های روش بهینه‌یابی اجزا متحرک شکل‌پذیر (MMC) ارائه شد. با توجه به غیرمحدب بودن مسئله‌ی MMC، توپولوژی بهینه بسیار به توپولوژی اولیه (نقطه‌ی شروع حل مسئله) وابسته است. بنابراین ایده‌ی اصلی در این پژوهش معرفی نقطه شروعی مناسب و نزدیک به پاسخ بهینه‌ی روش MMC با تابع هدف انرژی کرنشی می‌باشد. رویکرد ارائه شده بر مبنای معادل بودن طرح به دست آمده از روش بهینه‌یابی طرح و توپولوژی بهینه‌ی سازه‌ای با انرژی کرنشی کمینه (سختی بیشینه) است. در مرحله‌ی اول از رویکرد پیشنهادی، طرح بهینه‌ی سازه با استفاده از فرمول‌بندی خطی بهینه‌یابی طرح و در زمان بسیار کوتاهی به دست می‌آید. سپس این پاسخ به متغیرهای طراحی رویکرد MMC برگردانده می‌شود و به عنوان نقطه‌ی شروع الگوریتم MMC مورد استفاده قرار می‌گیرد. در نهایت توپولوژی بهینه با استفاده از این طرح اولیه و طی فرایند بهینه‌یابی MMC حاصل می‌شود.

همچنین این رویکرد را می‌توان برای سایر روش‌های رایج بهینه‌یابی توپولوژی با تابع هدف انرژی به کار گرفت چرا که این روش‌ها نیز یک مسئله‌ی ریاضی بهینه‌یابی غیرمحدب را حل می‌کنند. با این حال در بین این روش‌ها، رویکرد MMC انتخاب مناسبی است، زیرا در این رویکرد توپولوژی سازه با تعریف شکل و موقعیت تعدادی جزء و با استفاده از روابط تحلیلی بیان می‌شود. بنابراین می‌توان به آسانی جواب به دست آمده از بهینه‌یابی طرح را به صورت اجزا رویکرد MMC بیان کرد.

تعدادی از مسائل رایج در بهینه‌یابی توپولوژی با رویکرد معمول MMC و همچنین رویکرد دومرحله‌ای حل شد. مقایسه‌ی نتایج بیانگر سرعت بسیار بالاتر و جواب‌های بهینه‌تر رویکرد دومرحله‌ای است. در مسئله اول، مقدار

1. Benchmark
2. Von Mises

تابع هدف از ۱۲۹/۶ نیوتن‌متر در رویکرد معمول به ۱۲۸/۸ نیوتن‌متر در رویکرد پیشنهادی کاهش یافته و زمان بهینه‌یابی نیز از ۹۸۶ ثانیه به ۵۸۹ ثانیه رسیده است. در مسئله دوم، مقدار تابع هدف از ۲۳۷/۸ نیوتن‌متر به ۲۱۱/۰ نیوتن‌متر کاهش یافته و زمان حل از ۳۴۸۲ ثانیه به ۵۸۷ ثانیه کاهش پیدا کرده است. در مسئله سوم، مقدار تابع هدف از ۱۷۲/۲ نیوتن‌متر به ۱۵۵/۰ نیوتن‌متر بهبود یافته و زمان حل نیز از ۱۹۳۷ ثانیه به تنها ۳۲ ثانیه کاهش یافته است. دلیل اصلی سرعت بالای همگرایی، شروع از نقطه‌ای نزدیک به نقطه‌ی بهینه است. همچنین دلیل دیگر، اعمال دامنه‌ی کمتر تغییرات بر روی تعدادی از متغیرهای طراحی است که در رویکرد دومرحله‌ای در قیود هندسی اعمال می‌شود. از دیگر مزایای این رویکرد، به دست آوردن توپولوژی‌های مناسب‌تر برای ساخت، بدون نیاز به پس‌پردازش[1] می‌باشد.

