



## Coupled DEM-SPH Modeling of Saturated Sand

Y. Khalili, A. Mahboubi\*, M. Haji-Sotoudeh

Department of Civil and Environmental Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

**ABSTRACT:** DEM (Discrete Element Method) is a particle-based method for modeling the granular materials. SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) is also a particle-based method to analyze fluids using a limited number of integration points. These mesh-free methods are suitable to analyze geotechnical problems with large deformations or complicated geometries. Coupling DEM and SPH for simulating multi-phase media, resolves the need for the spatial mesh and prepares a more realistic understanding of the saturated granular materials. In this study by coupling both DEM and SPH methods, a novel DEM-SPH model was developed to simulate saturated granular media such as saturated sand. The particles were modeled using DEM and the inter-particle fluid was simulated using SPH. The fluid flow and the particle-fluid interactions were included in the model. The model was validated by comparing the numerical results to experimental data. The evolution of the fluid pressure distribution was investigated. Three phases were observed in fluid pressure distribution. After starting loading, a pressure wave appeared adjacent to the top wall that formed a “transient phase”. After finishing the transient phase, a “stable phase” of the fluid pressure distribution started, during which the pressure gradient changed gradually. There was an “instable phase” at large axial stains. The pressure gradient changed randomly in this phase. The results showed that the model could satisfactorily predict the undrained behavior of the saturated granular materials and capture the local parameters of the inter-particle fluid e.g. the local variations of the fluid pressure.

### Review History:

Received: Jul. 13, 2022

Revised: Aug. 07, 2023

Accepted: Nov. 14, 2023

Available Online: Nov. 23, 2023

### Keywords:

DEM

SPH

Mesh-free

Saturated Sand

particle shape

### 1- Introduction

DEM<sup>1</sup> is a particle-based method for modeling granular materials. The original DEM can only model assemblages of the dry particles. For modeling a medium consisting of the particles and the inter-particle fluid, it is needed to simultaneously solve the governing equations of the solid and fluid phases. SPH<sup>2</sup> is one of the recent methods used to solve the fluid governing equations. The key feature of SPH compared to the conventional CFD<sup>3</sup> is being mesh-free. Coupling DEM and SPH for simulating multi-phase media, resolves completely the need for the spatial mesh and prepares a more accurate understanding of the saturated granular material behavior compared to the DEM-FVM<sup>4</sup> models. The DEM-SPH models are compatible with large deformations, deformable boundaries, and irregular shapes of the medium. Mogami [1] introduced the idea of considering sand as discrete particles for analyzing its behavior. Cundall [2] developed DEM and Cundall and Strack [3] used DEM for modeling soils. Gingold and Monaghan [4] and Lucy [5]

developed SPH for using it in astrophysics.

Numerous studies were performed by researchers to couple DEM and SPH. However, until now, there is no satisfactory coupled DEM-SPH model for simulating the undrained behavior of the saturated granular materials under undrained loading, e.g. undrained triaxial shear tests on saturated sand. The main reason is that the majority of the coupled DEM-SPH models developed in the literature used the weakly compressible formulation and did not account for the incompressibility of the pore fluid, which is a key factor that governs the undrained response of the saturated granular material. Furthermore, the undrained simulations of the granular materials were performed using extremely idealized models or with unrealistic assumptions. In this study a novel coupled DEM-SPH model is developed to more realistically simulate the undrained behavior of sand.

### 2- Solid Phase

The physical problems related to the motions and the interactions between particles, can be directly simulated using DEM. The DEM calculation cycle consists of applying Newton's second law to the particles and the force-displacement law at the contacts.

Newton's second law is used to determine the motions of each

1 Discrete Element Method

2 Smoothed Particles Hydrodynamics

3 Computational Fluid Dynamics

4 Finite Volume Method

\*Corresponding author's email: a\_mahboubi@sbu.ac.ir



particle, and the force-displacement law is used to calculate the contact forces. In the DEM simulations, the local non-viscous damping is applied for the stability of calculations. This type of damping is similar to that mentioned by Cundall [6].

Many non-angular particle shapes can be modeled using overlapping spheres. In this study, particles consisting of two attached spherical particles with a predefined overlap ratio are used in the simulations.

### 3- Fluid Phase

The fluid governing equations including the momentum and continuity equations are commonly referred as Navier-Stokes equations. The locally averaged Navier-Stokes equations are derived by Anderson and Jackson [7]. In this study, the fluid governing equations are solved using SPH. SPH is an interpolation method in which using a limited number of integration points, the continuum parameters are approximated. The integration is performed by use of kernels which approximate functions. In the numerical work the integral interpolant is approximated by the summation interpolant.

The fluid viscosity in the SPH formulation is defined as the artificial viscosity. This term is applied in the momentum equation according to the suggested approach of Monaghan [8]. The interaction forces are calculated using the equation presented by Sun et al. [9].

In this study, the fluid pressure is calculated through the following steps. This procedure combines the equation of state, the incompressible fluid formulation and the constant volume conditions.

- Calculating a virtual pressure distribution using the equation of state,
- Performing the SPH flow calculations,
- Calculating the pressure gradient by having known the flow distribution,
- Determining the average fluid pressure to satisfy the constant volume conditions (the servo control algorithm), and
- Calculate the total pressure distribution by having known the average pressure and the pressure gradient.

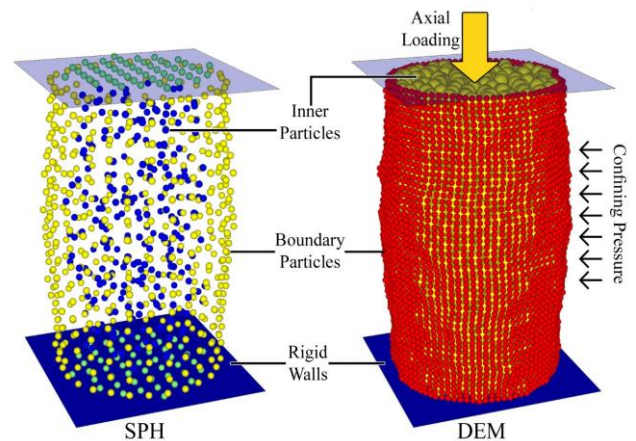
### 4- Results and Discussion

The developed DEM-SPH model is validated by comparing the simulation results to experimental data of triaxial tests on sand under drained and undrained conditions presented in [10]. The drained model is modified to minimize the difference between the experimental and numerical results. Then this model is used to predict the undrained response.

The actual sand sample consists of well-rounded particles. In the numerical model, each sand particle is simulated by clumping two spherical particles with an 80% overlap ratio. The gradation of the particles in the numerical and experimental specimens is alike.

In a DEM model to have a reasonable run-time, the number of particles should be small enough. Therefore, the numerical model dimensions are reduced to 10% of the experimental sample.

The selected friction coefficient and the stiffness are comparable with experimental values reported for quartz grains in [11] and the initial void ratio and the confining pressure have values similar to the actual triaxial tests in [10].



**Fig. 1. The DEM particles and the SPH integration points**

### 5- Conclusions

In this study, a novel coupled DEM-SPH model was developed in 3D to simulate the mechanical behavior of saturated granular media without need for a spatial mesh. The particles were modeled using DEM and the fluid was simulated using SPH. Non-spherical particles were generated by bonding two overlapping spheres. The fluid flow and the particle-fluid interactions were included in the model. The model prepared a more accurate understanding of the fluid phase including the pressure distribution in the saturated granular material. The flexible membrane of the triaxial specimen was modeled to apply the confining pressure and the ghost particle approach is used to define the boundary conditions of the fluid.

Immediately after starting axial loading, a pressure wave appeared adjacent to the top wall. This pressure wave formed a transient phase of pore fluid pressure distribution. After finishing the transient phase, a stable phase of the fluid pressure distribution started. During this phase, the pressure gradient throughout the specimen changed gradually. The stable phase finishing time was visually recognized using the pressure distribution contours. This phase lasted up to a threshold axial strain. There was an instable phase of the fluid pressure distribution at axial strains larger than the threshold. The pressure gradient in this phase was significantly affected by the particle sliding and changed randomly in subsequent time steps.

### References

- [1] T. Mogami, A statistical approach to mechanics of the granular materials, *Soils and foundations*, 5(2) (1965) 26-36.
- [2] P.A. Cundall, A computer model for simulating progressive large scale movement in a blocky rock system, in: *Proc. Sympo. Int. Soc. Rock Mech*, 1971, pp. 129-136.
- [3] P.A. Cundall, O.D.L. Strack, A Discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique*, 29(1) (1979) 47-

- 65.
- [4] R.A. Gingold, J.J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181 (1977) 375-389.
- [5] L.B. Lucy, A numerical approach to the testing of fusion process, *Astronomical Journal*, 88 (1977) 1013-1024.
- [6] P.A. Cundall, Distinct element models of rock and soil structure, *Analytical and Computational Methods in Engineering Rock Mechanics*, (1987) 129-163.
- [7] T.B. Anderson, R. Jackson, Fluid Mechanical Description of Fluidized Beds. Equations of Motion, *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 6(4) (1967) 527-539.
- [8] J.J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics, in: *Annual review of astronomy and astrophysics*, 1992, pp. 543-574.
- [9] X. Sun, M. Sakai, Y. Yamada, Three-dimensional simulation of a solid-liquid flow by the DEM-SPH method, *Journal of Computational Physics*, 248(0) (2013) 147-176.
- [10] P.C. Rouse, Characterisation and modelling of a uniformly graded, well-rounded coarse sand, University of British Columbia, 2005.
- [11] K. Senetakis, C. Sandeep, Experimental study of sand grains behavior at their contacts with force-and displacement-controlled sliding tests, *Underground Space*, 2(1) (2017) 38-44.

**HOW TO CITE THIS ARTICLE**

Y. Khalili, A. Mahboubi , M. Haji-Sotoudeh, *Coupled DEM-SPH Modeling of Saturated Sand* , *Amirkabir J. Civil Eng.*, 55(11) (2024) 465-468.

**DOI:** [10.22060/ceej.2023.21590.7772](https://doi.org/10.22060/ceej.2023.21590.7772)







## شبیه‌سازی رفتار ماسه اشباع با ترکیب روش اجزاء منفصل و هیدرودینامیک ذرات هموار

یونس خلیلی، احمدرضا محبوبی\*، محمد حاجی ستوده

دانشکده مهندسی عمران، آب و محیط زیست، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران.

