



Determining the effective stress parameter in drying path by MGGP method

E. Nikooee, K. Kamran Nejad

Department of Civil and Environmental Engineering, Shiraz University

ABSTRACT: The hydromechanical behavior of unsaturated soils depends on their state of stress. In recent years, the use of effective stress as a fundamental variable converting a multiphase medium to a continuum has appealed to researchers' attention. The determination of effective stress needs estimation of the so-called effective stress parameter, which is a function of other physical variables and essential parameters such as those of the soil water retention curve (SWRC). In the current study, multigene genetic programming (MGGP) has been employed to predict a relationship between the effective stress parameter of soils. The input variables are the net stress, suction, slope of the soil water retention curve, air entry value, and residual and saturated water contents. The comparison of the performance and accuracy of the obtained equation with the available equations as well as the values of effective stress parameters obtained from experimental tests indicate the reasonable adequacy and accuracy of the proposed equation. For this purpose, 101 data points of effective stress parameters from the literature were gathered and used. The high coefficient of determination obtained for the proposed equation, namely, 0.94, confirmed its reasonable accuracy. The parametric study revealed that an increase in the ratio of net stress to the air entry value will lead to an increase in the effective stress parameter for the same suction levels. However, a decrease in the effective stress parameter values was observed with the increase in the SWRC slope, and with the decrease in the ratio of residual to saturated water content.

Review History:

Received: Aug. 10, 2022

Revised: Mar. 08, 2023

Accepted: Apr. 05, 2023

Available Online: Apr. 21, 2023

Keywords:

Effective stress parameter

Artificial intelligence

Multi-gene genetic programming

Soil-water retention curve

Unsaturated soil

1- Introduction

More than two-thirds of the Earth's surface is covered with dry and semi-dry regions where soil layers are most often in unsaturated conditions. In unsaturated soils, σ' , denoting the effective stress has first been formulated by Bishop as follows (equation 1).

$$\sigma' = P + \chi(S) \quad (1)$$

where the parameter χ is the so-called effective stress parameter proposed by Bishop, suggested to be equal to the degree of saturation, P stands for net stress, and S specifies suction. However, his succeeding researchers have not found this approximation to be very appropriate and accurate. It should be noted that finding a suitable equation that accurately determines the value of the effective stress parameter in unsaturated soils is still an area of focus for researchers

The main goal of this study is to use a powerful machine learning approach called Multi-Gene Genetic Programming (MGGP), a branch of artificial intelligence (AI), to provide a suitable relationship for the effective stress parameter.

The main advantage of the MGGP approach over regression and other soft computing techniques is its ability to predict equations without prior assumptions about the shape of the sought relationship. In this study, parameters related to soil water retention such as air entry pressure (bubbling pressure), residual volumetric water content, saturated volumetric water content, soil suction, and net stress are considered as independent variables. Another important advantage of this study over other studies that used artificial intelligence is the use of air entry suction as the boundary value between unsaturated and saturated zones and thus the development of a two-part relationship for the effective stress parameter using AI; Furthermore, the suggested general form is tailored so as to respect the continuity of the effective stress parameter value at the air entry suction.

2- Methodology

GPtips 2.0 software and programming in the MATLAB environment were used to implement multi-gene genetic programming for finding a suitable formula for the effective stress parameter. Each of the SWRC parameters or any combination of these parameters can be considered as a suitable candidate for model inputs. Therefore, six parameters

*Corresponding author's email: enikooee@shirazu.ac.ir



Table 1. Final and optimized parameters of MGGP approach

Parameter	Value or type
Population size	400
Generations number	120
Tournament size	5
Elite percentage	0.15
Maximum tree depth	4
Optimized and final function set	Sqrt, Sum
Number of input variables	4
Maximum number of genes in each tree	8
Complexity metric	Expressional complexity

including net stress, suction, SWRC slope, air entry pressure, residual, and saturated volumetric water content were considered as model input variables. Then these variables were converted to dimensionless quantities appearing in equation (2) to serve as input variables of the model. The output variable was the effective stress parameter.

In this study, a set of 101 data was used for developing the model. After reviewing previous studies and finding those whose datasets included all target variables required for this study, data points were extracted from the relevant literature. These data were extracted based on the results of triaxial shear tests, from which the effective stress parameter values were determined and pressure plate, and filter paper experiments to determine the parameters of the soil water retention curve [1-10]. The dataset consists of seven unsaturated soil properties, namely, suction (S), air entry suction (h_b), net stress (P), residual water content (θ_r), volumetric water content at saturation (θ_s), soil water retention curve slope (λ), and the effective stress parameter (χ). Input variables were made dimensionless/normalized as: θ_r/θ_s , P/h_b and h_b/S and used together with λ . The dataset was divided into two separate groups: an 80% training dataset and the remaining data were selected for testing the accuracy and effectiveness of the model.

For the effective stress parameter, the following general form was considered, where function f has been obtained through multi-gene genetic programming.

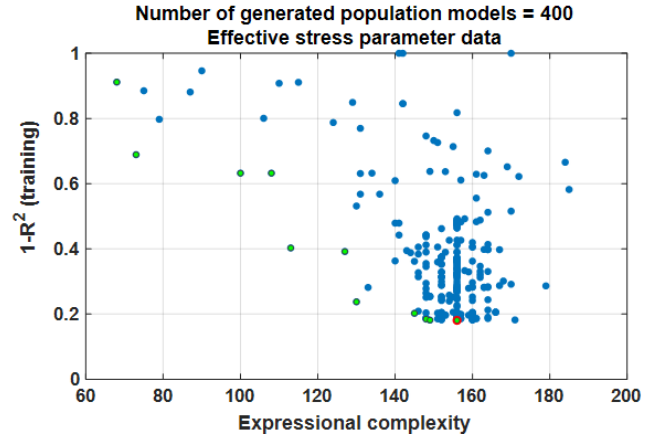


Fig. 1. Selection of the optimum models based on the complexity and accuracy

$$\chi = \begin{cases} 1 & \left(\frac{S}{h_b}\right) < 1 \\ 1 + f\left(\frac{h_b}{S}, \frac{P}{h_b}, \lambda, \frac{\theta_r}{\theta_s}\right)\left(\frac{h_b}{S} - 1\right) & \left(\frac{S}{h_b}\right) \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

3- Results and discussion

Figure 1 shows the selection of the optimal model based on the accuracy and complexity measures. As seen, the green points have the lowest complexity measure among different generations of simulations produced by the multi-gene genetic programming. The program has selected the equation that has both the lowest error and the lowest complexity measure simultaneously.

The obtained equation for function f reads as follows:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{h_b}{S}, \frac{P}{h_b}, \lambda, \frac{\theta_r}{\theta_s}\right) = & 4.2265\left(\frac{h_b}{S}\right) - 0.047935\left(\frac{P}{h_b}\right) - 0.68201\left(\frac{\theta_r}{\theta_s}\right) \\ & - 8.6725\sqrt{0.016667\left(\frac{P}{h_b}\right) + 1.4011\left(\frac{\theta_r}{\theta_s}\right)} + 4.4548\sqrt{1.0260\sqrt{\left(\frac{h_b}{S}\right)} + 0.29086\sqrt{\lambda}} \\ & + 18.066\sqrt{0.016667\left(\frac{P}{h_b}\right) + 1.4011\left(\frac{\theta_r}{\theta_s}\right)} + 1.9634 \\ & - 0.69224\sqrt{0.0083333\left(\frac{P}{h_b}\right) + 1.0526\left(\frac{h_b}{S}\right)} \\ & + 4.0152\sqrt{0.0083333\left(\frac{P}{h_b}\right) + 0.084602\lambda} \\ & - 0.69224\sqrt{1.0526\left(\frac{h_b}{S}\right) + 1.4011\left(\frac{\theta_r}{\theta_s}\right)} \\ & + 4.0857\left(0.0083333\left(\frac{P}{h_b}\right) + 1.4011\left(\frac{\theta_r}{\theta_s}\right)\right)^{\frac{1}{4}} \\ & - 6.4011\sqrt{\frac{h_b}{S}} - 1.6731\sqrt{\lambda} - 0.26253\lambda^{\frac{1}{4}} - 25.300 \end{aligned} \quad (3)$$

4- Conclusions

In this research, a multi-gene genetic programming approach was used to arrive at the effective stress parameter equation for unsaturated soils. The derived equation had reasonable accuracy compared to laboratory data containing 101 test points, and also performed well compared to the other relationships in the literature. The parametric study of the proposed equation indicated a significant influence of air entry suction and the net stress ratio on changes in the effective stress parameter with suction. The effect of the water retention curve slope and the ratio of residual to saturated volumetric water content on the effective stress parameter variation with suction was less pronounced than the other (aforementioned) variables.