در مسائل بهینه‌یابی توپولوژی، هر چه قید حجم کمتر باشد، توپولوژی سازه به سازه‌ای با المان‌های صرفا کششی و فشاری نزدیک‌تر می‌شود و با توجه به بهره‌گیری رویکرد پیشنهادی از بهینه‌یابی طرح در مرحله‌ی اول، این رویکرد پاسخ‌های مناسب‌تری را به دست می‌دهد. با توجه به تعداد درجات آزادی بیشتر مسائل سه‌بعدی، استفاده از این رویکرد در اینگونه مسائل می‌تواند موثرتر باشد که موضوع تحقیق بعدی نویسندگان این مقاله است. همچنین استفاده از بهینه‌یابی طرح برای نقطه شروع در روش‌های دیگر بهینه‌یابی مانند روش‌های مبتنی بر چگالی یا روش‌های مبتنی بر سطح تراز و همچنین بهینه‌یابی توپولوژی با قید تنش با استفاده از بهینه‌یابی طرح می‌توانند موضوعاتی کاربردی برای بررسی و تحقیق باشند.

۶- پیوست

این پیوست به اثبات معادل بودن کمینه کردن انرژی کرنشی در فرمول‌بندی الاستیک و کمینه کردن وزن در بهینه‌یابی طرح پلاستیک می‌پردازد. مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی آورده شده در (۱) را می‌توان با فرض $\sigma^{+}=\sigma^{-}=\sigma$، به شکل زیر نیز نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\text{Find } \mathbf{q}^{+},\mathbf{q}^{-}\\
&\min\ V=\frac{\mathbf{L}^{\mathrm{T}}}{\sigma}\left(\mathbf{q}^{+}+\mathbf{q}^{-}\right)\\
&\text{subject to:}\\
&\mathbf{B}\left(\mathbf{q}^{+}-\mathbf{q}^{-}\right)=\mathbf{f}\\
&0\le q_i^{+},q_i^{-}\qquad i=1,2,\ldots,m
\end{aligned}
\qquad (۱۵)
$$

در مسئله‌ی بالا $\mathbf{q}^{+}$ و $\mathbf{q}^{-}$ به ترتیب مقدار نیرو در المان‌های تحت کشش و فشار است. شکل همزاد مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی بالا با نوشتن تابع لاگرانژ تابع هدف و قیدها به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&\text{Find } \mathbf{u}\\
&\min\ -\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\\
&\text{subject to:}\\
&\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\le\frac{\mathbf{L}^{\mathrm{T}}}{\sigma}
\end{aligned}
\qquad (۱۶)
$$

که در آن $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}=\left[u_1^x,u_1^y,u_2^x,u_2^y,\ldots,u_n^x,u_n^y\right]$ بردار جابجایی مجازی در گره‌ها می‌باشد. از طرف دیگر، مسئله‌ی کمینه کردن انرژی کرنشی با فرمول‌بندی الاستیک به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\text{Find } \mathbf{u},\mathbf{A}\\
&\min\ C=\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\\
&\text{s.t.}\\
&\mathbf{k}\mathbf{u}=\mathbf{f}\\
&\sum_{i=1}^{m}V_i=A_iL_i\le V^{*}\\
&0\le A_i\qquad i=1,2,\ldots,m
\end{aligned}
\qquad (۱۷)
$$

ماتریس سختی ($\mathbf{k}$) را می‌توان به شکل $\mathbf{k}=\sum_{i=1}^{m}V_i\mathbf{k}_i$ بازنویسی کرد که در آن $\mathbf{k}_i=\frac{E_i}{L_i^2}\mathbf{B}_i\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}$ و $\mathbf{B}_i$ ستون i-ام ماتریس $\mathbf{B}$ است. با جایگذاری در قید تعادل، معادله‌ی تعادل الاستیک به شکل $\sum_{i=1}^{m}V_i\mathbf{k}_i\mathbf{u}=\mathbf{f}$ نوشته می‌شود. انرژی پتانسیل در نقطه‌ی تعادل سازه برابر با منفی نصف تابع هدف (C) می‌باشد، بنابراین مسئله را می‌توان با استفاده از فرمول‌بندی بیشینه- کمینه[2]، به شکل زیر بازنویسی کرد [۴۵]:

$$
\begin{aligned}
&\max_{V_i}\ \min_{u}\left[\frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\left(\sum_{i\in R}V_i\mathbf{k}_i\right)\mathbf{u}-\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\right]\\
&\text{s.t.}\\
&\sum_{i=1}^{m}V_i\le V^{*}\qquad i=1,2,\ldots,m\\
&V_i\ge 0
\end{aligned}
\qquad (۱۸)
$$