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۱/۰۴/۲۲  
بازنگری: ۱۴۰۲/۰۵/۱۶  
پذیرش: ۱۴۰۲/۰۸/۲۳  
ارائه آنلاین: ۱۴۰۲/۰۹/۰۲

### کلمات کلیدی:

شبیه‌سازی  
روش اجزاء منفصل  
هیدرودینامیک ذرات هموار

DEM

SPH

**خلاصه:** روش اجزاء منفصل (DEM) از روش‌های عددی معتبر برای تحلیل موضوعات ژئوتکنیکی، به خصوص رفتار مصالح دانه‌ای است. هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) نیز یکی از روش‌های نوین برای مدل‌سازی رفتار سیالات است. هر دو روش DEM و SPH دارای مزیت عدم نیاز به شبکه‌بندی هستند. هنگامی که برای تحلیل یک پدیده ژئوتکنیکی مانند روانگرایی ماسه، بررسی رفتار مصالح دانه‌ای اشباع مد نظر باشد، استفاده از مکانیک سیالات و ترکیب آن با مکانیک ذرات اجتناب‌ناپذیر خواهد بود. روش ترکیبی DEM-SPH به عنوان یک روش لاگرانژی-لاگرانژی، بهترین ترکیب برای مدل‌سازی محیط‌های چندفازی است. زیرا می‌تواند به طور کامل نیاز به شبکه‌بندی حجمی را برطرف کند. عدم نیاز به شبکه‌بندی در مسائلی که دارای هندسه پیچیده، تغییر شکل‌های بزرگ یا سطح آزاد جریان هستند، مزیت بزرگی محسوب می‌شود. با این وجود، تاکنون مدل ترکیبی رضایت‌بخشی بر پایه استفاده همزمان از DEM و SPH برای تحلیل رفتار زهکشی نشده مصالح دانه‌ای اشباع ارائه نشده است. در این مقاله با استفاده از روش اجزاء منفصل و ترکیب آن با هیدرودینامیک ذرات هموار، رفتار زهکشی نشده ماسه اشباع شبیه‌سازی شده است. مدل عددی با استفاده از نتایج آزمایش‌های سه‌محوری زهکشی شده و زهکشی نشده بر روی نمونه ماسه گردگوشه صحت‌سنجی شده است. جریان سیال و برهم‌کنش‌های سیال-ذره در مدل منظور شده است. برای اعمال شرایط مرزی ذرات جامد، از یک غشاء انعطاف‌پذیر استفاده شده و شرایط مرزی سیال نیز با استفاده از ذرات فرضی سیال متصل به غشاء پیرامونی، تعریف شده است. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان داد که مدل ترکیبی DEM-SPH به خوبی قادر به پیش‌بینی پاسخ زهکشی نشده مصالح دانه‌ای اشباع و متغیرهای محلی مانند توزیع فشار سیال است.

### ۱- مقدمه

سیالات اجتناب‌ناپذیر خواهد بود. هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH<sup>4</sup>) یکی از روش‌های نوین برای مدل‌سازی رفتار سیالات است. در مقایسه با CFD<sup>5</sup> رایج، مهمترین امتیاز SPH عدم نیاز آن به شبکه‌بندی است. از دیدگاه پیاده‌سازی عددی، روش ترکیبی DEM-SPH به عنوان یک روش لاگرانژی-لاگرانژی، بهترین ترکیب برای مدل‌سازی محیط‌های چندفازی است؛ زیرا می‌تواند به طور کامل نیاز به شبکه‌بندی حجمی را برطرف کند. این اندیشه که برای تحلیل، ماسه به عنوان مجموعه‌ای از دانه‌ها در نظر گرفته شود، در سال ۱۹۶۵ توسط موگامی<sup>۶</sup> مطرح شد [۱]. کاندال<sup>۷</sup> روش اجزاء منفصل (DEM) را در سال ۱۹۷۱ معرفی کرد [۲]. DEM برای

روش‌های عددی دارای امتیازات فراوانی در مقایسه با روش‌های آزمایشگاهی در تحلیل مسائل ژئوتکنیکی هستند. از جمله مهمترین این امتیازات می‌توان به هزینه کمتر، امکان مطالعه پارامتریک، شبیه‌سازی‌های بزرگ‌مقیاس<sup>۱</sup> و کوچک‌مقیاس<sup>۲</sup> اشاره کرد. روش اجزاء منفصل (DEM<sup>3</sup>) از روش‌های عددی معتبر در زمینه تحلیل مسائل ژئوتکنیکی، به خصوص رفتار مصالح دانه‌ای است. DEM تنها قادر به شبیه‌سازی مجموعه‌ای از ذرات جامد است. بنابراین، برای تحلیل پدیده‌های ژئوتکنیکی مرتبط با مصالح دانه‌ای اشباع، مانند روانگرایی ماسه، ترکیب DEM با مکانیک

- 4 Smooth particles hydrodynamics
- 5 Computational fluid dynamics
- 6 Mogami
- 7 Cundall

- 1 Macroscopic
- 2 Microscopic
- 3 Discrete element method

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: a\_mahboubi@sbu.ac.ir



## جدول ۱. تحقیقات انجام شده در گذشته برای توسعه مدل‌های ترکیبی DEM-SPH

Table 1. The most important studies on coupled DEM-SPH models

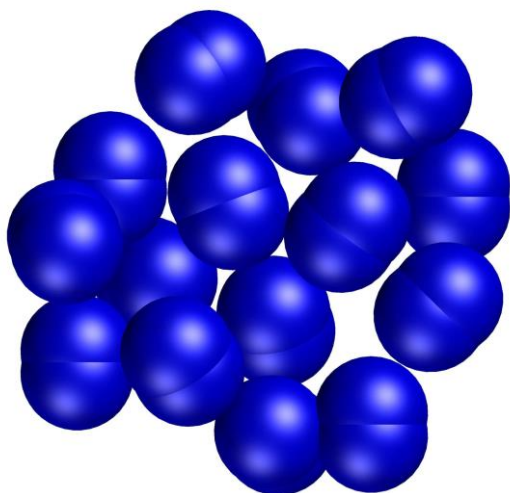
شماره مراجع	موضوع
[۳۱-۶]	الف- جریان چندفازی: - جریان مخلوط ذرات و سیال - اختلاط ذرات و سیال - غربال ذرات اشباع - آسیاب ذرات اشباع - جدا شدن ذرات جامد در اثر جریان سیال - لغزش شیب و ایجاد موج در آب
[۴۴-۳۲]	ب- برهم کنش سیال و اجسام جامد: - جریان سیال در اطراف یک ذره جامد - جریان سیال در حفرات میان ذرات جامد - ته‌نشینی ذرات جامد در سیال
[۴۸-۴۵]	ج- بارگذاری زهکشی نشده مصالح دانه‌ای اشباع: - شبیه‌سازی دوبعدی آزمایش سه‌محوری - روانگرایی
[۵۴-۴۹]	د: موضوعات متفرقه: - انفجار سنگ - شکل گیری باند برشی در سنگ - خشک شدن سلول‌های گیاهی - انتقال مواد در روده - تغییر شکل گلبول‌ها در مویرگ

گروه «الف» در جدول ۱). در شبیه‌سازی جریان‌های چندفازی، استفاده از فرمول‌بندی سیال تراکم‌ناپذیر ضروری نبوده و غالباً فرمول‌بندی سیال با تراکم‌پذیری کم از دقت کافی برخوردار است. بخش بسیار کوچکی از تحقیقات گذشته مربوط به شبیه‌سازی رفتار مکانیکی مصالح دانه‌ای اشباع است (گروه «ج» در جدول ۱). در چنین مسائلی تراکم‌ناپذیری سیال دارای نقشی کلیدی در تعیین پاسخ زهکشی‌نشده مصالح است. این شبیه‌سازی‌ها عمدتاً بر پایه فرضیات ساده‌کننده بسیاری مانند محیط دوبعدی، ذرات دایروی شکل، چیدمان ذرات در یک شبکه منظم، مرزهای کاملاً صلب، سیال با سطح آزاد و غیره انجام شده اند و نتایج آن‌ها بر اساس داده‌های تجربی صحت‌سنجی نشده است.

با توجه به مطالب گفته شده، تاکنون مدل DEM-SPH رضایت‌بخشی برای شبیه‌سازی رفتار مکانیکی مصالح دانه‌ای اشباع ارائه نشده است. دلیل اصلی این امر آنست که اغلب مدل‌های توسعه‌یافته در گذشته از فرمول‌بندی

تحلیل رفتار سنگ بر اساس این فرض که هر قطعه مجزای سنگ معادله حرکت را برقرار می‌کند، به کار گرفته شد. کاندال و استرک<sup>۱</sup> در سال ۱۹۷۹ از DEM برای تحلیل رفتار خاک‌ها استفاده کردند [۳]. هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) در سال ۱۹۷۷ توسط گینگلد و موناگان<sup>۲</sup> و همچنین لوسی<sup>۳</sup> به منظور شبیه‌سازی مسائل مربوط به اخت‌فیزیک معرفی گردید [۴، ۵]. نوآوری آن‌ها در روش محاسبه مشتقات بود که نیازی به شبکه‌بندی نداشت. پس از ابداع روش‌های SPH و DEM برای تحلیل رفتار سیالات و مواد دانه‌ای، مطالعات زیادی در زمینه ترکیب این دو روش برای شبیه‌سازی جریان‌های دو یا چندفازی انجام گرفته است. در جدول ۱ مواردی از تحقیقات انجام شده برای توسعه مدل‌های ترکیبی DEM-SPH آورده شده است. همان‌گونه که در جدول دیده می‌شود، این تحقیقات را می‌توان به چند دسته کلی تقسیم کرد که عمده‌ترین آن‌ها شبیه‌سازی جریان‌های چندفازی است

- 1 Cundall and Strack
- 2 Gingold and Monaghan
- 3 Lucy



شکل ۱. ذرات مورد استفاده در شبیه‌سازی‌ها

Fig. 1. The particle shape used in the simulations

ایده انتخاب گام زمانی کوچک استوار است؛ به طوری که در طول یک گام زمانی، اغتشاش وارده به یک ذره، حداکثر تا ذره مجاور انتشار یابد.

در روش اجزاء منفصل، محاسبات قانون دوم نیوتن برای ذرات و قانون نیرو-تغییر مکان در نقاط تماس ذرات به صورت پی‌درپی انجام می‌شود. قانون دوم نیوتن به منظور بررسی حرکت هر یک از ذرات تحت اثر نیروهای حجمی و تماسی وارده، مورد استفاده قرار می‌گیرد و قانون نیرو-تغییر مکان جهت به هنگام سازی نیروهای تماسی ناشی از حرکت نسبی در هر نقطه تماس به کار گرفته می‌شود.

بسیاری از ذرات گردگوشه را می‌توان با همپوشانی تعدادی ذرات کروی مدل‌سازی کرد. در این مطالعه، هر ذره جامد با اتصال دو ذره کروی با ۸۰٪ همپوشانی تولید شده است (شکل ۱). در فرمول‌بندی DEM ذرات کروی که به این شکل به هم متصل می‌شوند به عنوان یک ذره غیرکروی در نظر گرفته شده، و از نیروهای بین دو ذره کروی متصل به هم صرف‌نظر می‌شود. این روش اتصال ذرات به یکدیگر موجب تغییر عمده‌ای در روند محاسبات DEM نمی‌شود.