References

- [1] I.-M. Lee, S.-G. Sung, G.-C. Cho, Effect of stress state on the unsaturated shear strength of a weathered granite, *Canadian Geotechnical Journal*, 42(2) (2005) 624-631.
- [2] A. Russell, N. Khalili, A unified bounding surface plasticity model for unsaturated soils, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30(3) (2006) 181-212.
- [3] A.R. Russell, N. Khalili, A bounding surface plasticity model for sands exhibiting particle crushing, *Canadian Geotechnical Journal*, 41(6) (2004) 1179-1192.
- [4] H. Rahardjo, O.B. Heng, L.E. Choon, Shear strength of a compacted residual soil from consolidated drained and constant water content triaxial tests, *Canadian Geotechnical Journal*, 41(3) (2004) 421-436.
- [5] A.W. Bishop, G. Blight, Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils, *Geotechnique*, 13(3) (1963) 177-197.
- [6] N. Khalili, F. Geiser, G. Blight, Effective stress in unsaturated soils: Review with new evidence, *International journal of Geomechanics*, 4(2) (2004) 115-126.
- [7] D.W. Rassam, D.J. Williams, A relationship describing the shear strength of unsaturated soils, *Canadian Geotechnical Journal*, 36(2) (1999) 363-368.
- [8] T.M. Thu, H. Rahardjo, E.-C. Leong, Effects of hysteresis on shear strength envelopes from constant water content and consolidated drained triaxial tests, in: *Proceedings of the Fourth International Conference on Unsaturated Soils*, 2006, pp. 1212-1222.
- [9] L. Miao, S. Liu, Y. Lai, Research of soil-water characteristics and shear strength features of Nanyang expansive soil, *Engineering Geology*, 65(4) (2002) 261-267.
- [10] C. Rampino, C. Mancuso, F. Vinale, Experimental behaviour and modelling of an unsaturated compacted soil, *Canadian Geotechnical Journal*, 37(4) (2000) 748-763.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

E. Nikooee, K. Kamran Nejad, *Determining the effective stress parameter in drying path by MGGP method*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 55(5) (2023) 225-228.

DOI: [10.22060/ceej.2023.21678.7792](https://doi.org/10.22060/ceej.2023.21678.7792)





تعیین پارامتر تنش موثر در شاخه خشک اندازی به روش برنامه نویسی ژنتیکی چندژنی

احسان نیکویی^{۱*}، کسری کامران نژاد^۲

دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران .

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۱/۰۵/۱۹
بازنگری: ۱۴۰۱/۱۲/۱۷
پذیرش: ۱۴۰۲/۰۱/۱۶
ارائه آنلاین: ۱۴۰۲/۰۲/۰۱

کلمات کلیدی:

پارامتر تنش موثر
هوش مصنوعی
برنامه نویسی ژنتیکی چندژنی
منحنی نگهداشت آب-خاک
خاک غیراشباع

خلاصه: رفتار هیدرومکانیکی خاکهای غیراشباع تحت تاثیر وضعیت تنش قرار دارد. در سالهای اخیر استفاده از تنش موثر به عنوان متغیر بنیادین که یک محیط چند فازی را به یک محیط پیوسته معادل تبدیل میکند بیش از پیش در بین محققان گسترش یافته است. محاسبه تنش موثر نیازمند تخمین پارامتر تنش موثر است که خود تابعی از سایر متغیرهای فیزیکی تاثیرگذار و پارامترهای اساسی همانند خصوصیات منحنی نگهداشت آب-خاک میباشد. در این تحقیق از برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی (MGGP) برای پیش بینی رابطه تنش موثر براساس پارامترها و متغیرهای فیزیکی تاثیرگذار استفاده شده است. مزیت اصلی رویکرد MGGP توانایی آن در پیش بینی معادلات بین متغیرهای یک سیستم پیچیده فیزیکی بدون هیچگونه فرض قبلی در مورد شکل احتمالی رابطه عملکردی است. مجموعه دادههای ورودی شامل تنش خالص، مکش، شیب منحنی نگهداشت آب خاک (SWRC)، فشار ورود هوا، مقدار آب حجمی باقیمانده و اشباع است. مقایسه پیش بینی مدل با دادههای آزمایشگاهی و همچنین روابط سایر محققین نشان داد عملکرد مدل در تخمین پارامتر تنش موثر قابل قبول و از دقت بالایی برخوردار است. دقت بالای معادله پیشنهادی، توسط ضریب تعیین ۰.۹۴ بدست آمده برای ۱۰۱ داده پارامتر تنش موثر گردآوری شده از ادبیات تحقیق، تایید گردید. مطالعه پارامتری نشان داد که افزایش نسبت تنش خالص به مکش ورود هوا، به افزایش پارامتر تنش موثر در مکشهای یکسان می انجامد. درحالی که افزایش شیب منحنی نگهداشت آب-خاک و یا کاهش نسبت آب باقیمانده به آب اشباع به کاهش پارامتر تنش موثر در مکشهای یکسان می انجامد.

۱- مقدمه

تنش مختلفی می تواند بیان شود. در سالهای اخیر دو دسته متغیر حالت تنش برای خاکها غیراشباع به کار گرفته شده اند. در برخی از مطالعات مقاومت برشی خاکهای غیر اشباع براساس تنش خالص و مکش ماتریکی و در دسته ای دیگر براساس تنش موثر تعریف گردیده است.

در زمره مدل هایی که با در نظر گرفتن دو متغیر حالت مستقل، یعنی مکش، S و تنش میانگین خالص، P ارائه شده اند، مدل پیشنهاد شده توسط فردلاند وهمکاران [۲]، همان طور که در رابطه (۱) آورده شده است، قرار می گیرد:

$$\begin{aligned} \tau &= c' + \text{Stan} \phi^b + P \tan \phi' \\ S &= u_a - u_w \\ P &= \sigma - u_a \end{aligned} \quad (1)$$

بیش از دو سوم سطح زمین با ناحیه های خشک و نیمه خشک پوشانده شده است [۱]. علاوه بر آن تغییرات وضع آب و هوا و گرمایش زمین سبب بارشهای شدید کوتاه مدت و طولانی شدن دوره های خشکسالی گردیده است. در چنین شرایطی، طراحی بهینه بسیاری از سازه های خاکی و پروژه های ژئوتکنیکی (پی ها، سازه های نگهدارنده و شیب ها) نیازمند دانستن مقاومت برشی خاک غیراشباع است. مقاومت برشی غیراشباع خاک ممکن است به طور مستقیم در آزمایشگاه [۲-۶] یا به طور غیرمستقیم با استفاده از معادلات تجربی یا نیمه تجربی تعیین شود. چالش های اصلی تعیین مقاومت برشی خاک های غیر اشباع در آزمایشگاه در مقایسه با روش های آزمایش مرسوم برای خاک های اشباع شامل پیچیدگی آزمایش های سه محوری غیراشباع، به ویژه زمان طولانی آزمایش ها برای رسیدن مکش به تعادل و هزینه میباشند. مقاومت برشی خاک های غیراشباع برپایه متغیرهای حالت

* نویسنده عهده دار مکاتبات: enikooee@shirazu.ac.ir



برای ارائه یک رابطه مناسب برای پارامتر تنش موثر است. مزیت اصلی رویکردهای MGGP نسبت به رگرسیون و سایر تکنیک‌های محاسباتی نرم، توانایی آن در پیش‌بینی معادلات بدون فرض قبلی برای شکل رابطه مورد جستجو می باشد. روش برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی، همچنین به دلیل ساختار چند ژنی و ترکیب ساختارهای درختی، قابلیت انعطاف بیشتر و دقت بالاتری را در پیدا نمودن رابطه های پیچیده بین متغیرهای فیزیکی را داراست. در این مطالعه پارامترهای نگهداشت آب خاک مانند فشار ورود هوا (حباب هوا) h_b ، مقدار آب حجمی باقیمانده θ_r ، محتوای حجمی اشباع آب θ_s ، مکش خاک (S) و همچنین تنش خالص (P) به عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفته می شوند. یک مزیت اساسی دیگر این مطالعه نسبت به سایر مطالعات صورت گرفته با استفاده از هوش مصنوعی، استفاده از مکش ورود هوا به عنوان مرز ناحیه اشباع و غیر اشباع و در نتیجه ارائه یک رابطه دوضابطه ای برای پارامتر تنش موثر می باشد. در ادامه پس از مرور روش های موجود برای تعیین پارامتر تنش موثر، روش برنامه نویسی ژنتیکی چندژنی و پایگاه داده ای مورد استفاده شرح داده می شوند. سپس معیارهای بررسی کارایی روش ارائه می گردند. در انتها جزئیات مدلسازی و معادله به دست آمده برای پارامتر تنش موثر بیان می گردد و دقت مدل ارائه شده در مقایسه با روابط پیشنهادی سایر محققان بررسی می گردد.

۲- روش های موجود برای تعیین پارامتر تنش موثر

روش های مختلفی برای بدست آوردن پارامتر تنش موثر وجود دارد. این روشها را می توان به چهار گروه اصلی، که در زیر شرح داده شده اند، طبقه بندی کرد.