1. Post-processing

2. Max-min formulation

جواب مسئله‌ی محدب-مقعر بالا یک نقطه‌ی زینی است که می‌توان ترتیب بیشینه و کمینه کردن را جابجا کرد:

$$\min_{u} \max_{i \in R} \left[\frac{V^*}{2} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{k}_i \mathbf{u} - \mathbf{f}^{\mathrm{T}} \mathbf{u} \right] \tag{۱۹}$$

که در آن از تمام ماده تعریف شده در قید حجم (V^*) استفاده شده است. مسئله‌ی بالا یک مسئله‌ی غیرمقید محدب و غیرهموار[1] است که تنها متغیر طراحی آن بردار $\mathbf{u}$ می‌باشد. این مسئله را می‌توان به شکل مقید زیر هم نوشت:

$$\begin{aligned} &\min_{u} \; -\mathbf{f}^{\mathrm{T}} \mathbf{u} \\ &\text{s.t.} \\ &\frac{V^*}{2} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{k}_i \mathbf{u} \le 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{۲۰}$$

با استفاده از رابطه‌ی $\mathbf{k}_i = \frac{E_i}{L_i^2} \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}$ که قبلا بیان شد و برای مسائلی با یک حالت بارگذاری[2] می‌توان نوشت:

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{k}_i \mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{E}}{L_i} \mathbf{B}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{u}_i \right)^2 \tag{۲۱}$$

بنابراین مسئله‌ی الاستیک کمینه کردن انرژی کرنشی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} &\text{Find } \mathbf{u} \\ &\min \; -\mathbf{f}^{\mathrm{T}} \mathbf{u} \\ &\text{subject to:} \\ &-1 \le \sqrt{\frac{V^* E_i}{2}} \frac{\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{u}}{L_i} \le 1 \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{۲۲}$$

1. Non-smooth
2. Single load case

قید مسئله‌ی بالا با انتخاب $\sigma = \sqrt{\frac{V^* E_i}{2}}$ به شکل $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{u} \le \frac{\mathbf{L}^{\mathrm{T}}}{\sigma}$ نوشته می‌شود. بنابراین مسئله‌ی بالا همان شکل همزاد مسئله بهینه‌یابی طرح مبتنی بر تحلیل پلاستیک است.

معادل بودن روش‌های نیرو با مسائل کمینه کردن انرژی کرنشی در مسائلی با یک حالت بارگذاری نشان می‌دهد که هر راه‌حلی برای فرمول‌بندی مبتنی بر تحلیل پلاستیک (که به سادگی با برنامه‌ریزی خطی حل می‌شوند)، منجر به یافتن توپولوژی بهینه برای کمینه کردن انرژی کرنشی در چارچوب طراحی الاستیک می‌شود. استفاده از عبارت بهینه‌یابی طرح مبتنی بر تحلیل پلاستیک بیانگر آن است که در مسئله‌ی بهینه‌یابی، تنها معادلات تعادل ارضا می‌شوند و سازگاری تغییر مکان‌ها در نظر گرفته نمی‌شود. علاقمندان برای توضیحات بیشتر به خصوص برای مسائلی با چند حالت بارگذاری و یا مسائل تحت بار وزن سازه می‌توانند به مرجع [۴۵] مراجعه نمایند.

۷- فهرست علائم

علائم انگلیسی

x_i	مختصه‌ی افقی مرکز جزء
y_i	مختصه‌ی قائم مرکز جزء
$\mathbf{A}$	مساحت اجزای خرپایی
$\mathbf{q}$	مقدار نیرو اعضا خرپایی
$\mathbf{f}$	بردار نیرو اعمالی در گره‌ها
$\mathbf{L}$	طول اعضا خرپایی
V	حجم سازه
$\mathbf{B}$	ماتریس تعادل
Q	نقطه‌ای دلخواه از دامنه
D	دامنه‌ی طراحی
$\mathbf{u}_i$	بردار جابه‌جایی مجازی
p	یک عدد صحیح زوج مورد استفاده در تابع توصیف توپولوژی
d_j	نصف طول جزء
t	ضخامت جزء
E_0	مدول یانگ
$\mathbf{x}_j$	بردار متغیرهای طراحی یک جزء
$\mathbf{K}$	ماتریس سختی
$\mathbf{U}$	بردار جابه‌جایی
$\mathbf{u}$	بردار جابجایی مجازی
$\mathbf{F}$	بردار نیرو
V^*	حجم بیشینه‌ی سازه