## ۲-۱-۱- قانون نیرو-تغییر مکان

قانون نیرو-تغییر مکان بیانگر ارتباط بین تغییر مکان دو ذره در تماس با هم و نیرویی است که بر یکدیگر وارد می‌کنند. در اینجا نحوه محاسبه نیروهای تماسی ناشی از تماس نقطه‌ای برای دو ذره کروی شرح داده شده

سیال با تراکم‌پذیری کم<sup>۱</sup> استفاده می‌کنند. بنابراین، چنین مدل‌هایی قادر به شبیه‌سازی تراکم‌ناپذیری سیال در محیط‌های دانه‌ای اشباع نیستند. همان‌گونه که می‌دانیم تراکم‌ناپذیری سیال دارای نقشی اساسی در تعیین پاسخ زهکشی‌نشده مصالح دانه‌ای اشباع است. به نحوی که حتی تراکم‌پذیری اندک سیال حفره‌ای موجب تغییرات عمده در پاسخ زهکشی‌نشده مصالح دانه‌ای اشباع می‌گردد. بعلاوه استفاده بیش‌ازحد از فرضیات ساده‌کننده در مدل‌های موجود، موجب فاصله گرفتن نتایج شبیه‌سازی‌ها از واقعیت شده است. در این مقاله روشی نوین بر پایه استفاده از روش اجزاء منفصل و ترکیب آن با هیدرودینامیک ذرات هموار برای تحلیل رفتار ماسه اشباع معرفی شده است. از فرمول‌بندی جدیدی برای ترکیب DEM و SPH استفاده شده و تراکم‌ناپذیری سیال در مدل لحاظ شده است. شرایط واقعی آزمایش سه‌محوری مانند محیط سه‌بعدی و غشاء انعطاف‌پذیر اطراف نمونه تا حد امکان در مدل عددی پیاده‌سازی شده و نتایج بر اساس داده‌های تجربی صحت‌سنجی گردیده است. با استفاده از مدل ارائه شده، روند تغییرات متغیرهای محلی سیال مانند توزیع فشار آب حفره‌ای در نمونه مورد بررسی قرار گرفته است.

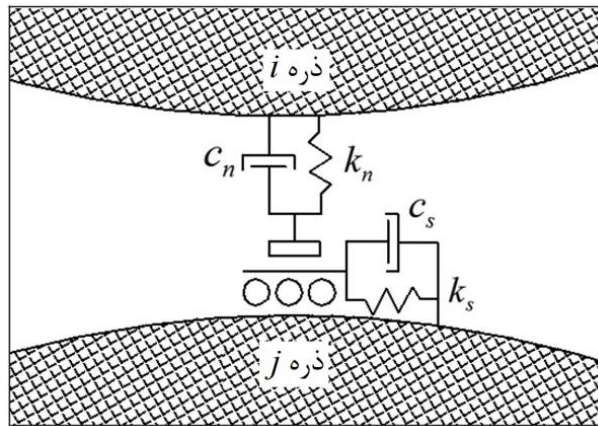
## ۲- روش عددی

### ۲-۱- فاز جامد، روش اجزاء منفصل (DEM)

با استفاده از روش اجزاء منفصل (DEM) امکان مدل‌سازی مصالح دانه‌ای خشک مانند ماسه به صورت ذرات مجزا وجود دارد. برهم‌کنش این ذرات در کنار هم رفتار کلی توده مصالح دانه‌ای را شکل می‌دهد. مسائل فیزیکی مرتبط با حرکت و اندرکنش ذرات خشک، به طور مستقیم قابلیت مدل‌سازی با استفاده از DEM را دارند.

با اعمال نیروی خارجی به ذرات، بی‌نظمی ایجاد می‌شود و در اثر آن، اجزاء محیط به نحوی حرکت می‌کنند که تعادل دوباره برقرار شود. در محیط دانه‌ای، حتی اگر این نیرو به تعداد کمی از ذرات وارد شود، با تماس‌های متوالی در کل محیط پخش می‌گردد و تمامی ذرات در جهت ایجاد تعادل حرکت می‌کنند. این سه مرحله (اعمال نیرو، انتشار بی‌نظمی، برقراری تعادل)، اساس مدل‌سازی به روش اجزاء منفصل است. در روش اجزاء منفصل، اندرکنش ذرات به صورت روندی دینامیکی، تا برقراری توازن نیروهای داخلی ادامه می‌یابد. رفتار دینامیکی با فرض سرعت‌ها و شتاب‌های ثابت در گام‌های زمانی، شبیه‌سازی می‌شود. روش حل، مشابه با روش تفاضل محدود در تحلیل محیط پیوسته است. روش اجزاء منفصل بر اساس

1 Weakly compressible fluid



شکل ۲. مدل تماس

Fig. 2. The contact model

هنگامی که تماس برقرار می‌گردد، مقدار اولیه نیروی برشی برابر با صفر است. هر نمو جابجایی برشی نسبی منجر به افزایش نیروی برشی الاستیک شده و به مقادیر موجود اضافه می‌شود، تا زمانی که نیروی برشی به مقدار حداکثر خود برسد و پس از آن لغزش اتفاق می‌افتد. نمو نیروی برشی را می‌توان از رابطه (۴) و مقدار حداکثر نیروی برشی را از رابطه (۵) محاسبه کرد.

$$\Delta F_i^s = k^s U_i^s \quad (4)$$

$$F_{\max}^s = \mu |F_i^n| \quad (5)$$

در روابط بالا،  $\Delta F_i^s$  نمو نیروی برشی،  $k^s$  سختی برشی،  $U_i^s$  تغییرمکان برشی نسبی بین دو ذره در تماس با یکدیگر،  $F_{\max}^s$  نیروی برشی حداکثر،  $\mu$  ضریب اصطکاک و  $|F_i^n|$  بزرگی نیروی عمودی در محل تماس است.

در شکل ۲ یک مدل تماس، شامل لغزنده، میراگر و فنرهای عمودی و مماسی نشان داده شده است.

### ۲-۱-۲- قانون حرکت

حرکت یک ذره صلب منفرد با استفاده از بردارهای نیرو و گشتاور وارد بر آن تعیین می‌گردد و می‌توان آن را بر حسب حرکت انتقالی یک نقطه

است. میزان همپوشانی دو ذره کروی از رابطه (۱) محاسبه می‌شود.

$$U^n = R^{[A]} + R^{[B]} - d \quad (1)$$

که در آن  $U^n$  همپوشانی،  $R^{[\phi]}$  شعاع ذره  $\phi$  و  $d$  فاصله مرکز به مرکز ذرات است. بردار نیروی تماسی را می‌توان طبق رابطه (۲) به مولفه‌های عمودی و برشی تجزیه نمود.

$$F_i = F_i^n + F_i^s \quad (2)$$

که در آن  $F_i^n$  و  $F_i^s$  به ترتیب مولفه عمودی و برشی نیرو است. بردار نیروی تماسی عمودی طبق رابطه (۳) محاسبه می‌شود.

$$F_i^n = K^n U^n n_i \quad (3)$$

که  $n_i$  بردار عمود بر سطح تماس دو ذره و  $K^n$  سختی عمودی است. باید توجه نمود که سختی عمودی  $K^n$  یک ثابت سکانتی بر اساس نیرو و جابجایی کل و سختی برشی  $k^s$  یک ثابت تانژانتی بر اساس نیرو و تغییرمکان نمودی است. نیروی تماسی برشی به روش نمودی محاسبه می‌شود.



مولفه‌های لنگر برآیند در جهت‌های اصلی هستند.

اگرچه بارگذاری به صورت استاتیکی انجام شده است، با توجه به ماهیت دینامیکی روش اجزاءمنفصل برای پایداری مدل عددی نیاز به اعمال میرایی است. در این مطالعه، میرایی غیرلزج محلی<sup>۲</sup> (با ثابت میرایی  $\alpha = 0.7$ ) (مشابه روش معرفی شده توسط کاندال [۵۵] در معادلات حرکت اعمال شده است.

## ۲-۲- فاز سیال

### ۲-۲-۱- معادلات ناویر-استوکس<sup>۳</sup>

معادلات حاکم بر جریان سیال، شامل معادله تکانه و معادله پیوستگی، عموماً معادلات ناویر-استوکس نامیده می‌شوند. حل این معادلات برای سیال واقع در فضای بین ذرات جامد، با دو دیدگاه متفاوت قابل انجام است. در دیدگاه جزئی‌نگر<sup>۴</sup>، دیواره ذرات جامد به عنوان شرایط مرزی برای سیال در نظر گرفته شده و از معادلات ناویر-استوکس معمول برای تحلیل دقیق چگونگی جریان سیال در فضای خالی بین ذرات جامد استفاده می‌شود. در دیدگاه کلی‌نگر<sup>۵</sup>، ویژگی‌های محیط متخلخل و سیال در نقاط مختلف میانگین‌گیری شده و با استفاده از ویژگی‌های میانگین، جریان سیال در محیط متخلخل تحلیل می‌شود. در این روش اثر ذرات جامد بر جریان سیال به صورت نیروهای برهم‌کنش در محاسبات اعمال می‌شود. معادلات ناویر-استوکس میانگین‌گیری شده به صورت محلی<sup>۶</sup> نخستین بار در سال ۱۹۶۷ توسط اندرسون و جکسون<sup>۷</sup> معرفی شد [۵۶]. برای یک سیال تراکم‌ناپذیر این معادلات به صورت زیر بیان می‌شود [۴۵].

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_f} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} - F_i^{sf} \right) \quad (12)$$

از ذره و حرکت چرخشی ذره، توصیف کرد. حرکت انتقالی مرکز ذره، بر حسب موقعیت  $x_i$ ، سرعت  $\dot{x}_i$  و شتاب  $\ddot{x}_i$  آن تعریف می‌گردد. حرکت چرخشی ذره نیز با استفاده از سرعت زاویه‌ای  $\omega_i$  و شتاب زاویه‌ای  $\dot{\omega}_i$  توصیف می‌شود.