۲-۱- مطالعات آزمایشگاهی

گروه اول شامل نتایج مطالعات آزمایشگاهی است که عمدتاً بر اساس فرض یکتابودن خط وضعیت بحرانی (گسیختگی) برای خاک در حالت اشباع و غیر اشباع می باشد. در این مطالعات، مقدار پارامتر تنش موثر مستقیماً از نتایج آزمایشگاهی و عمدتاً از نتایج آزمایش های سه محوری غیر اشباع و از رابطه زیر بدست می آید [۱۳]:

$$\chi = \frac{q_f - (p_f - u_a)}{(u_a - u_w)} \quad (5)$$

که در آن τ مقاومت برشی، u_a فشار هوا، u_w فشار آب منفذی، ϕ^b زاویه تغییر مقاومت برشی با توجه به مکش ماتریک، ϕ' زاویه اصطکاک موثر و c' چسبندگی موثر می باشند [۷-۹].
در بیان مقاومت برشی بر حسب تنش موثر، فرض بر برقراری پوش گسیختگی موهر-کولمب در حالت غیر اشباع می باشد (رابطه ۲):

$$\tau = c' + \sigma' \tan \phi' \quad (2)$$

که σ' تنش موثر در خاک غیر اشباع است که معادله آن اولین بار توسط بیشاپ [۱۰] به صورت رابطه ۳ بیان شده است:

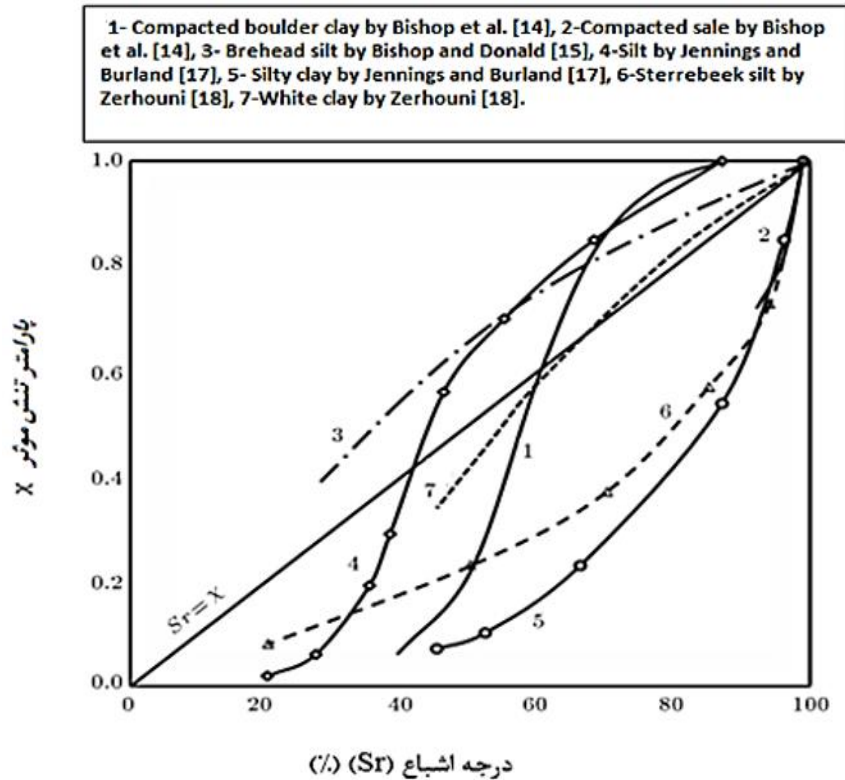
$$\sigma' = P + \chi(S) \quad (3)$$

χ پارامتر تنش موثر است که بیشاپ پیشنهاد نمود برابر با درجه اشباع اختیار گردد. هر چند محققان بعدی این تقریب را چندان مناسب نداشته اند (شکل ۱). با جایگذاری رابطه ۲ در رابطه پوش گسیختگی موهر-کولمب معادله زیر بدست می آید:

$$\tau = c' + [P + \chi S] \tan \phi' \quad (4)$$

که در آن χ پارامتر تنش موثر است. پارامتر χ برای خاک های خشک مقدار صفر و برای خاک های اشباع مقدار یک را اختیار می نماید.
مقدار χ تحت تأثیر تغییر ساختار خاک در اثر تغییرات سطح تنش خالص قرار می گیرد و در چرخه های تراندازی و خشک اندازی نیز تغییر می کند. روابط مختلفی برای این پارامتر توسط محققان بیان شده است که در بخش بعدی ذکر شده است. علیرغم پژوهش های قابل توجهی که در ادبیات تحقیق برای دستیابی به یک رابطه بسته مناسب برای پارامتر تنش موثر وجود دارد [۱۲ و ۱۱ و ۹]، دستیابی به یک رابطه مناسب که برای انواع خاک ها و مقدار مختلف سطح مکش ماتریک، با دقت بالایی، مقدار پارامتر تنش موثر در خاک های غیر اشباع را به دست دهد، همچنان مورد توجه محققین می باشد.

هدف اصلی این مقاله استفاده از یک رویکرد قدرتمند به نام برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی (MGGP)، شاخه ای از روش هوش مصنوعی،



شکل ۱. پارامتر تنش موثر مقابل درجه اشباع برای تعدادی از خاکهای مختلف توسط زرهونی [۱۸]

Fig. 1. Effective stress parameter versus saturation for different soils by Zerhouni [18]

۲-۲- روابط تجربی براساس برآزش

براساس نتایج بدست آمده از گروه اول مطالعات، محققان اقدام به ارائه روابطی براساس برآزش روابط مختلف به داده ها نمودند که پارامترهای تنش موثر را با پارامترها و متغیرهای خاک غیراشباع مانند مکش ماتریک، مقدار مکش ورود هوا، محتوای آب اشباع و محتوای آب حجمی باقیمانده مرتبط می کنند. ایچیسون [۱۹] رابطه زیر را برای پارامتر تنش موثر ارائه می دهد:

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{if } S_r = 1 \\ \left(\frac{\alpha}{S}\right) h_b & \text{if } S_r < 1 \end{cases} \quad (6)$$

در این رابطه q_f و p_f ، تنش های کل میانگین و انحرافی در صفحه ی گسیختگی و M ، شیب خط گسیختگی است.

براین اساس، بیشاپ و همکاران [۱۴] اولین محققانی هستند که χ را برای انواع رس با استفاده از آزمایش های مقاومت برشی اندازه گیری کردند؛ نتایج ایشان در شکل ۱ نشان داده شده است. در ادامه، بیشاپ و دونالد [۱۵]، جنینگز [۱۶] و سپس جنینگز و بورلند [۱۷] چندین آزمایش ترتیب دادند و رابطه بین درجه اشباع و χ را برای خاک های سیلتی ترسیم کردند. زرهونی [۱۸] به بررسی مطالعه محققان پیشین و تکمیل آن برای انواع دیگر خاک پرداخت و به صورت نشان داده شده در شکل ۱، در پایان نامه دکتری خود تمامی نتایج را ارائه نمود. همانطور که از این نمودار بر می آید رابطه بین درجه اشباع و پارامتر تنش موثر، یک رابطه پیچیده بوده و وابسته به جنس خاک و در نتیجه پارامترهای فیزیکی آن می باشد.

$$\chi = \left(\frac{S}{h_b} \right)^{3-D} \quad (10)$$

که در آن D بعد فراکتال سطح حفرات خاک است. مشکل این روابط ساده سازی بسیار در صورت بندی ریاضی مساله و هندسه اختیار شده برای حفرات و دانه های خاک می باشد. علاوه بر آن استفاده از این روابط نیازمند دانستن بعد فراکتالی حفرات و دانه های خاک است که تعیین آن به صورت دقیق نیز نیازمند روش های تصویر برداری است [۱۲ و ۲۲]. همچنین محققان با استفاده از معادلات بقای فاز های مختلف و سطوح تماس آن ها به تعیین پارامتر تنش موثر در خاک های غیر اشباع پرداخته اند [۲۳]. استفاده از ترمودینامیک و تئوری مکانیک محیط های متخلخل، رویکرد دیگر محققان برای تدوین معادلات تنش موثر به صورت تئوری بوده است [۲۴ و ۲۳].

۲-۴- هوش مصنوعی

در سال های اخیر روش های هوش مصنوعی مانند شبکه عصبی (NN)، برنامه ریزی ژنتیکی (GP)، برنامه ریزی بیان ژن (GEP)، برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی (MGGP)، رگرسیون چند جمله ای تکاملی (EPR) و سایر روش های یادگیری ماشینی در رشته های مختلف مهندسی عمران استفاده شده اند [۲۵-۳۲]. پیش بینی پارامتر تنش موثر با استفاده از هوش مصنوعی نیز مورد توجه محققان قرار گرفته است. کابادلن [۳۱] یک مدل شبکه عصبی با شش نورون در لایه ورودی ایجاد کرد که در بردارنده زاویه مقاومت برشی، مقدار ورودی هوا، درصد ماسه، درصد یزدانه (رس ولای) خاک، مکش و شاخص پلاستیسیته بود. لایه پنهان شامل سه نورون و پارامتر تنش موثر به عنوان لایه خروجی در نظر گرفته شد.

اژدری و همکاران [۳۲] برای پیش بینی پارامتر تنش موثر، یک شبکه پرسپترون چند لایه در نظر گرفتند با شش نورون در لایه ورودی که شامل مکش ورود هوا، محتوای آب حجمی در شرایط باقیمانده و اشباع، شیب منحنی نگهداشت آب خاک، تنش خالص، مکش و بایاس بود. لایه پنهان شامل هفت نورون و پارامتر تنش موثر به عنوان لایه خروجی قرار داده شده بود.

با وجود پتانسیل روش شبکه عصبی، انواع دیگر روش های هوش مصنوعی همانند روش برنامه نویسی ژنتیکی برتری قابل ملاحظه ای نسبت به آن ها دارند. مزیت اصلی آن ها، توانایی به دست آوردن یک رابطه صریح بین متغیرهای یک مساله فیزیکی بدون هیچ فرض قبلی در مورد شکل کلی رابطه ریاضی توصیف کننده آن پدیده می باشد.