علائم یونانی

ν	ضریب پواسون
σ^{+}	تنش مجاز کششی
σ^{-}	تنش مجاز فشاری
ε_i	کرنش مجازی
ϕ_j	تابع توصیف توپولوژی
θ_j	زاویه جزء با افق
δ	یک عدد کوچک و مثبت در تابع پله‌ای
ε	یک عدد کوچک و مثبت در تابع پله‌ای
ψ	تابع هدف

منابع

[1] M.P. Bendsoe, N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, (1988).

[2] M.P. Bendsøe, Optimal shape design as a material distribution problem, Structural optimization, 1(4) (1989) 193-202.

[3] G. Allaire, F. Jouve, A.-M. Toader, Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method, Journal of computational physics, 194(1) (2004) 363-393.

[4] G. Rozvany, The SIMP method in topology optimization-theoretical background, advantages and new applications, in: 8th Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, 2000, pp. 4738.

[5] N.P. Van Dijk, K. Maute, M. Langelaar, F. Van Keulen, Level-set methods for structural topology optimization: a review, Structural and Multidisciplinary Optimization, 48(3) (2013) 437-472.

[6] H.A. Eschenauer, N. Olhoff, Topology optimization of continuum structures: a review, Appl. Mech. Rev., 54(4) (2001) 331-390.

[7] O. Sigmund, K. Maute, Topology optimization approaches, Structural and Multidisciplinary Optimization, 48(6) (2013) 1031-1055.

[8] M.P. Bendsoe, O. Sigmund, Topology optimization: theory, methods, and applications, Springer Science & Business Media, 2003.

[9] W. Zhang, J. Yuan, J. Zhang, X. Guo, A new topology optimization approach based on Moving Morphable Components (MMC) and the ersatz material model, Structural and Multidisciplinary Optimization, 53 (2016) 1243-1260.

[10] X. Guo, W. Zhang, W. Zhong, Explicit feature control in structural topology optimization via level set method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 272 (2014) 354-378.

[11] R. Xue, R. Li, Z. Du, W. Zhang, Y. Zhu, Z. Sun, X. Guo, Kirigami pattern design of mechanically driven formation of complex 3D structures through topology optimization, Extreme Mechanics Letters, 15 (2017) 139-144.

[12] J. Norato, B. Bell, D.A. Tortorelli, A geometry projection method for continuum-based topology optimization with discrete elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 293 (2015) 306-327.

[13] C. Liu, Y. Zhu, Z. Sun, D. Li, Z. Du, W. Zhang, X. Guo, An efficient moving morphable component (MMC)-based approach for multi-resolution topology optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization, 58(6) (2018) 2455-2479.

[14] Z. Du, T. Cui, C. Liu, W. Zhang, Y. Guo, X. Guo, An efficient and easy-to-extend Matlab code of the Moving Morphable Component (MMC) method for three-dimensional topology optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization, 65(5) (2022) 1-29.

[15] X. Lei, C. Liu, Z. Du, W. Zhang, X. Guo, Machine learning-driven real-time topology optimization under moving morphable component-based framework, Journal of Applied Mechanics, 86(1) (2019) 011004.

[16] T. Cui, Z. Du, C. Liu, Z. Sun, X. Guo, Explicit topology optimization with moving morphable component (MMC) introduction mechanism, Acta Mechanica Solida Sinica, 35(3) (2022) 384-408.

[17] X. Guo, W. Zhang, J. Zhang, J. Yuan, Explicit structural topology optimization based on moving morphable components (MMC) with curved skeletons, Computer methods in applied mechanics and engineering, 310 (2016) 711-748.

[18] X. Jiang, H. Wang, Y. Li, K. Mo, Machine learning based parameter tuning strategy for MMC based topology optimization, Advances in Engineering Software, 149, (2020).