معادلات حرکت را می‌توان با دو رابطه برداری بیان نمود که یکی بیان‌کننده رابطه بین نیرو و حرکت انتقالی بوده و دیگری رابطه گشتاور و حرکت چرخشی را بیان می‌کند. معادله حرکت انتقالی در حالت برداری را می‌توان طبق رابطه (۶) بیان کرد.

$$F_i = m(\ddot{x}_i - g_i) \quad (6)$$

که در آن  $F_i$  برآیند نیروها و  $m$  جرم ذره است. بردار شتاب نیروی حجمی (مانند وزن) است. معادله حرکت چرخشی در حالت برداری را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$M_i = \dot{H}_i \quad (7)$$

که  $M_i$  برآیند گشتاورهای وارد بر ذره و  $\dot{H}_i$  تکانه زاویه‌ای ذره است. این رابطه مربوط به سیستم مختصات محلی متصل به مرکز جرم است. اگر این سیستم محلی منطبق بر محورهای اصلی اینرسی باشد، معادله فوق به معادله حرکت اولر<sup>۱</sup> تبدیل می‌شود.

$$M_1 = I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_3 \omega_2 \quad (8)$$

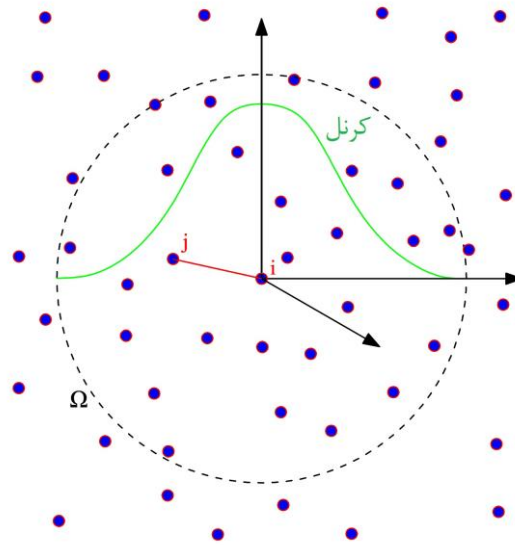
$$M_2 = I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 \quad (9)$$

$$M_3 = I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_2 \omega_1 \quad (10)$$

که در آن  $I_1$ ،  $I_2$  و  $I_3$  ممان اینرسی‌های اصلی ذره است.  $\dot{\omega}_2$ ،  $\dot{\omega}_1$  و  $\dot{\omega}_3$  شتاب‌های زاویه‌ای حول محورهای اصلی و  $M_1$ ،  $M_2$  و  $M_3$

1 Euler

2 Local non-viscous damping  
3 Navier-Stokes equations  
4 Resolved  
5 Unresolved  
6 Locally averaged Navier-Stocks equations  
7 Anderson and Jackson



شکل ۳. کرنل هموارساز

Fig. 3. The kernel function

در روابط بالا،  $n$  پوکی ذرات جامد،  $t$  زمان،  $u$  سرعت سیال،  $x$  موقعیت ذره سیال،  $\rho_f$  چگالی سیال،  $p$  فشار و  $F_i^{sf}$  نیروی برهم کنش وارده از ذرات جامد به سیال است. در رابطه (۱۲)، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j \quad (13)$$

### ۲-۲-۲ هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH)

در این مطالعه برای حل معادلات حاکم بر جریان سیال از روش محاسباتی هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) استفاده شده است. منشاء SPH به محاسبات فیزیکی جریان‌های قابل تراکم اجرام آسمانی باز می‌گردد [۵۷]. SPH در واقع یک روش درون‌یابی است که در آن با استفاده از یک سری نقاط مجزا، تخمینی از کمیت‌های پیوسته و مشتقات آن‌ها به دست می‌آید. از جمله این کمیت‌ها می‌توان به میدان‌های جرم، تغییر مکان و سرعت اشاره کرد. حرکت این نقاط می‌تواند چگونگی توزیع کمیت‌های فیزیکی مربوط به مساله، مانند چگالی جرمی، دما و فشار را تغییر دهد. کمیت‌های مربوط به SPH در هر نقطه، با میانگین‌گیری وزنی از کمیت‌های ذرات مجاور به

دست می‌آید [۵۸].

### ۲-۲-۳ کرنل هموارساز<sup>۲</sup>

SPH اساساً یک روش درون‌یابی است. انتگرال گیری با استفاده از کرنل‌ها که توابع را تخمین می‌زنند، انجام می‌شود (شکل ۳). انتگرال درون‌یابی هر کمیت  $A(r)$  بر روی فضای  $\Omega$  به صورت زیر تعریف می‌شود [۵۸].

$$A(r) = \int_{\Omega} A(r') W(r-r', h) dr' \quad (14)$$

در این معادله  $r$ ، هر نقطه در فضای  $\Omega$  است.  $W$  کرنل هموارساز و  $h$  دامنه است. دامنه یا شعاع هسته، میزان همواری کرنل را مشخص می‌کند. کرنل بایستی دارای دو ویژگی زیر باشد [۵۷]:

$$\int_{\Omega} W(r, h) dr = 1 \quad (15)$$

در معادله بالا  $\rho_0$  چگالی مرجع است. ثابت  $\gamma$  برابر با  $\gamma$  فرض شده است و  $\bar{\rho}$  چگالی میانگین محلی<sup>۴</sup> سیال است که طبق رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود.

$$\bar{\rho}_i = \varepsilon_i \rho_f \quad (20)$$

در رابطه بالا  $\rho_f$  چگالی واقعی سیال و  $\varepsilon$  تخلخل محلی ذرات جامد است. تخلخل محلی به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\varepsilon_i = 1 - \sum_k V_k W_{ik} \quad (21)$$

که در آن  $V$  حجم ذره جامد و  $W$  تابع کرنل است. ثابت  $B$  در معادله (۱۹) مطابق رابطه (۲۲) محاسبه می‌شود.

$$B = \frac{c_0^2 \rho_0}{\gamma} \quad (22)$$

در این رابطه  $c_0$  سرعت صوت است. برای محدود کردن نوسانات چگالی سیال به ۱٪ باید  $c_0$  حداقل ده برابر سرعت حداکثر سیال فرض شود.

#### ۲-۲-۵- محاسبه فشار سیال

SPH اساساً برای تحلیل جریان‌های تراکم‌پذیر ابداع شد. با انجام اصلاحاتی در SPH، می‌توان از آن برای تحلیل جریان‌های تقریباً تراکم‌ناپذیر<sup>۵</sup> استفاده کرد [۵۷]. بنابراین، انجام محاسبات یک سیال کاملاً تراکم‌ناپذیر مستقیماً به وسیله SPH قابل انجام نیست. در مسائل مربوط به تحلیل جریان‌های چندفازی یا سیال با سطح آزاد، استفاده از فرمول‌بندی سیال با تراکم‌پذیری کم و محاسبه فشار بوسیله معادله حالت از دقت کافی برخوردار است. در چنین مسائلی، معادله حالت نوسانات چگالی سیال را به ۱٪ محدود می‌کند. با این وجود برای تحلیل مسائل ژئوتکنیکی مرتبط با رفتار زهکشی‌نشده مصالح دانه‌ای، بایستی سیال کاملاً تراکم‌ناپذیر باشد.

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(r, h) dr = \delta(r) \quad (16)$$

در رابطه بالا  $\delta$ ، دلتای دیراک<sup>۱</sup> است.

در محاسبات عددی، انتگرال رابطه (۱۴) با استفاده از مجموع زیر تخمین زده می‌شود.

$$A(r) = \sum_i m_i \frac{A_i}{\rho_i} W(r - r_i, h) \quad (17)$$

که در آن  $m$  جرم،  $\rho$  چگالی و  $r$  موقعیت است. در این مطالعه از کرنل وندلند<sup>۲</sup> [۵۹] استفاده شده است. این کرنل در محیط سه‌بعدی به صورت رابطه (۱۸) بیان می‌شود.

$$W(r, h) = \alpha_D \begin{cases} \left(1 - \frac{q}{2}\right)^4 (2q + 1) & 0 \leq q < 2 \\ 0 & q \geq 2 \end{cases} \quad (18)$$

در رابطه بالا  $q = r/h$  و در فضای سه‌بعدی  $\alpha_D = \frac{21}{16\pi h^3}$  است.

#### ۲-۲-۴- معادله حالت<sup>۳</sup>

در یک سیال با تراکم‌پذیری کم، فشار سیال به وسیله معادله حالت به چگالی سیال مرتبط می‌شود. با معلوم بودن توزیع فشار سیال در نقاط مختلف، محاسبات جریان سیال قابل انجام خواهد بود. در این مطالعه از معادله حالت زیر برای انجام محاسبات جریان سیال استفاده شده است. هرچند فشار سیال با استفاده از روش ویژه‌ای که در بخش ۲-۲-۵ شرح داده شده است، محاسبه می‌گردد.

$$p_i = B \left[ \left( \frac{\bar{\rho}_i}{\varepsilon_i \rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (19)$$

- 
- 1 Dirac's delta
  - 2 Wendland
  - 3 Equation of state

- 
- 4 Locally averaged density
  - 5 Nearly incompressible

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{\bar{\rho}_i + \bar{\rho}_j}{2} \quad (27)$$

$$\varphi_{ij} = \frac{h v_{ij} x_{ij}}{x_{ij}^2 + 0.01h^2} \quad (28)$$

در روابط بالا  $\lambda$  ضریب گرانیروی مصنوعی و  $C$  سرعت صوت است.  $x$  و  $v$  به ترتیب موقعیت و سرعت هستند.  $\bar{\rho}$  چگالی میانگین محلی و  $h$  دامنه هموارسازی است.

### ۲-۲-۷- محاسبات عددی جریان

با در نظر گرفتن نیروهای اندرکنش بین فازهای جامد و سیال، گرانیروی مصنوعی و توزیع فشار فرضی محاسبه شده طبق معادله حالت، معادله تکانه را می‌توان به شکل زیر برای استفاده در محاسبات SPH بازنویسی کرد [۲۷]:

$$\frac{dv_i^\beta}{dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{p_i}{\bar{\rho}_i^2} + \frac{p_j}{\bar{\rho}_j^2} + \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + \frac{Fd_{s \rightarrow f, i}^\beta}{m_i} + g^\beta \quad (29)$$

که در آن  $\beta$  هر یک از جهات سه‌گانه است.  $Fd_{s \rightarrow f}$  نیروی درگ<sup>۵</sup> وارد شده از فاز جامد به فاز سیال و  $g$  شتاب گرانش است. نیروهای اندرکنش وارد شده از طرف سیال به ذرات جامد و از طرف ذرات جامد به سیال طبق رابطه ارائه شده توسط سان و همکاران<sup>۶</sup> [۱۳] محاسبه و اعمال می‌شود. این معادله اندرکنش، ترکیبی از معادلات ارگن<sup>۷</sup> [۶۰] و ون<sup>۸</sup> [۶۱] است.

### ۲-۳- شرایط مرزی

شرایط مرزی برای ذرات جامد از یک غشاء انعطاف‌پذیر، دورتادور نمونه و دو دیواره صلب در بالا و پایین آن تشکیل شده است. از طریق غشاء، تنش

زیرا تغییرات اندک در چگالی سیال می‌تواند منجر به بروز خطاهای بزرگی در نتایج شبیه‌سازی‌ها شود.

در این مطالعه فشار سیال در گام‌های زیر محاسبه شده است که در آن از معادله حالت، فرمول‌بندی سیال تراکم‌ناپذیر و شرایط حجم ثابت استفاده شده است. این روش دارای دقت کافی برای شبیه‌سازی رفتار زهکشی‌نشده مصالح دانه‌ای اشباع است.