که در آن S مکش ماتریک، h_b مکش ورود هوا و α ضریب تجربی با مقادیری از $0/3$ تا $0/35$ است که برای آن به صورت متوسط مقدار $0/325$ اختیار می گردد. خلیلی و خباز [۱۱] نشان دادند که پارامتر تنش موثر χ در مکش های زیر فشار ورود هوا، برابر با یک است و رابطه خطی بین لگاریتم پارامتر تنش موثر و لگاریتم نسبت مکش ارائه کردند:

$$\chi = \begin{cases} \left(\frac{S}{h_b} \right)^\gamma & \text{for } S > h_b \\ 1 & \text{for } S \leq h_b \end{cases} \quad (7)$$

که در آن γ از $0/65$ (کران پایینی معادله) تا $0/4$ (کران بالایی)، متغیر می باشد و به طور میانگین برای آن $0/55$ در نظر گرفته می شود. لو و همکاران در سال ۲۰۱۰، پیشنهاد نمودند که پارامتر تنش موثر برابر با درجه اشباع موثر اختیار گردد [۲۰]:

$$\chi = \frac{S_r - S_r^*}{I - S_r^*} \quad (8)$$

که در آن S_r درجه اشباع و S_r^* درجه اشباع باقیمانده است. در ادامه، راسل و خلیلی [۲۱] معادله زیر را عمدتاً برای خاک های ماسه ای معرفی نمودند:

$$\chi = \begin{cases} 1 & \text{for } \left(\frac{S}{h_b} \right) < 1 \\ \left(\frac{S}{h_b} \right)^{-0.55} & \text{for } 1 < \left(\frac{S}{h_b} \right) < 25 \\ 25^{0.45} \left(\frac{S}{h_b} \right)^{-1} & \text{for } \left(\frac{S}{h_b} \right) > 25 \end{cases} \quad (9)$$

۲-۳- روابط برپایه فیزیک و هندسه محیط متخلخل

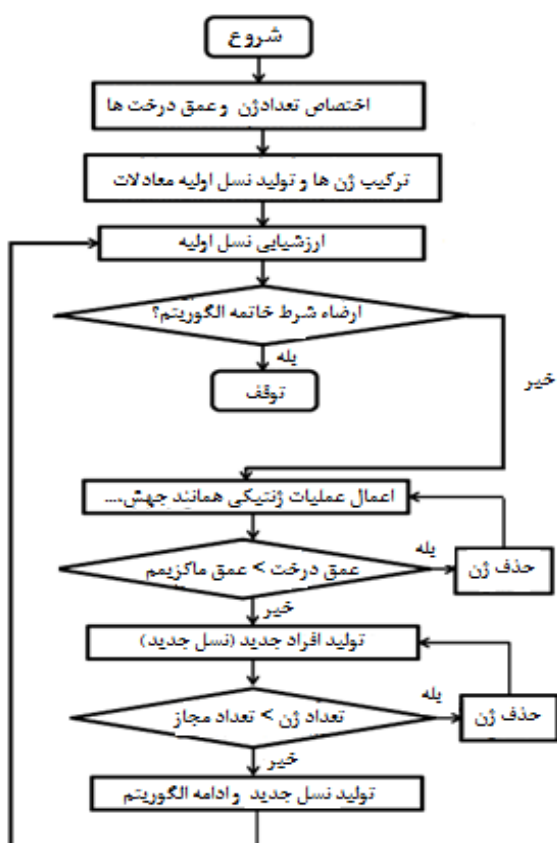
در این گروه، رابطه پارامتر تنش موثر، به صورت ریاضی و با استفاده از ابعاد فراکتال سطح حفرات خاک تعریف شده است:

برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی در ادامه و با تکامل روش هایی همانند برنامه نویسی رگرسیون چند جمله‌ای تکاملی (Evolutionary Poly-nomial Regression; EPR Gene) و برنامه‌ریزی بیان ژن (Expression Programming) در علوم کامپیوتر ارائه شده است. جوهری و همکاران (۲۰۱۳) از برنامه‌ریزی بیان ژن و جواد و آهنگر (۲۰۲۱) از برنامه نویسی رگرسیون چند جمله‌ای تکاملی برای تعیین پارامتر تنش موثر بهره گرفتند [۳۳ و ۳۴]. در رابطه های بدست آمده از هوش مصنوعی در مطالعات محققان پیشین، به تفکیک رابطه به قبل و بعد از مکش ورود هوا و نیز به پیوستگی رابطه (به دست دادن مقدار دقیق یک در مکش فشار هوا) توجه نشده است. حال آنکه این نکته در روابط تجربی ارائه شده توسط محققان قبلی همانند خلیلی و خباز در نظر گرفته شده است و هر تدقیقی در رابطه تنش موثر باید پیوستگی رابطه در ناحیه اشباع و غیر اشباع و نیز مقدار یک در مکش ورود هوا را به صورت ریاضی ارضا نماید. در تحقیق پیش رو علاوه بر توجه به این نکته، از یک روش نوین، برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی بهره گرفته شده است.

برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی شاخه ای از هوش مصنوعی و توسعه اخیر برنامه نویسی ژنتیک است که به دلیل استفاده از ژن های مختلف و گسترش ساختار درختی برنامه نویسی ژنتیکی کلاسیک از انعطاف بیشتری نسبت به روش های دیگر در جستجوی روابط بین متغیرهای مختلف برخوردار است، و از این رو در میان محققان علوم کامپیوتر جایگاه ویژه ای یافته است. با توجه به پیچیدگی رابطه بین پارامتر تنش موثر و متغیرهای فیزیکی همانند تنش خالص، مکش ماتریک و پارامترهای منحنی نگهداشت آب-خاک، این تحقیق به استفاده از روش برنامه نویسی چندژنی در این راستا دست زده است. اهداف این مقاله را می توان به صورت زیر دسته بندی کرد:

- امکان سنجی MGPP به منظور یافتن وابستگی پارامتر تنش موثر به مکش خاک، تنش خالص و پارامترهای کنترل کننده منحنی نگهداشت آب خاک.
- انجام تحلیل حساسیت و مطالعه پارامتری با استفاده از مدل توسعه یافته MGPP.
- ارزیابی قابلیت پیش بینی مدل و مقایسه دقت رابطه به دست آمده از MGPP با سایر روابط محققان.

۳- برنامه نویسی ژنتیکی چندژنی
برنامه ریزی ژنتیکی چند ژنی یا همان MGPP (Multi-Gene)



شکل ۲. الگوریتم مدل سازی به روش برنامه نویسی ژنتیکی

Fig. 2. Modeling algorithm for MGPP

۴- مدل‌سازی MGPP پارامتر تنش موثر خاکهای غیراشباع

از نرم افزار Gtips 2.0 و برنامه نویسی در محیط MATLAB برای پیاده سازی برنامه نویسی ژنتیکی چندژنی استفاده گردید و از آن جهت یافتن فرمول مناسب برای پارامتر تنش موثر بهره گرفته شد. نرم افزار Gtips 2.0 که خود نیز به صورت مجموعه ای از توابع در محیط MATLAB توسط دانشگاه نیوکاسل تهیه شده است، امکان پیاده سازی عملگرهای برنامه نویسی ژنتیکی (جهش، تولید نسل، انتخاب فرد برتر برای نسل بعدی) را در محیط MATLAB فراهم می آورد. به منظور مدل‌سازی برنامه نویسی ژنتیکی چندژنی جهت تعریف تابع مورد نیاز در این تحقیق (بر اساس یک معادله دوضابطه ای)، نداشت بین توابع ریاضی مورد نیاز برای پارامتر تنش موثر و علاوه بر آن معرفی پایگاه داده ای مجموعه آموزش و تست (به عبارت دیگر گسترش مجموعه توابع این نرم افزار برای مساله مورد مطالعه تحت برنامه نویسی ژنتیکی چندژنی)، کدنویسی در محیط-MATLAB صورت گرفت. مطالعات پیشین وابستگی پارامتر تنش موثر را به پارامترهای منحنی نگهداشت آب- خاک (SWRC) به خوبی نشان داده اند [۲۴]. از این رو، هر یک از پارامترهای SWRC و یا هر ترکیبی از این پارامترها می توانند به عنوان کاندیدای مناسبی برای ورودی های مدل در نظر گرفته شوند. بنابراین، شش پارامتر، شامل تنش خالص، مکش، شیب نمودار SWRC، فشار ورود هوا، محتوای آب حجمی باقیمانده و محتوای آب حجمی اشباع به عنوان متغیرهای ورودی مدل در نظر گرفته شدند. سپس این متغیرها به کمیت های بدون بعد، فهرست شده در جدول ۲، تبدیل شدند تا به عنوان پایانه های ورودی خدمت کنند. ترمینال خروجی پارامتر تنش موثر مربوط به مکش ورودی اختصاص داده شده بود.

انتخاب فرمول مناسب بر اساس سطح پیچیدگی کمتر و دقت پیش بینی آن (بر اساس معیارهای عملکردی معرفی شده در ذیل) می باشد. تعریف ساختار MGPP مستلزم تعیین تعداد ژن ها و همچنین اندازه ژن است. اندازه ژن برابر است با حداکثر تعداد عملکردها و پایانه هایی که می توان در ژن ذخیره کرد. اندازه ژن معمولاً با پیچیدگی مسئله کنترل می شود و عمدتاً با تعدادی شبیه سازی اولیه بر اساس سرعت رسیدن به جواب بهینه و پیچیدگی روابط بدست آمده، بهترین اندازه ژن تعیین می گردد.