[19] X. Xie, A. Yang, Y. Wang, N. Jiang, S. Wang, Fully adaptive isogeometric topology optimization using MMC based on truncated hierarchical B-splines, Structural and Multidisciplinary Optimization, 63(6) (2021) 2869-2887.

[20] Z. Sheng, Y. Sun, K. Liu, H. Wang, An improved feature-driven moving morphable components method for topology optimization, Archive of Applied Mechanics, 94(2) (2024) 261-279.

[21] J. Zhou, G. Zhao, Y. Zeng, G. Li, A novel topology optimization method of plate structure based on moving morphable components and grid structure, Structural and Multidisciplinary Optimization, 67(1) (2024) 8.

[22] T. Shannon, T. Robinson, A. Murphy, C. Armstrong, Generalized Bezier components and successive component refinement using moving morphable components, Structural and Multidisciplinary Optimization, 65(7) (2022) 193.

[23] A.G.M. Michell, LVIII. The limits of economy of material in frame-structures, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 8(47) (1904) 5. 597-89.

[24] W. Dorn, Automatic design of optimal structures, J. de Mecanique, 3 (1964) 25-52.

[25] G.B. Dantzig, M.N. Thapa, The simplex method, Springer, 1997.

[26] W.S. Hemp, Optimum structures, Clarendon Press, 1973.

[27] E. Parkes, Joints in optimum frameworks, International Journal of Solids and Structures, 11(9) (1975) 1017-1022.

[28] M. Gilbert, A. Tyas, Layout optimization of large-scale pin-jointed frames, Engineering computations, (2003).

[29] L. He, M. Gilbert, X. Song, A Python script for adaptive layout optimization of trusses, Structural and Multidisciplinary Optimization, 60(2) (2019) 835-847.

[30] H.E. Fairclough, L. He, T.J. Pritchard, M. Gilbert, LayOpt: an educational web-app for truss layout optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization, 64(4) (2021) 2805-2823.

[31] L. He, M. Gilbert, Rationalization of trusses generated via layout optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization, 52(4) (2015) 677-694.

[32] G. Rozvany, Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics, Structural and Multidisciplinary optimization, 21(2) (2001) 90-108.

[33] G.I. Rozvany, Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints, Structural optimization, 11(3) (1996) 213-217.

[34] H.E. Fairclough, Layout Optimization of Structures: Novel Methods and Applications, University of Sheffield, 2019.

[35] A.G. Zaviejaki, Topology optimization of planar trusses Iran University of Science and Technology 1996 (In Persian).

[36] J. Malekifard, Particle swarm optimization method for topology optimization of truss performance, Sistan and Baluchestan University, 2010 (In Persain).

[37] Z. Tiareh, Size, shape, and topology optimization of truss structures under dynamic loads, Yazd University, 2014 (In Persian).

[38] A.A.N. Shirazi, Topology optimization of space trusses using Bee colony optimization method Allameh Jafari University, 2015 (In Persian).

[39] M.R. Sadr, Truss Topology Optimization Using Consistent Approximation, Shahed University, 2019 (In Persian).

[40] E.D. Andersen, K.D. Andersen, The MOSEK interior point optimizer for linear programming: an implementation of the homogeneous algorithm, in: High performance optimization, Springer, 2000, pp. 197-232.

[41] M. ApS, Mosek optimization toolbox for matlab, User's Guide and Reference Manual, Version, 4 , (2019).

[42] X. Guo, W. Zhang, W. Zhong, Doing topology optimization explicitly and geometrically—a new

moving morphable components based framework, Journal of Applied Mechanics, 81(8), 2014.

[43] K. Svanberg, The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization, International journal for numerical methods in engineering, 24(2) (1987) 359-373.

[44] K. Svanberg, The method of moving asymptotes (MMA) with some extensions, in: Optimization of large structural systems, Springer, 1993, pp. 555-566.

[45] M.P. Bendsøe, A. Ben-Tal, J. Zowe, Optimization methods for truss geometry and topology design, Structural optimization, 7(3) (1994) 141-159.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Lotfalian, P. Esmailpour, M. Takalloozadeh, Linear Programming and Moving Morphable Components Approach in 2D Structural Topology Optimization, Amirkabir J. Civil Eng., 57(1) (2025) 63-88.

DOI: 10.22060/ceej.2025.22091.7906