- محاسبه توزیع فشار فرضی اولیه با استفاده از معادله (۱۹)
- انجام محاسبات جریان SPH طبق رابطه (۲۹)
- محاسبه گرایان فشار طبق رابطه (۱۲) با معلوم بودن توزیع جریان
- محاسبه فشار متوسط با اعمال شرایط حجم‌ثابت با روش سرووکنترل<sup>۱</sup>
- محاسبه توزیع فشار واقعی سیال با معلوم بودن فشار متوسط و گرایان فشار

### ۲-۲-۶- گرانیروی<sup>۲</sup>

گرانیروی سیال در SPH به صورت گرانیروی مصنوعی<sup>۳</sup> تعریف می‌شود. گرانیروی مصنوعی مطابق رابطه (۲۳) بیان شده و طبق روش پیشنهادی موناگان<sup>۴</sup> [۵۷] در معادله تکانه اعمال می‌گردد.

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\lambda \bar{C}_{ij} \varphi_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} & v_{ij} \cdot x_{ij} < 0 \\ 0 & v_{ij} \cdot x_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (23)$$

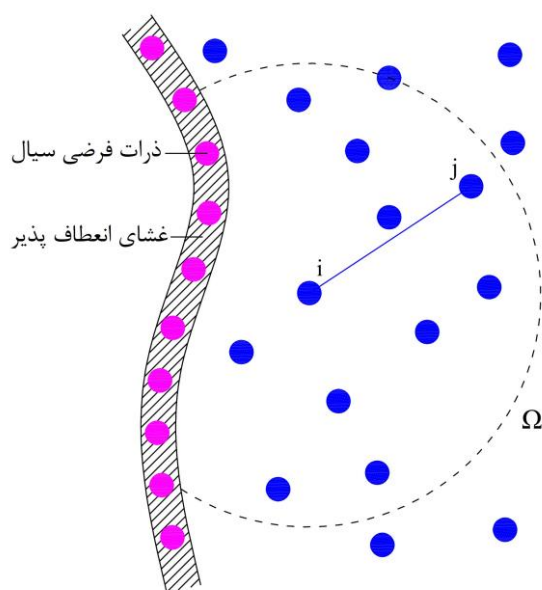
$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (24)$$

$$v_{ij} = v_i - v_j \quad (25)$$

$$\bar{C}_{ij} = \frac{C_i + C_j}{2} \quad (26)$$

5 Drag force  
6 Sun et al.  
7 Ergun  
8 Wen

1 Servo control algorithm  
2 Viscosity  
3 Artificial viscosity  
4 Monaghan



شکل ۴. شرایط مرزی سیال

Fig. 4. The fluid boundary conditions

### ۲-۴- ساختار مدل عددی

نمودار گردش مدل ترکیبی DEM-SPH مورد استفاده در این مطالعه در شکل ۵ نشان داده شده است. در این نمودار محاسبات به چهار بخش کلی ذرات جامد، سیال، نیروهای اندرکنش و شرایط مرزی تقسیم شده و ارتباط بین بخش‌های مختلف نشان داده شده است. مدل عددی با استفاده از زبان برنامه نویسی FISH در محیط نرم افزار PFC<sup>3D</sup> پیاده سازی شده است.

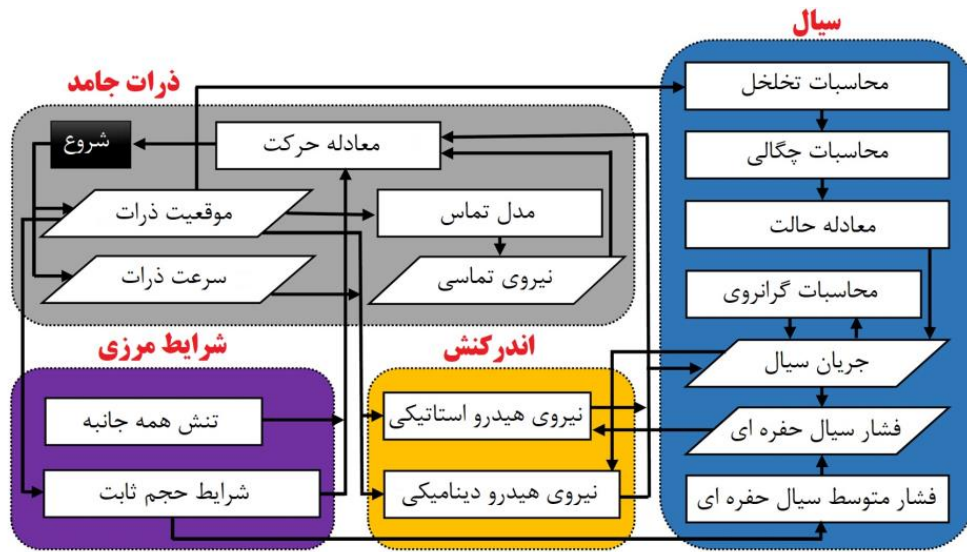
### ۳- صحت‌سنجی

با مقایسه نتایج شبیه‌سازی و نتایج تجربی مربوط به آزمایش‌های سهم‌محوری [۶۲]، صحت‌سنجی مدل ترکیبی DEM-SPH انجام شده است. ذرات گردگوشه ماسه در نمونه ماسه آزمایشگاهی با استفاده از ذرات کروی متصل به یکدیگر با ۸۰٪ همپوشانی شبیه‌سازی شده اند. مقدار ۸۰٪ همپوشانی با روی هم‌گذاری تصاویر میکروسکوپی ذرات ماسه نمونه آزمایشگاهی انتخاب شده است (شکل ۶).

به منظور کاهش تعداد ذرات نمونه و امکان تحلیل مساله در یک زمان منطقی، اندازه نمونه عددی ۱۰٪ نمونه آزمایشگاهی در نظر گرفته شده

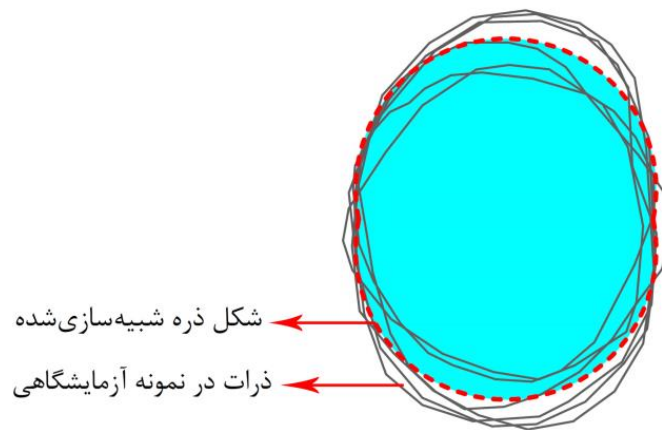
همه‌جانبه<sup>۱</sup> به ذرات جامد اعمال می‌شود. ذرات غشاء با قطر کوچک و سختی کم نسبت به ذرات داخلی نمونه تعریف شده اند تا از طرفی امکان هماهنگی آن با تغییرشکل‌های نمونه وجود داشته باشد و از طرف دیگر امکان عبور ذرات داخلی از میان ذرات غشاء وجود نداشته باشد. ذرات غشاء تماسی با یکدیگر ندارند، اما این ذرات در یک شبکه مربعی توسط فنرهایی با سختی مشابه ذرات غشاء به یکدیگر متصل هستند تا رفتار یکپارچه‌ای داشته باشند. برای تعریف شرایط مرزی سیال، مجموعه‌ای از ذرات سیال متصل به مرزهای نمونه<sup>۲</sup> مورد استفاده قرار گرفته است (شکل ۴). در این روش تعداد مناسبی از ذرات SPH به غشاء انعطاف‌پذیر و دیواره‌های بالا و پایین نمونه متصل می‌شوند؛ بدین معنی که موقعیت و سرعت این ذرات در تمام مراحل شبیه‌سازی برابر با موقعیت و سرعت مرزهای نمونه خواهد بود. با جانمایی مناسب ذرات SPH مرزی، ذرات SPH درون نمونه امکان خروج از نمونه را نداشته (شرایط غشاء نفوذ ناپذیر برای سیال) و همچنین سرعت سیال نسبت به مرزهای نمونه برابر با صفر خواهد بود.

- 1 Confining pressure
- 2 Ghost particle approach



شکل ۵. نمودار گردش مدل ترکیبی DEM-SPH

Fig. 5. The algorithm of the coupled DEM-SPH model



شکل ۶. شبیه سازی ذرات واقعی با همپوشانی دو ذره کروی

Fig. 6. The idealized particle shape in the numerical simulations

جدول ۲. مشخصات کلی مدل صحت‌سنجی

Table 2. The general properties of the numerical model used for validation

مقدار	ویژگی
۶/۳ mm	قطر نمونه
۱۲/۵ mm	ارتفاع نمونه
۵۶۳	تعداد ذرات داخلی
۲۲۹۴	تعداد ذرات غشاء
۰/۷ - ۱/۰ mm	دانه‌بندی
۲۵۰۰ kg/m <sup>۳</sup>	چگالی ذرات
۲۵۰×۱۰ <sup>۶</sup> N/m	سختی عمودی
۲۵۰×۱۰ <sup>۶</sup> N/m	سختی مماسی
۰/۲۷	ضریب اصطکاک
۰/۵۸	تخلخل اولیه
استاتیکی با کنترل تغییرمکان	نوع بارگذاری
۱ mm/s	سرعت بارگذاری
۱۵۰ kPa	فشار همه‌جانبه
زهکشی‌شده/ زهکشی‌نشده	شرایط زهکشی
۴×۱۰ <sup>-۷</sup> s	گام زمانی

شبه‌سازی آزمایش سه‌محوری زهکشی‌نشده در جدول ۳ ذکر شده است. در شکل ۱۰ توزیع فشار آب حفره‌ای در صفحه مرکزی نمونه سه‌محوری در کرنش صفر تا ۰/۶٪ نشان داده شده است. قبل از شروع بارگذاری در کرنش صفر، فشار آب حفره‌ای در تمام نقاط نمونه برابر با صفر است. بلافاصله بعد از شروع بارگذاری یک موج فشاری در مجاورت دیواره بالایی شکل می‌گیرد. با شکل‌گیری موج فشاری، نمونه وارد یک فاز گذار در توزیع فشار آب حفره‌ای می‌شود که طی آن بی‌نظمی ایجاد شده در مجاورت دیواره بالایی، در تمام نمونه منتشر می‌شود.