معیار توقف برای فرآیند تکامل مدل MGPP اینگونه در نظر گرفته شد که تعداد نسل های تولیدی (روابط تخمین زده شده) از ۱۲۰ بیشتر نگردد یا میزان خطای پیش بینی (انحراف جذر میانگین مربعات) کمتر از ۰/۰۰۱ گردد. پارامتر های مدل در جدول ۱ ارائه شده اند. لازم به ذکر است که الگوریتم

جدول ۱. پارامترهای مدل نهایی

Table 1. Parameters of the final model

پارامتر	مقدار یا نوع
اندازه جمعیت (تعداد مدلها)	۴۰۰
تعداد نسل ها	۱۲۰
اندازه تورنمنت	۵
درصد برگزیده	۰/۱۵
عمق حداکثر درخت	۴
مجموعه بهینه توابع	جذرو جمع
تعداد متغیرهای ورودی	۴
تعداد ژن حداکثر هر درخت	۸
معیار بررسی پیچیدگی	پیچیدگی عبارتی

مورد استفاده در تحقیق حاضر، از معیار پیچیدگی عبارتی^۱ برای سنجش میزان پیچیدگی معادلات به دست آمده بهره می گیرد. پیچیدگی عبارتی یک زیر درخت سازنده معادله، بیانگر تعداد گره های آن زیر گراف (زیر درخت) معادله ریاضی می باشد. در روش برنامه نویسی ژنتیکی چندژنی، از ترکیب زیر درخت های (ژن های) مختلف تشکیل شده از عبارات و توابع ریاضی برای بیان معادله استفاده می شود. بنابراین پیچیدگی عبارتی یک معادله برابر با مجموع پیچیدگی عبارتی زیر گراف های نشان دهنده آن معادله می باشد.

۵- پایگاه داده مورد استفاده برای مدل‌سازی

در این مطالعه، مجموعه داده های مورد استفاده برای توسعه مدل، ۱۰۱ داده، پس از بررسی تحقیقات پیشین و انتخاب داده های مناسب (که شامل همه متغیرهای مورد بررسی باشند)، از ادبیات تحقیق استخراج شده اند [۳۹-۴۸]. این داده ها بر اساس نتایج آزمون های سه محوری برشی برای تعیین پارامتر تنش موثر و صفحه فشار و کاغذ فیلتر برای تعیین پارامترهای منحنی نگهداشت آب- خاک استخراج شده اند [۳۹-۴۸]. این مجموعه داده ها از هفت ویژگی خاک های غیر اشباع تشکیل شده است: مکش (S)، مکش ورود هوا (h_b)، تنش خالص (P)، محتوای آب باقیمانده (θ_r)، محتوای

1 Expressional complexity

جدول ۲. محدوده داده های پایگاه داده برنامه نویسی ژنتیکی

Table 2. Database variables range used for MGGP

متغیر ورودی	حداقل	حداکثر
$\frac{P}{h_b}$	۰	۱۲۰
$\frac{h_b}{S}$	۰/۰۱	۳/۵۵
λ	۰/۱۹	۱۱/۸۲
$\frac{\theta_r}{\theta_s}$	۰	۰/۷۱
χ	۰/۰۹	۱

گرفته شده است. این موضوع (پیوستگی ریاضی رابطه در ناحیه اشباع و غیر اشباع و اختیار مقدار یک در مکش ورودها) در سایر تحقیقات انجام شده توسط روش های هوش مصنوعی که به بیان رابطه ای برای پارامتر تنش موثر ختم گردند، در نظر گرفته نشده است.

۶- عملکرد

در برنامه نویسی ژنتیکی چندژنی، مقادیر پارامترهای مدل بر عملکرد مدل تأثیرگذارند. این پارامترها عبارتند از تعداد ژنها، اندازه تورنمنت، تعداد نسلهای تولیدی و نرخ عملگرهای ژنتیکی، مقادیر مناسب برای این پارامترها براساس مقادیر پیشنهادی در مطالعات گذشته و نیز تحلیلی از پیچیدگی و دقت روابط بدست آمده انتخاب شدند [۵۱]. برای بررسی عملکرد معادلات تولیدی توسط برنامه نویسی ژنتیکی، در پایان هر سناریو و تولید نسلی از معادلات، خطای جذر میانگین مربعات برای هر دو مجموعه آموزشی و آزمایشی به منظور شناسایی مقادیری که کمترین خطا را می دهند، ثبت گردید. انتخاب معادله بهینه بر اساس کمترین خطای جذر میانگین مربعات و ضریب تعیین (تشخیص) انجام گردید و هنگامی که تفاوت در خطای بین دو یا سه مورد ناچیز بود، مدلی که منجر به تعداد ژن کمتر می شود، انتخاب شد. بنابراین هر دو معیار پیچیدگی عبارت ریاضی بدست آمده و خطای R^2 و $RMSE$ استفاده شده اند. در نهایت رابطه به دست آمده از نقطه نظر سه معیار خطای ضریب تعیین (تشخیص) R^2 ، خطای جذر میانگین مربعات $RMSE$ و مقدار درصد میانگین خطای مطلق (MAPE) با روابط پیشین مقایسه گردید. این معیارهای عملکرد در جدول ۳ بیان شده اند.

جدول ۳. معیارهای عملکرد استفاده شده در تحلیل معادلات

Table 3. Performance measures used for analyzing the obtained equations

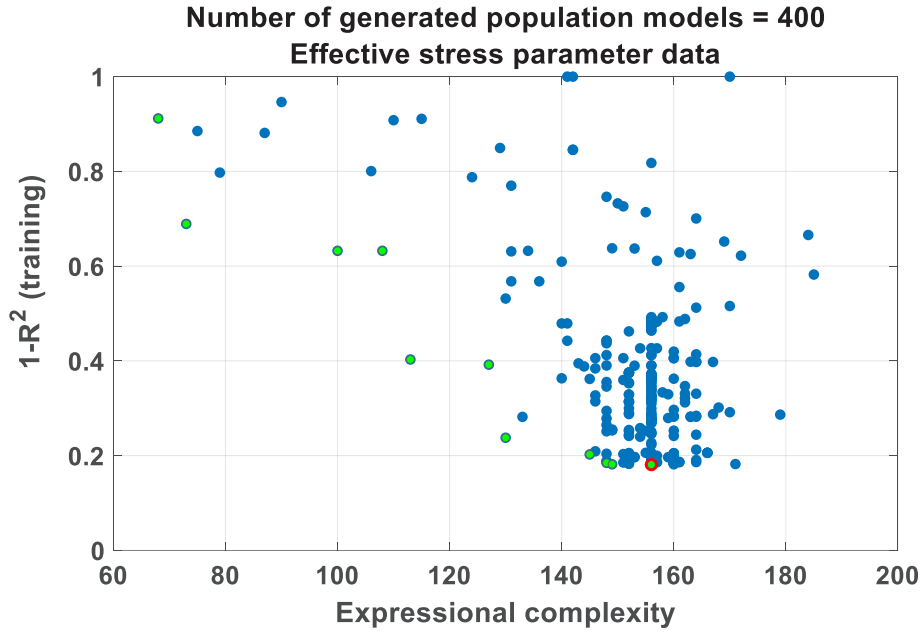
معیار عملکرد	رابطه
خطای ضریب تعیین (تشخیص)	$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y})^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$
خطای میانگین مجذور مربعات	$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y})^2}$
درصد میانگین خطای مطلق	$MAPE = \frac{100\%}{N} \sum \left \frac{y_i - \hat{y}}{y_i} \right $

آب حجمی اشباع (θ_s)، شیب منحنی نگهداشت آب خاک (λ) و پارامتر تنش موثر (χ)؛ P ، h_b ، S و P به این صورت بدون بعد شدند: $\frac{P}{h_b}$ و $\frac{h_b}{S}$. جدول ۲ دامنه متغیرهای بی بعد استفاده شده در برنامه نویسی ژنتیکی چندژنی را نشان می دهد.

مجموعه داده ها به دو گروه جداگانه تقسیم شدند: مجموعه داده آموزشی با ۸۰ درصد داده ها و باقی داده ها برای تأیید صحت و اثربخشی مدل انتخاب شدند. برای پارامتر تنش موثر رابطه ای به فرم زیر در نظر گرفته شد. این رابطه دراصل تعمیم رابطه خلیلی و خباز (۱۹۹۸) [۴۹] و خلیلی و زرگرباشی (۲۰۱۰) [۵۰] بر پایه متغیرهای تأثیرگذار منحنی مشخصه آب خاک می باشد که فرم ریاضی صریح آن از طریق هوش مصنوعی در این تحقیق به دست آمده و در بخش های بعدی گزارش می گردد:

$$\chi = \begin{cases} 1 & \left(\frac{S}{h_b}\right) < 1 \\ 1 + f\left(\frac{h_b}{S}, \frac{P}{h_b}, \lambda, \frac{\theta_r}{\theta_s}\right) \left(\frac{h_b}{S} - 1\right) & \left(\frac{S}{h_b}\right) \geq 1 \end{cases} \quad (11)$$

علاوه بر استفاده از الگوریتم برنامه نویسی چندژنی، ارائه رابطه به فرم بالا از نظر ریاضی تضمین می نماید که پیوستگی رابطه تنش موثر در ناحیه اشباع و غیر اشباع، پس از مکش ورود هوا حفظ گردد علاوه بر آن رابطه به طور خودکار مقدار یک را برای نتایج پارامتر تنش موثر در ناحیه اشباع اختیار خواهد کرد. از برنامه نویسی ژنتیکی چندژنی در تعیین فرم رابطه تابع f بهره



شکل ۳. انتخاب مدل بهینه براساس کمینه سازی پیچیدگی و بیشینه سازی دقت

Fig. 3. Selection of the optimum model based on minimizing complexity and maximizing accuracy