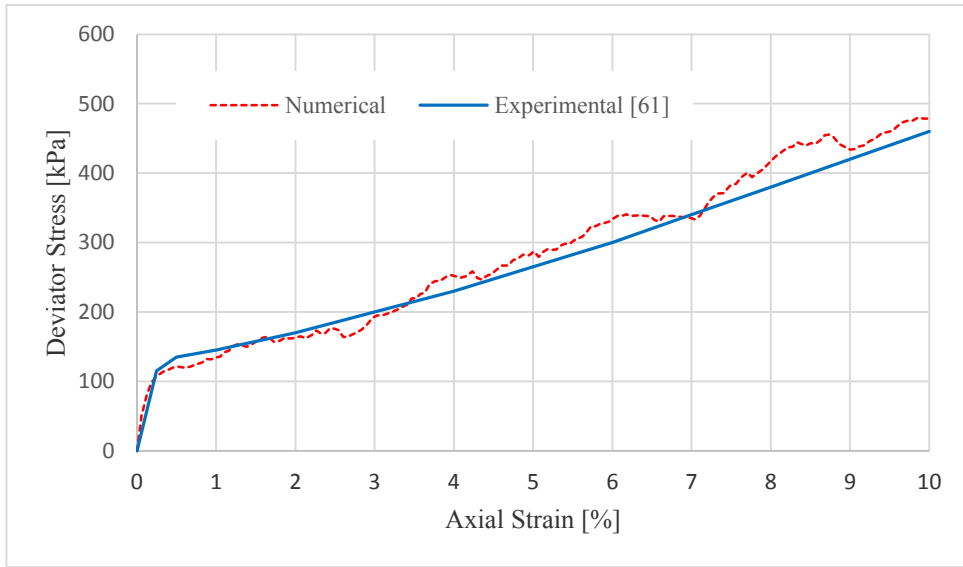
فاز گذار مربوط به شروع بارگذاری بوده و در زمان کوتاهی به پایان می‌رسد. پس از آن، نمونه وارد یک فاز پایدار در توزیع فشار آب حفره‌ای می‌گردد که در آن تغییرات گرادین فشار آب حفره‌ای به صورت تدریجی و پیوسته انجام می‌شود. توزیع فشار آب حفره‌ای در نمونه در کرنش ۰/۸٪ تا ۱/۱٪ در شکل ۱۱ نشان داده شده است. در این شکل پیوستگی و ارتباط مشخصی بین نمودارهای توزیع فشار مشاهده می‌شود. فاز پایدار مربوط به کرنش‌های محوری نسبتاً کوچک نمونه سه‌محوری است که در آن نمونه کامبیش در حالت الاستیک بوده و لغزش‌های قابل توجهی بین ذرات جامد

است. دانه‌بندی ذرات در نمونه عددی و نمونه آزمایشگاهی یکسان است. برای انجام صحت‌سنجی، متغیرهای مدل به گونه‌ای تنظیم شده اند که اختلاف نتایج عددی و آزمایشگاهی در حالت زهکشی‌شده به حداقل برسد. سپس با استفاده از مدل عددی تنظیم شده، رفتار زهکشی‌نشده مصالح اشباع پیش‌بینی گردیده است. در جدول ۲ ویژگی‌های کلی مدل صحت‌سنجی نشان داده شده است.

در شکل ۷ و ۸ نتایج شبه‌سازی آزمایش زهکشی‌نشده، شامل تغییرات تنش انحرافی و فشار آب حفره‌ای بر حسب کرنش محوری نشان داده شده است. در این شکل‌ها نواسانات نمودارهای عددی بیشتر از نمودارهای تجربی است که با در نظر گرفتن اثر مقیاس و فرضیات ساده‌کننده مدل عددی، می‌توان گفت نتایج مدل‌سازی قابل قبول است.

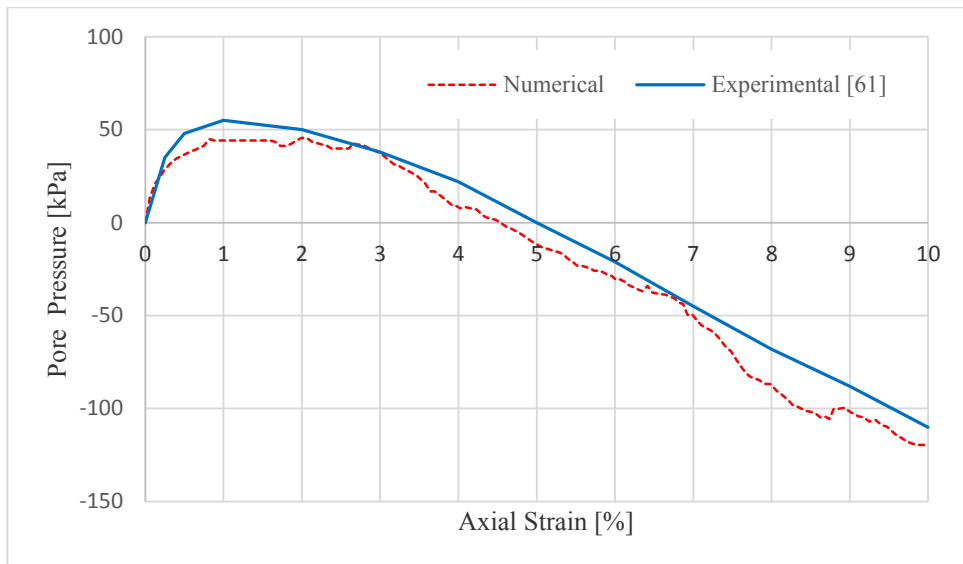
#### ۴- نتایج و بحث

در این بخش نتایج شبه‌سازی یک آزمایش سه‌محوری بر روی ماسه اشباع آورده شده است. در شکل ۹ نمونه مورد آزمایش در کرنش محوری ۱۰٪ نشان داده شده است. مشخصات کلی نمونه مورد استفاده برای



شکل ۷. تنش انحرافی بر حسب کرنش محوری

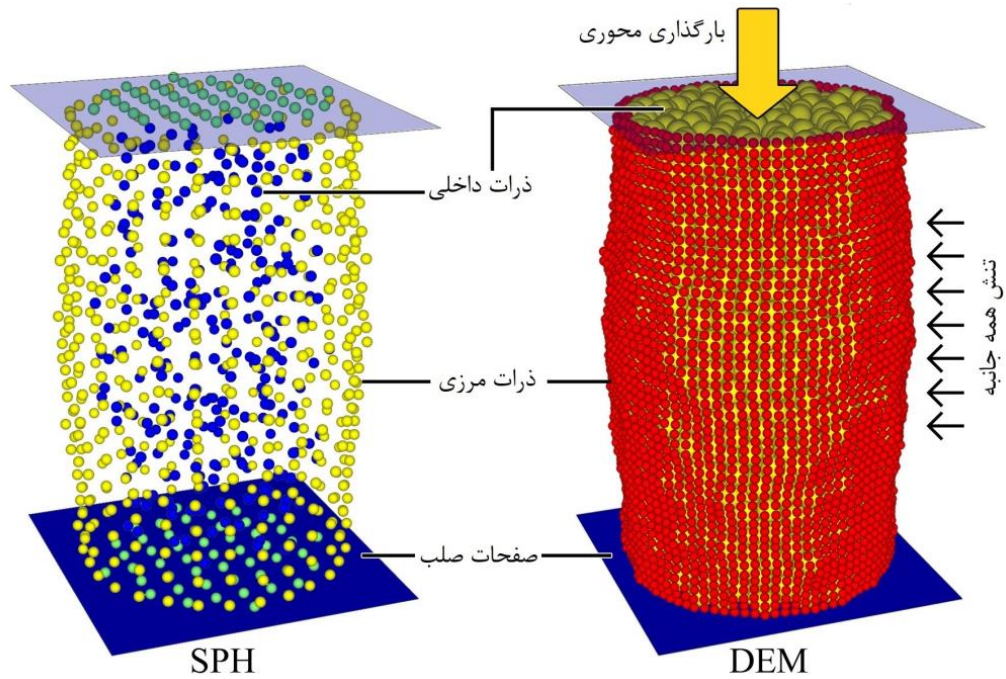
Fig. 7. The deviator stress vs. the axial strain



شکل ۸. فشار آب حفره‌ای بر حسب کرنش محوری

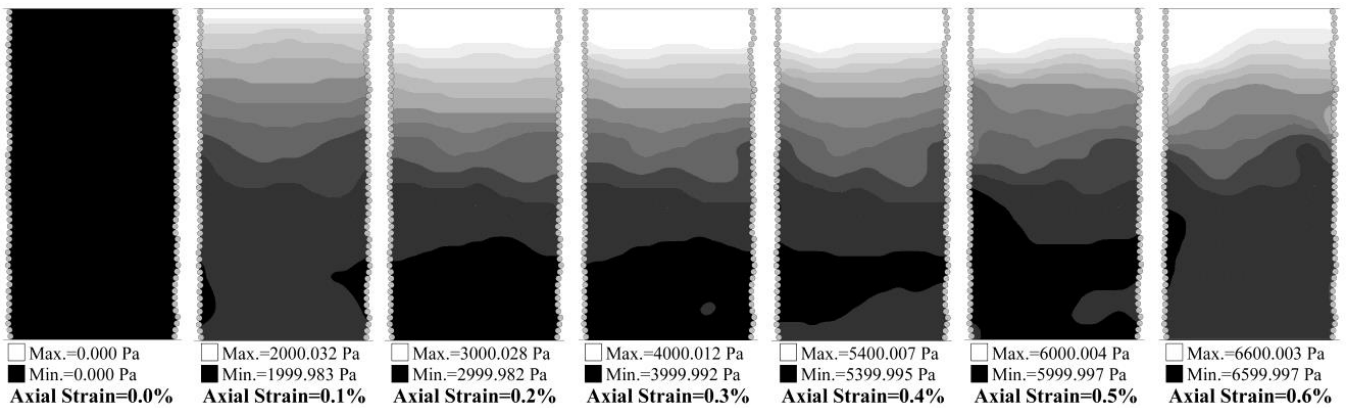
Fig. 8. The pore water pressure vs. the axial strain





شکل ۹. نمونه سه‌محوری در کرنش محوری ۱۰٪

Fig. 9. The triaxial specimen at 10% axial strain



شکل ۱۰. توزیع فشار آب حفره‌ای بر حسب کرنش محوری (فاز گذرا)

Fig. 10. The pore pressure contours vs. the axial strain (transient phase)

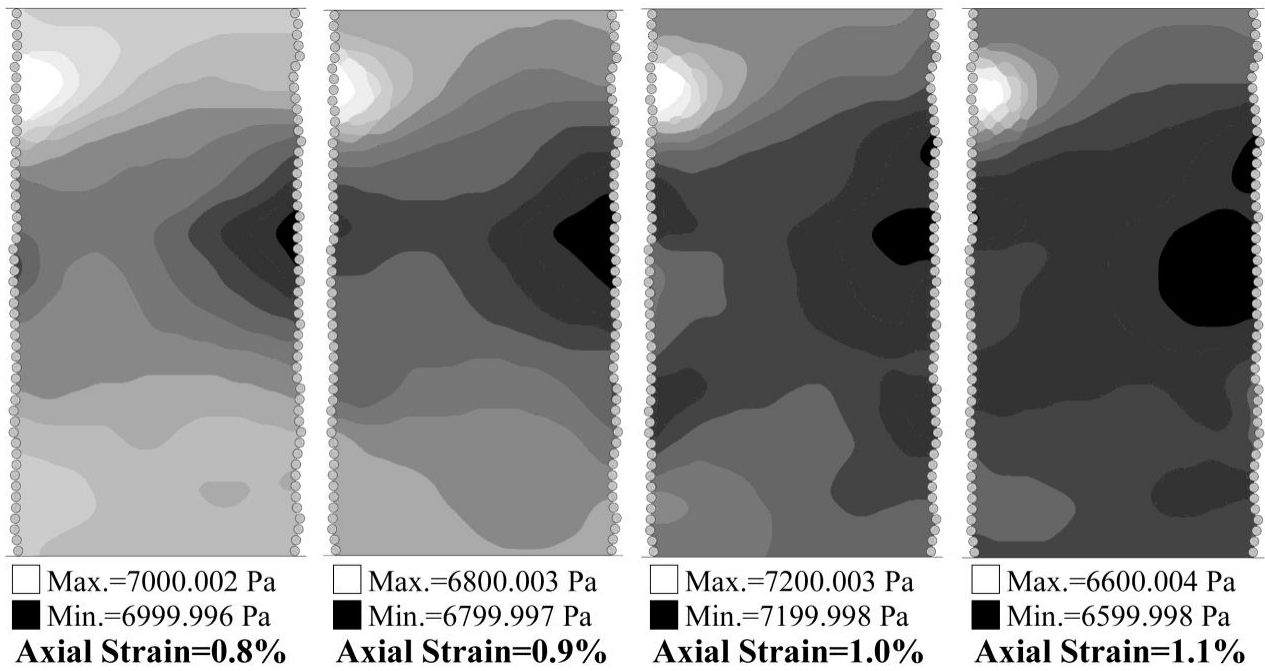
جدول ۳. مشخصات کلی مدل عددی

Table 3. The general properties of the numerical model

ویژگی	مقدار	
قطر نمونه	۵۰ mm	نمونه سه محوری
ارتفاع نمونه	۱۰۰ mm	
گام زمانی	$۴/۲۲ \times ۱۰^{-۶}$ s	
تعداد	۴۲۸۴	
قطر	۰/۸۷ mm	
سختی عمودی ذرات و اتصال بین ذرات	$۱ \times ۱۰^۴$ N/m	ذرات غشاء
سختی مماسی ذرات و اتصال بین ذرات	$۱ \times ۱۰^۴$ N/m	
ضریب اصطکاک	۰	
تعداد	۲۱۰۶	
قطر	۴/۵ mm	
چگالی	$۲۰۰۰$ kg/m <sup>۳</sup>	ذرات داخلی
سختی عمودی	$۵۰ \times ۱۰^۶$ N/m	
سختی مماسی	$۵۰ \times ۱۰^۶$ N/m	
ضریب اصطکاک	۰/۵	
تخلخل اولیه	۰/۴۸	
تعداد ذرات درونی	۲۶۰	ذرات SPH
تعداد ذرات مرزی	۵۷۴	
دامنه	۶/۹۷ mm	
چگالی سیال	$۱۰۰۰$ kg/m <sup>۳</sup>	
گرانروی سیال	$۸/۹ \times ۱۰^{-۴}$ Pa.s	
نوع بارگذاری	استاتیکی با کنترل تغییر مکان	بارگذاری
فشار همه جانبه	۵۰ kPa	
سرعت بارگذاری	۱ mm/s	
شرایط زهکشی	زهکشی نشده	

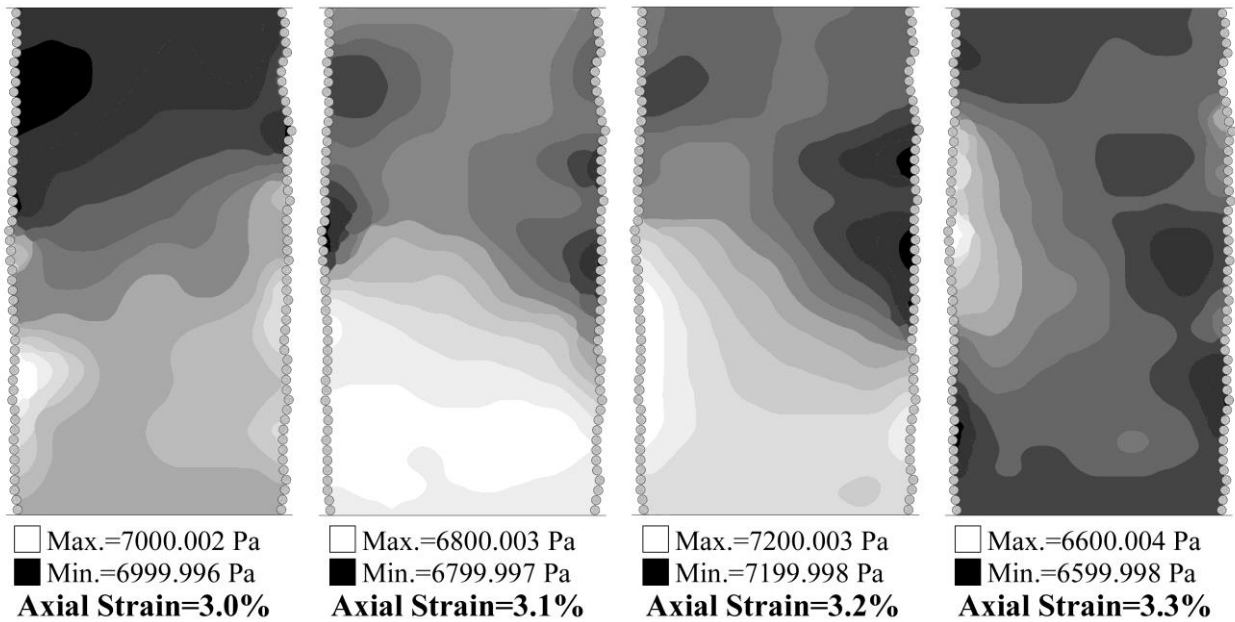
پلاستیک نمونه همراه است. در شکل ۱۲ نمودارهای توزیع فشار آب حفره‌ای در کرنش ۰/۳٪ تا ۳/۳٪ نشان داده شده است. در این نمودارها تغییرات ناگهانی گرادیان فشار با افزایش کرنش محوری مشاهده می‌شود.

رخ نمی‌دهد. پس از رسیدن به یک کرنش محوری حدی، فاز پایدار به پایان رسیده و نمونه وارد یک فاز ناپایدار در توزیع فشار آب حفره‌ای می‌شود. این فاز با لغزش گسترده ذرات جامد بر روی یکدیگر و تغییر شکل‌های



شکل ۱۱. توزیع فشار آب حفره‌ای بر حسب کرنش محوری (فاز پایدار)

Fig. 11. The pore pressure contours vs. the axial strain (stable phase)



شکل ۱۲. توزیع فشار آب حفره‌ای بر حسب کرنش محوری (فاز ناپایدار)

Fig. 12. The pore pressure contours vs. the axial strain (instable phase)

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله روشی نوین برای شبیه‌سازی رفتار مکانیکی ماسه اشباع، با ترکیب روش‌های عددی DEM و SPH معرفی گردید. مدل ترکیبی DEM-SPH به کلی نیاز به شبکه‌بندی برای تحلیل محیط دانه‌ای اشباع را برطرف و امکان شبیه‌سازی بارگذاری با تغییرشکل‌های بزرگ را فراهم می‌سازد. روش جدیدی برای اعمال تراکم‌ناپذیری سیال حفره‌ای و محاسبه فشار محلی سیال معرفی گردید. برای انطباق بیشتر نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی از یک غشاء انعطاف‌پذیر در شبیه‌سازی آزمایش سه‌محوری استفاده شد. شبیه‌سازی‌ها با استفاده از ذرات غیرکروی انجام گرفت و نتایج شبیه‌سازی‌ها بر اساس داده‌های تجربی صحت‌سنجی شد. نتایج نشان داد که مدل ترکیبی DEM-SPH به خوبی قادر به پیش‌بینی نتایج آزمایشگاهی آزمایش سه‌محوری زهکشی‌نشده بر روی مصالح دانه‌ای است.

با استفاده از مدل معرفی شده روند تغییرات توزیع فشار در نمونه سه‌محوری مورد بررسی قرار گرفت. بر این اساس سه مرحله مجزا در توزیع فشار سیال حفره‌ای مشاهده گردید. فاز گذرا: این فاز مربوط به شروع بارگذاری نمونه است. با شروع بارگذاری یک موج فشاری در مجاورت دیواره بالایی شکل می‌گیرد. بی‌نظمی ایجاد شده در زمان کوتاهی در کل نمونه منتشر می‌شود. فاز پایدار: پس از اتمام فاز گذرا، نمونه وارد یک فاز پایدار می‌شود که در آن تغییرات گرادین فشار در نمونه به صورت تدریجی و پیوسته انجام می‌شود. این فاز عمدتاً مقارن با رفتار تنش-کرنش خطی نمونه و تغییرشکل‌های الاستیک است. فاز ناپایدار: با رسیدن کرنش محوری نمونه به یک مقدار حدی، نمودارهای توزیع فشار آب حفره‌ای وارد یک فاز ناپایدار می‌شوند. فاز ناپایدار با لغزش گسترده ذرات جامد بر روی یکدیگر و تغییرشکل‌های پلاستیک نمونه همراه است. در این فاز نمودارهای گرادین فشار آب حفره‌ای به طور ناگهانی تغییر می‌کنند.