چند ژنی برای تابع f به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{h_b}{S}, \frac{P}{h_b}, \lambda, \frac{\theta_r}{\theta_s}\right) = & 4.2265\left(\frac{h_b}{S}\right) - 0.047935\left(\frac{P}{h_b}\right) \\
 & - 0.68201\left(\frac{\theta_r}{\theta_s}\right) - 8.6725\sqrt{0.016667\left(\frac{P}{h_b}\right) + 1.4011\left(\frac{\theta_r}{\theta_s}\right)} \\
 & + 4.4548\sqrt{1.0260\sqrt{\left(\frac{h_b}{S}\right)} + 0.29086\sqrt{\lambda}} \\
 & + 18.066\sqrt{0.016667\left(\frac{P}{h_b}\right) + 1.4011\left(\frac{\theta_r}{\theta_s}\right)} + 1.9634 \\
 & - 0.69224\sqrt{0.0083333\left(\frac{P}{h_b}\right) + 1.0526\left(\frac{h_b}{S}\right)} \\
 & + 4.0152\sqrt{0.0083333\left(\frac{P}{h_b}\right) + 0.084602\lambda} \\
 & - 0.69224\sqrt{1.0526\left(\frac{h_b}{S}\right) + 1.4011\left(\frac{\theta_r}{\theta_s}\right)} \\
 & + 4.0857\left(0.0083333\left(\frac{P}{h_b}\right) + 1.4011\left(\frac{\theta_r}{\theta_s}\right)\right)^{\frac{1}{4}} \\
 & - 6.4011\sqrt{\frac{h_b}{S}} - 1.6731\sqrt{\lambda} - 0.26253\lambda^{\frac{1}{4}} - 25.300
 \end{aligned} \quad (13)$$

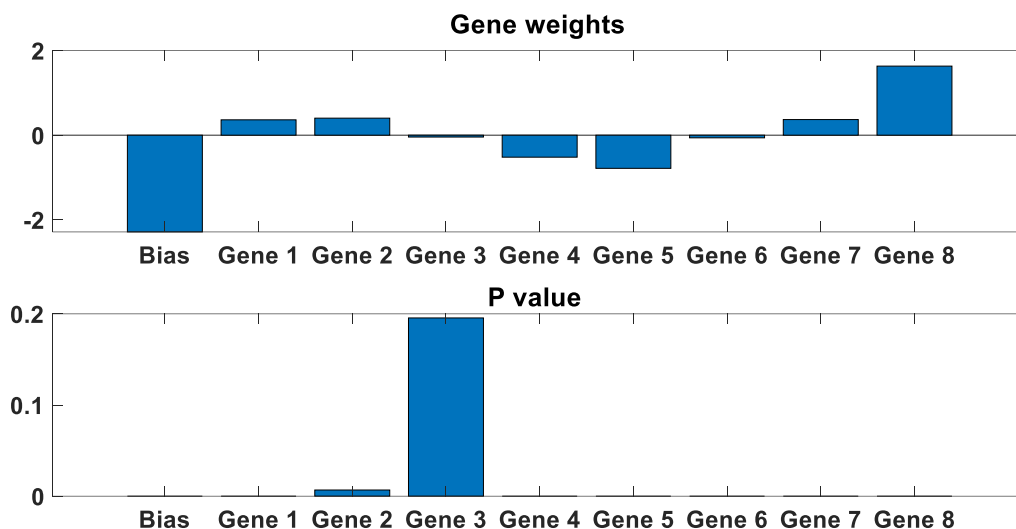
۷- نتایج

شکل ۳ انتخاب مدل بهینه را براساس دقت و پیچیدگی عبارت بدست آمده نشان می دهد. رنگ سبز نشان دهنده پوش مجموعه ی نقاط (پیچیدگی عبارتی و دقت) می باشد. همانگونه که دیده می شود نقاط سبز دارای کمترین پیچیدگی عبارتی در بین نسل های مختلف شبیه سازی تولید شده توسط برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی می باشند. برنامه به انتخاب آن رابطه ای دست زده است که دارای دو خصوصیت کمترین خطا و پیچیدگی عبارتی به صورت توامان است.

در این تحقیق، براساس معادله ۱۱، که جهت یادآوری در ادامه به آن اشاره می شود، پارامترتنش موثر به صورت زیر تعریف گردیده است:

$$\chi = \begin{cases} 1 & \left(\frac{S}{h_b}\right) < 1 \\ 1 + f\left(\frac{h_b}{S}, \frac{P}{h_b}, \lambda, \frac{\theta_r}{\theta_s}\right)\left(\frac{h_b}{S} - 1\right) & \left(\frac{S}{h_b}\right) \geq 1 \end{cases} \quad (12)$$

که در آن رابطه ی بدست آمده پس از استفاده از برنامه نویسی ژنتیکی



شکل ۴. وزن هرژن و بررسی آماری اهمیت هرژن

Fig. 4. Weight of each gene and statistical analysis of its importance

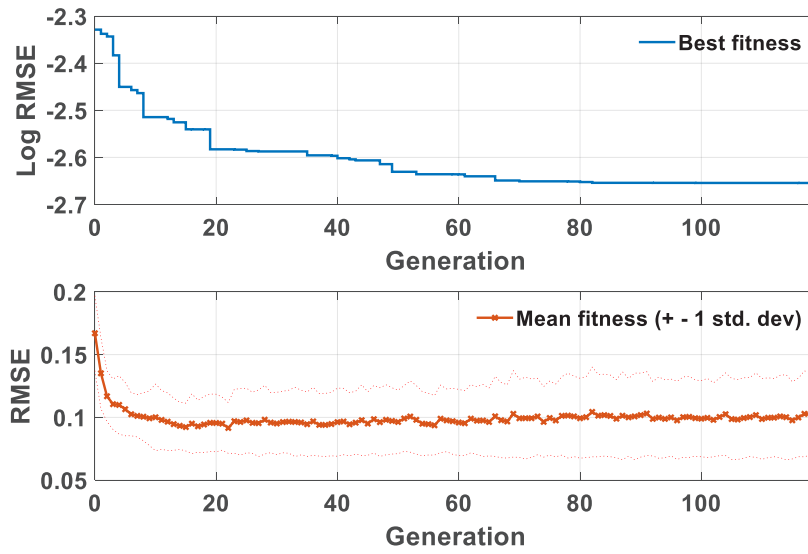
۸- مطالعه پارامتری

در این بخش مطالعه پارامتری معادله به دست آمده صورت می پذیرد. همان گونه که در شکل ۷ دیده می شود با افزایش مکش ورود هوا، ناحیه اشباع بزرگتر می گردد و میزان پارامتر تنش موثر نیز در مکش های ماتریک یکسان، بیشتر می گردد. افزایش مکش ورود هوا به معنای کاهش اندازه گلوگاه ها در بافت خاک (تغییر دانه بندی و جنس خاک) (به عبارت دیگر نزدیک تر شدن دانه های خاک و افزایش سطح خارجی آن ها در واحد حجم است) و این خود به تاثیر بیشتر فشار موینگی بر میزان تنش موثر که با پارامتر تنش موثر تعیین می گردد می انجامد، همانگونه که در شکل ۷ مشخص است. در شکل ۸، تاثیر تنش خالص همه جانبه بر پارامتر تنش موثر دیده می شود؛ در تنش های بالاتر خالص همه جانبه میزان پارامتر تنش موثر در مکش های یکسان بالاتر است. این به معنای آن است که اگر برای مکش ورود هوای یکسانی، تنش خالص وارده به خاک افزایش یابد، افزایش پارامتر تنش موثر رخ خواهد داد. مکش ورود هوا نشانگر مقدار متوسط شعاع گلوگاه های خاک است. افزایش تنش خالص می تواند به تراکم خاک و کاهش متعاقب حرقات نیز بیانجامد، این موضوع باعث تماس بیشتر ذرات و افزایش پارامتر تنش موثر می گردد. در شکل ۹ و ۱۰ به ترتیب تاثیر شیب منحنی نگهداشت آب-خاک و نسبت درصد حجمی آب باقی مانده به درصد حجمی آب اشباع بر پارامتر تنش موثر ارائه شده است که همانگونه که دیده می شود، تاثیر این دو متغیر از سایر متغیر ها کمتر است.

این رابطه که تنها تابعی از پارامترهای منحنی نگهداشت آب-خاک (شامل محتوای آب حجمی باقی مانده و اشباع، شیب منحنی نگهداشت آب خاک و مکش ورود هوا) به همراه دو متغیر مکش و تنش خالص می باشد، ضمن آنکه بر پایه متغیرها و پارامترهای فیزیکی و کاملاً مرتبط با رفتار هیدرومکانیکی خاک غیر اشباع تعریف شده است، کاملاً کاربردی است. این رابطه ریاضی به فرم بسته، به راحتی قابل پیاده سازی در نرم افزار اکسل یا هر محیط برنامه نویسی می باشد.