## منابع

- 65.
- [4] R.A. Gingold, J.J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Monthly notices of the royal astronomical society*, 181(3) (1977) 375-389.
- [5] L.B. Lucy, A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *The astronomical journal*, 82 (1977) 1013-1024.
- [6] A.V. Potapov, M.L. Hunt, C.S. Campbell, Liquid-solid flows using smoothed particle hydrodynamics and the discrete element method, *Powder Technology*, 116(2-3) (2001) 204-213.
- [7] P.W. Cleary, M. Sinnott, R. Morrison, Prediction of slurry transport in SAG mills using SPH fluid flow in a dynamic DEM based porous media, *Minerals Engineering*, 19(15) (2006) 1517-1527.
- [8] J.W. Fernandez, P.W. Cleary, M.D. Sinnott, R.D. Morrison, Using SPH one-way coupled to DEM to model wet industrial banana screens, *Minerals Engineering*, 24(8) (2011) 741-753.
- [9] F.M. Katubilwa, M.H. Moys, Effects of filling degree and viscosity of slurry on mill load orientation, *Minerals Engineering*, 24(13) (2011) 1502-1512.
- [10] M. Sinnott, P.W. Cleary, R.D. Morrison, Slurry flow in a tower mill, *Minerals Engineering*, 24(2) (2011) 152-159.
- [11] P.W. Cleary, R.D. Morrison, Prediction of 3D slurry flow within the grinding chamber and discharge from a pilot scale SAG mill, *Minerals Engineering*, 39 (2012) 184-195.
- [12] Y.J. Huang, O.J. Nydal, Coupling of discrete-element method and smoothed particle hydrodynamics for liquid-solid flows, *Theor. Appl. Mech. Lett.*, 2(1) (2012).
- [13] X. Sun, M. Sakai, Y. Yamada, Three-dimensional simulation of a solid-liquid flow by the DEM-SPH method, *Journal of Computational Physics*, 248(0) (2013) 147-176.
- [14] M. Robinson, S. Luding, M. Ramaioli, SPH-DEM simulations of grain dispersion by liquid injection, in: *AIP Conference Proceedings*, 2013, pp. 1122-1125.
- [15] M. Robinson, S. Luding, M. Ramaioli, Fluid-particle
- [1] T. Mogami, A statistical approach to the mechanics of granular materials, *Soils and Foundations*, 5(2) (1965) 26-36.
- [2] P.A. Cundall, A computer model for simulating progressive, large-scale movement in blocky rock system, in: *Proceedings of the International Symposium on Rock Mechanics*, 1971, 1971.
- [3] P.A. Cundall, O.D. Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, *geotechnique*, 29(1) (1979) 47-

- 124-130.
- [27] H. Tan, S. Chen, A hybrid DEM-SPH model for deformable landslide and its generated surge waves, *Advances in Water Resources*, 108 (2017) 256-276.
- [28] D. Markauskas, H. Kruggel-Emden, V. Scherer, Numerical analysis of wet plastic particle separation using a coupled DEM-SPH method, *Powder Technology*, 325 (2018) 218-227.
- [29] D. Markauskas, H. Kruggel-Emden, Coupled DEM-SPH simulations of wet continuous screening, *Advanced Powder Technology*, 30(12) (2019) 2997-3009.
- [30] M. Jahani Chegeni, Combined DEM and SPH simulation of ball milling, *Journal of Mining and Environment*, 10(1) (2019) 151-161.
- [31] K. Tsuji, M. Asai, Fluid-solid multiphase flow simulator using a SPH-DEM coupled method in consideration of liquid bridge force related to water content, in: *PARTICLES VI: proceedings of the VI International Conference on Particle-Based Methods: fundamentals and applications*, CIMNE, 2019, pp. 668-679.
- [32] J. Morris, S. Johnson, Dynamic simulations of geological materials using combined FEM/DEM/SPH analysis, *Geomechanics and Geoengineering*, 4(1) (2009) 91-101.
- [33] R. Canelas, J.M. Dominguez, R.M.L. Ferreira, Coupling a Generalized DEM and an SPH Models Under a Heterogeneous Massively Parallel Framework, in: *Congreso de Metodos Numericos en Ingenieria*, Lisbon, Portugal, 2013.
- [34] K. Wu, D. Yang, N. Wright, A coupled SPH-DEM model for fluid-structure interaction problems with free-surface flow and structural failure, *Computers & Structures*, 177 (2016) 141-161.
- [35] M. Sarfaraz, A. Pak, An integrated SPH-polyhedral DEM algorithm to investigate hydraulic stability of rock and concrete blocks: Application to cubic armours in breakwaters, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 84 (2017) 1-18.
- [36] S. Mintu, D. Molyneux, Simulation of ice-structure interactions using a coupled SPH-DEM method, in: *OTC flow modelling and validation using two-way-coupled mesoscale SPH-DEM*, eprint arXiv:1301.0752, 2013.
- [16] M. Tak, D. Park, T. Park, Computational Coupled Method for Multiscale and Phase Analysis, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 135(2) (2013).
- [17] M. Robinson, M. Ramaioli, S. Luding, Fluid-particle flow simulations using two-way-coupled mesoscale SPH-DEM and validation, *International journal of multiphase flow*, 59 (2014) 121-134.
- [18] P.W. Cleary, Prediction of coupled particle and fluid flows using DEM and SPH, *Minerals Engineering*, 73 (2015) 85-99.
- [19] P.W. Cleary, M.D. Sinnott, Computational prediction of performance for a full scale Isamill: Part 2 – Wet models of charge and slurry transport, *Minerals Engineering*, 79 (2015) 239-260.
- [20] T. Breinlinger, T.C. Kraft, Coupled discrete element and smoothed particle hydrodynamics simulations of the die filling process, *Computational Particle Mechanics*, 3(4) (2016) 505-511.
- [21] D.M. Robb, S.J. Gaskin, J.-C. Marongiu, SPH-DEM model for free-surface flows containing solids applied to river ice jams, *Journal of Hydraulic Research*, 54(1) (2016) 27-40.
- [22] M.D. Sinnott, P.W. Cleary, Particulate and water mixing in the feed box for a screen, *Minerals Engineering*, 109 (2017) 109-125.
- [23] M.D. Sinnott, P.W. Cleary, R.D. Morrison, Combined DEM and SPH simulation of overflow ball mill discharge and trommel flow, *Minerals Engineering*, 108 (2017) 93-108.
- [24] D. Markauskas, H. Kruggel-Emden, R. Sivanesapillai, H. Steeb, Comparative study on mesh-based and meshless coupled CFD-DEM methods to model particle-laden flow, *Powder Technology*, 305 (2017) 78-88.
- [25] P.W. Cleary, J.E. Hilton, M.D. Sinnott, Modelling of industrial particle and multiphase flows, *Powder Technology*, 314 (2017) 232-252.
- [26] F.K. Mulenga, Effects of slurry hold-up on the pool volume of a batch mill, *Minerals Engineering*, 111 (2017)

- engineering, 72(7) (2007) 858-882.
- [46] U. El Shamy, S.F. Sizzow, Coupled smoothed particle hydrodynamics-discrete element method simulations of soil liquefaction and its mitigation using gravel drains, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 140 (2021) 106460.
- [47] U. El Shamy, S.F. Sizzow, Coupled SPH-DEM simulations of liquefaction-induced flow failure, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 144 (2021) 106683.
- [48] S.F. Sizzow, U. El Shamy, SPH-DEM simulations of saturated granular soils liquefaction incorporating particles of irregular shape, *Computers and Geotechnics*, 134 (2021) 104060.
- [49] C.P.K. Helambage, W. Senadeera, Y. Gu, R.J. Brown, B.W. Pearce, A coupled SPH-DEM model for fluid and solid mechanics of apple parenchyma cells during drying, in: *Proceedings of the Eighteenth Australasian Fluid Mechanics Conference*, 2012.
- [50] H. Karunasena, W. Senadeera, Y. Gu, R.J. Brown, A coupled SPH-DEM model for micro-scale structural deformations of plant cells during drying, *Applied Mathematical Modelling*, 38(15-16) (2014) 3781-3801.
- [51] A. Fakhimi, M. Lanari, DEM-SPH simulation of rock blasting, *Computers and Geotechnics*, 55(0) (2014) 158-164.
- [52] P.W. Cleary, G.G. Pereira, V. Lemiale, C. Delle Piane, M. Ben Clennell Multiscale model for predicting shear zone structure and permeability in deforming rock, *Computational Particle Mechanics*, 3(2) (2016) 179-199.
- [53] H.-N. Polwaththe-Gallage, S.C. Saha, E. Sauret, R. Flower, W. Senadeera, Y. Gu, SPH-DEM approach to numerically simulate the deformation of three-dimensional RBCs in non-uniform capillaries, *Biomedical engineering online*, 15(2) (2016) 349-370.
- [54] M.D. Sinnott, P.W. Cleary, S.M. Harrison, Peristaltic transport of a particulate suspension in the small intestine, *Applied Mathematical Modelling*, 44 (2017) 143-159.
- [55] P.A. Cundall, Distinct element models of rock and soil structure, *Analytical and Computational Methods in Arctic Technology Conference, Offshore Technology Conference*, 2018.
- [37] W.-J. Xu, X.-Y. Dong, W.-T. Ding, Analysis of fluid-particle interaction in granular materials using coupled SPH-DEM method, *Powder Technology*, 353 (2019) 459-472.
- [38] S. Ji, X. Chen, L. Liu, Coupled DEM-SPH method for interaction between dilated polyhedral particles and fluid, *Mathematical Problems in Engineering*, 2019 (2019).
- [39] J.P. Morris, P.J. Fox, Y. Zhu, Modeling low Reynolds number incompressible flows using SPH, *J. Comput. Phys.*, 136(1) (1997) 214-226.
- [40] Y. Zhu, P.J. Fox, J.P. Morris, A pore-scale numerical model for flow through porous media, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 23(9) (1999) 881-904.
- [41] M. Ebrahimi, P. Gupta, M. Robinson, M. Crapper, M. Ramaioli, J.Y. Ooi, Comparison of coupled DEM-CFD and SPH-DEM methods in single and multiple particle sedimentation test cases, in: *PARTICLES III: proceedings of the III International Conference on Particle-Based Methods: fundamentals and applications*, CIMNE, 2013, pp. 322-334.
- [42] B. Nassauer, T. Liedke, M. Kuna, Development of a coupled discrete element (DEM)-smoothed particle hydrodynamics (SPH) simulation method for polyhedral particles, *Computational Particle Mechanics*, 3(1) (2016) 95-106.
- [43] S. Natsui, A. Sawada, K. Terui, Y. Kashihara, T. Kikuchi, R.O. Suzuki, DEM-SPH study of molten slag trickle flow in coke bed, *Chemical Engineering Science*, 175 (2018) 25-39.
- [44] J. Chen, O. Orozovic, K. Williams, J. Meng, C. Li, A coupled DEM-SPH model for moisture migration in unsaturated granular material under oscillation, *International Journal of Mechanical Sciences*, 169 (2020) 105313.
- [45] X. Li, X. Chu, D. Sheng, A saturated discrete particle model and characteristic-based SPH method in granular materials, *International journal for numerical methods in*

- and compactly supported radial functions of minimal degree, *Advances in computational Mathematics*, 4(1) (1995) 389-396.
- [60] S. Ergun, Fluid flow through packed columns, *Chem. Eng. Prog.*, 48 (1952) 89-94.
- [61] C.Y. Wen, Mechanics of fluidization, in: *Chem. Eng. Prog., Symp. Ser.*, 1966, pp. 100-111.
- [62] P.C. Rouse, Characterisation and modelling of a uniformly graded, well-rounded coarse sand, University of British Columbia, 2005.
- Engineering Rock Mechanics, (1987) 129-163.
- [56] T.B. Anderson, R. Jackson, Fluid mechanical description of fluidized beds. Equations of motion, *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 6(4) (1967) 527-539.
- [57] J.J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics, *Annual review of astronomy and astrophysics*, 30 (1992) 543-574.
- [58] M. Kelager, Lagrangian fluid dynamics using smoothed particle hydrodynamics, University of Copenhagen: Department of Computer Science, 2 (2006).
- [59] H. Wendland, Piecewise polynomial, positive definite

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

Y. Khalili, A. Mahboubi, M. Haji-Sotoudeh, Coupled DEM-SPH Modeling of Saturated Sand, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 55(11) (2024) 2207-2226.

DOI: [10.22060/ceej.2023.21590.7772](https://doi.org/10.22060/ceej.2023.21590.7772)