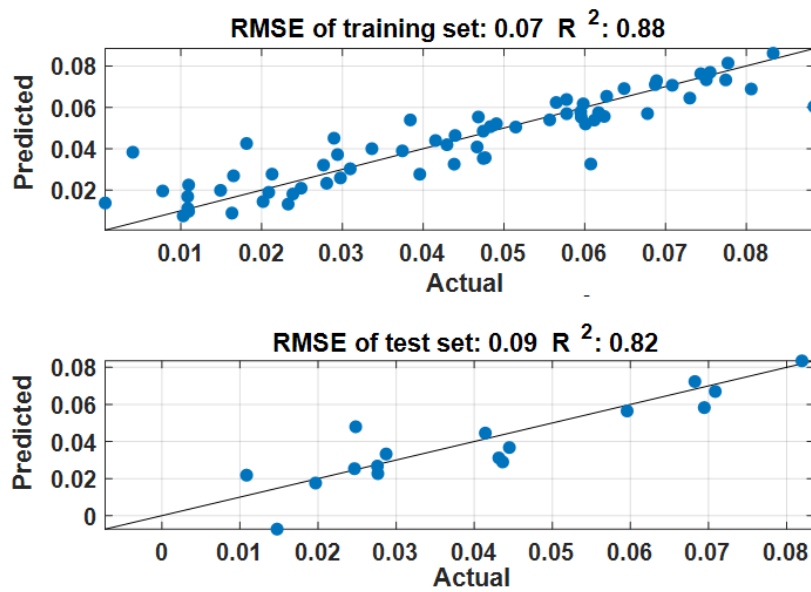
شکل ۴ وزن هر ژن در معادله نهایی به نمایش می گذارد. علاوه بر آن p -value بیشتر ژنهای ۲ و ۳ به معنای آن بوده است که عبارتهای ژنهای ۲ و ۳ در معادلات بیشتری از نسلهای تولیدی معادلات بررسی شده (و در نتیجه در نسلهای برگزیده توسط برنامه نویسی ژنتیکی چندژنی) حضور داشته اند. ساختار درختی شامل این ژن ها نهایتاً ساده شده و به فرم معادله پیش گفته در آمده است.

شکل ۵ تغییرات عملکرد هر نسل براساس میانگین خطای فرمول های بدست آمده در هر نسل را به نمایش می گذارد. با بررسی لگاریتم خطای جذر مجموع مربعات، از نسل ۸۰ تولیدی به بعد خطا تقریباً بدون تغییر محسوس است و در نتیجه فرم معادلات به معادله نهایی نزدیک شده است. شکل ۶ تخمین بدست آمده از بهترین رابطه درمقابل پارامترهای تنش موثر آزمایشگاهی را به نمایش و دقت آن را برای مجموعه های به ترتیب، آموزش و تست ارائه می نماید. رابطه به دست آمده از همبستگی مناسبی با داده های آموزش و تست برخوردار است.



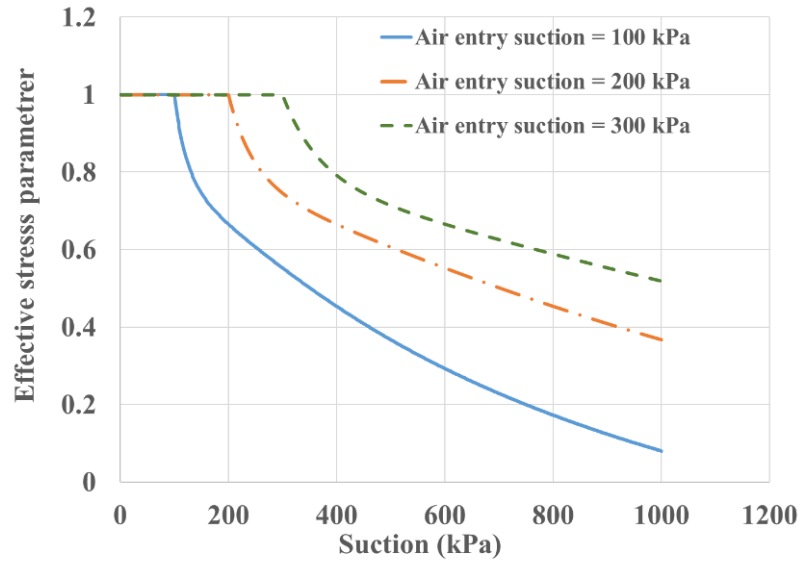
شکل ۵. بررسی عملکرد نسل تولیدی از معادلات

Fig.5. Performance analysis of each generation of the equations



شکل ۶. بررسی دقت تخمین بدست آمده از بهترین رابطه

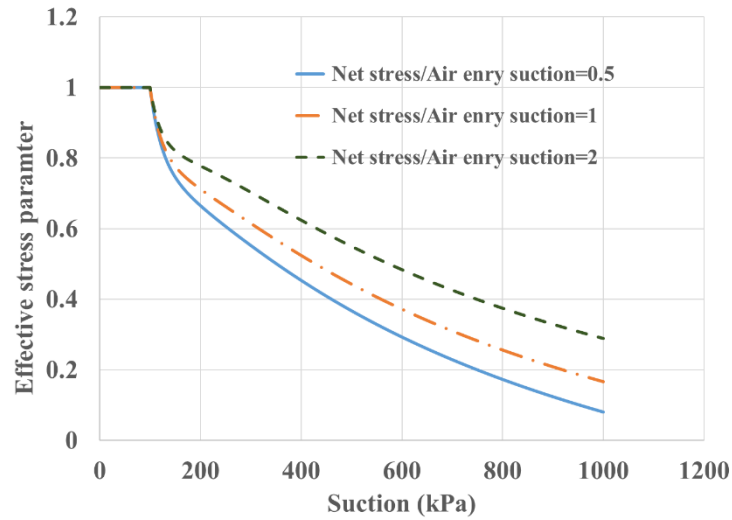
Fig. 6. Accuracy assessment of the optimum equation



شکل ۷. بررسی تاثیر مکش ورود هوا بر تغییرات پارامتر تنش موثر با مکش

Fig.7. The influence of air entry value on the effective stress parameter

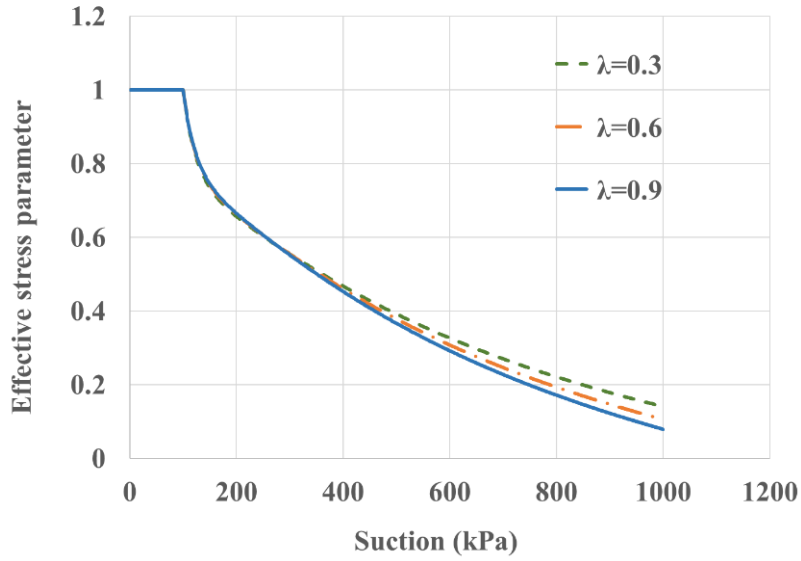
$$\left(\frac{P}{h_b} = 0.5, \lambda = 0.89, \frac{\theta_r}{\theta_s} = 0.005 \right)$$



شکل ۸. بررسی تاثیر نسبت تنش خالص به مکش ورود هوا بر تغییرات پارامتر تنش موثر با مکش

Fig. 8. The influence of the ratio of net stress to air entry value on the effective stress parameter

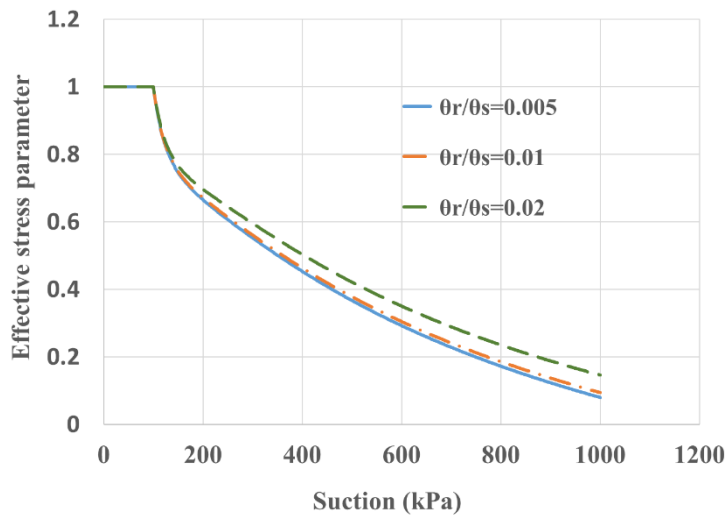
$$(h_b = 100 \text{ kPa}, \lambda = 0.89, \frac{\theta_r}{\theta_s} = 0.005)$$



شکل ۹. بررسی تاثیر شیب منحنی نگهداشت آب-خاک (پارامتر λ منحنی بروکس کوری) بر تغییرات پارامتر تنش موثر بامکش

Fig. 9. The influence of SWRC slope (λ of Brooks-Corey) on the effective stress parameter variation with suction

$$(h_b = 100 \text{ kPa}, \frac{P}{h_b} = 0.5, \frac{\theta_r}{\theta_s} = 0.005)$$



شکل ۱۰. بررسی تاثیر نسبت درصد حجمی آب باقیمانده به درصد حجمی آب اشباع بر تغییرات پارامتر تنش موثر بامکش

Fig. 10. The influence of the ratio of residual to saturated volumetric water content on the effective stress parameter variation with suction

$$(h_b = 100 \text{ kPa}, \frac{P}{h_b} = 0.5, \lambda = 0.89)$$

جدول ۴. معیارهای عملکرد بدست آمده برای سایر مطالعات در مقایسه با تحقیق حاضر

Table 4. Performance measures obtained for different studies as compared to the current study

معیارهای عملکرد	R ²	RMSE	MAPE	MAE	نوع تحقیق
مطالعه حاضر	۰/۹۴	۰/۰۷	۹/۵۹	۴/۸۱	هوش مصنوعی
آهنگر عصر و جوادی	۰/۸۹	۰/۰۹	۱۴/۵۵	۷/۱۰	هوش مصنوعی
جوهری و همکاران	۰/۸۱	۰/۱۱	۱۵/۷۴	۷/۶۶	هوش مصنوعی
خلیلی و خباز	۰/۶۸	۰/۲۷	۳۶/۶۴	۲۱/۰۲	رابطه تجربی
راسل و خلیلی	۰/۷۰	۰/۲۸	۳۹/۴۵	۲۱/۶۸	رابطه تجربی
لو	۰/۴۱	۰/۲۵	۳۴/۹۸	۱۵/۲۸	رابطه تجربی
بیشاپ	۰/۳۷	۰/۲۷	۳۷/۲۹	۱۹/۸۴	رابطه تجربی
ایچیسون	۰/۴۰	۰/۵۲	۷۶/۳۱	۴۴/۴۲	رابطه تجربی

موثر، در مقایسه با تغییر پارامتر تنش موثر در همین مکش به میزان تنها ۲۰٪ به ازای تغییر بیشتری در میزان نسبت تنش خالص به مکش ورود هوا (۴ برابر شدن آن)، بسیار قابل ملاحظه می باشد. این موضوع نقش پارامتر مکش ورود هوا و تاثیر آن بر پارامتر تنش موثر را نشان می دهد. از طرف دیگر میزان تغییر در پارامتر تنش موثر در مکش مشابه (۲۰۰ کیلوپاسکال) و برای بررسی های انجام شده با مقدار چهاربرابر نسبت در صدحجمی آب باقیمانده به در صدحجمی آب اشباع و نیز سه برابر شیب منحنی نگهداشت آب-خاک، به ترتیب، تنها ۰/۴٪ و ۰/۱٪ می باشد. در مکش های دیگر نیز همین روند مشاهده می گردد. اگرچه تاثیر پارامتر های دیگر منحنی آب-خاک، با افزایش مکش، اندکی افزایش می یابد ولی همچنان بیشترین تاثیر بر پارامتر تنش موثر از مکش ورود هوا و پس از آن از نسبت تنش خالص به مکش ورود هوا حاصل می آید.

۹- بررسی دقت مدل

بر اساس معیارهای معرفی شده و پیش گفته، دقت و کارایی معادله به دست آمده بر اساس پایگاه داده ای جمع آوری شده بررسی و نتایج در جدول ۴ ارائه شده اند:

با افزایش نسبت آب باقی مانده به درصد حجمی آب اشباع و نیز با کاهش شیب منحنی مشخصه آب-خاک، میزان پارامتر تنش موثر در مکش های یکسان بالاتر است. افزایش نسبت آب باقی مانده به درصد حجمی آب اشباع به معنای تغییر در نوع خاک و وجود کانی هایی با قابلیت جذب آب بیشتر است. در چنین حالتی بافت خاک تمایل کمتری به از دست دادن آب داشته و درجه اشباع بالاتری را در مکش یکسان تجربه می نماید. این به معنای سطح ترشده بیشتر دانه ها (که از نظر بیشاپ تخمینی از پارامتر تنش موثر به صورت فیزیکی است) و افزایش پارامتر تنش موثر خاک می باشد. تغییر شیب منحنی آب-خاک به معنای تغییر در توزیع اندازه حفرات خاک (به عبارتی میزان یکنواختی اندازه حفرات) می باشد. اندازه حفرات یکنواخت تر (شیب بیشتر منحنی بروکس-کوری) به معنای افزایش خروج آب از بافت خاک و کاهش درجه اشباع در مکش یکسان و در نتیجه کاهش سطح تر شده دانه ها و کاهش پارامتر تنش موثر می باشد که با نتایج سایر محققان نیز سازگار است [۵۲-۵۳].

همانگونه که مشاهده می شود، با دو برابر شدن مکش ورود هوا، درصد تغییر در پارامتر تنش موثر در یک مکش ثابت (برای مثال ۲۰۰ کیلوپاسکال) به اندازه ۰/۴٪ بوده است که این میزان تغییر در پارامتر تنش

تنش موثر دارند ولی از آن متغیرها نمی‌توان صرف‌نظر کرد و در نظر نگرفتن آن‌ها توسط این محققان به کاهش دقت رابطه پیشنهادی ایشان انجامیده است.

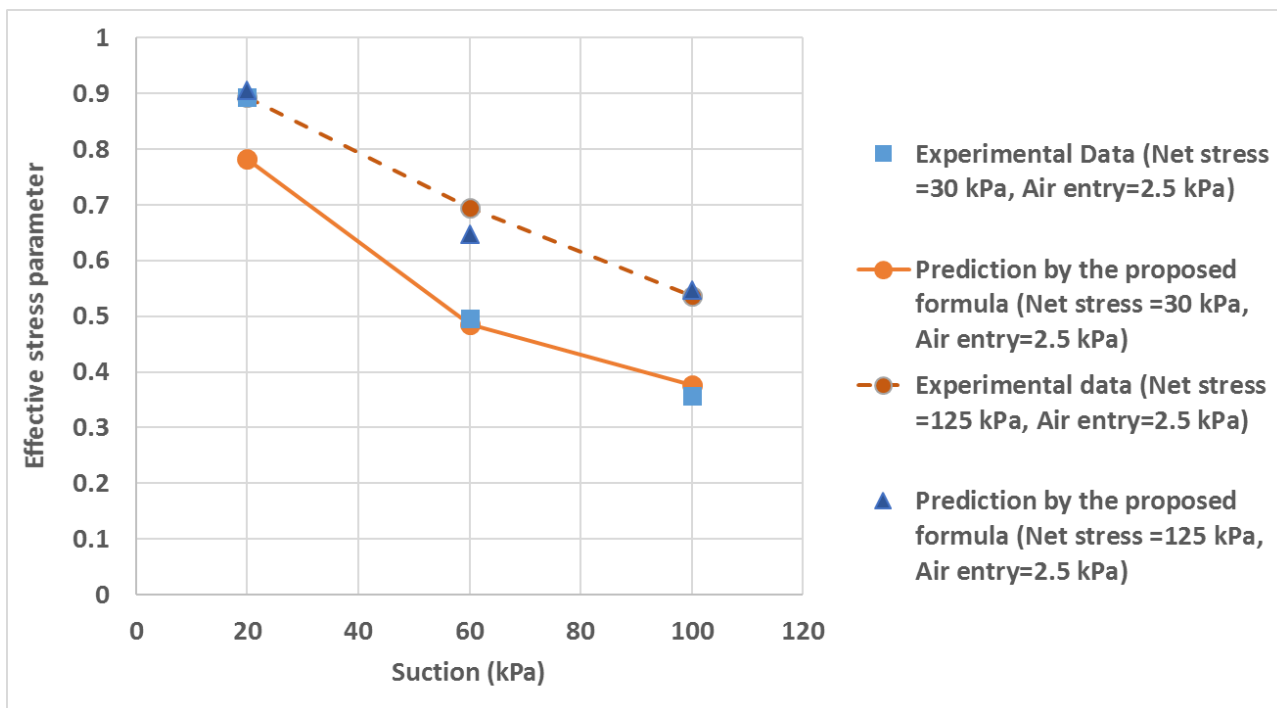
جهت ارائه یک مثال و صحت سنجی رابطه ارائه شده، عملکرد معادله به دست آمده در پیش‌بینی مقدار پارامتر تنش موثر (برای نمونه‌های لای کیدستون، تهیه شده از منطقه کوپینزلند شمالی در استرالیا) تحت مقادیر مختلف تنش خالص مورد بررسی قرار گرفته است (شکل ۱۱). براساس این شکل نیز دقت بالای مدل پیشنهادی مشهود می‌باشد.

۱۰- نتیجه‌گیری

در این تحقیق به ارائه معادله برای پارامتر تنش موثر برای خاک‌های غیراشباع با استفاده از برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی پرداخته شد. معادله به دست آمده در مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی پایگاه داده‌های شامل ۱۰۱ نقطه آزمایشگاهی دقت مطلوبی از خود نشان داد و در مقایسه با سایر مطالعات همچنین از عملکرد مطلوبی برخوردار بود. مطالعه پارامتری معادله به دست آمده نشانگر تاثیر قابل ملاحظه مکش ورود هوا و نسبت تنش خالص همه جانبه به مکش ورود هوا بر تغییرات پارامتر تنش موثر با مکش بود. تاثیر شیب منحنی نگهداشت آب-خاک و نسبت درصد حجمی آب باقیمانده به درصد حجمی آب اشباع بر پارامتر تنش موثر از سایر متغیرها کمتر بود و با کاهش شیب منحنی نگهداشت آب-خاک و یا افزایش نسبت آب باقیمانده به آب اشباع، در مکش‌های ماتریک مساوی پارامتر تنش موثر افزایش یافت. مشاهده گردید که با دو برابر شدن مکش ورود هوا در خاک مورد مطالعه، درصد تغییر در پارامتر تنش موثر در یک مکش ثابت (برای مثال ۲۰۰ کیلوپاسکال) به اندازه ۴۰٪ بوده است که این میزان تغییر در پارامتر تنش موثر، در مقایسه با تغییر پارامتر تنش موثر در همین مکش به میزان تنها ۲۰٪ به ازای ۴ برابر شدن نسبت تنش خالص به مکش ورود هوا بسیار قابل توجه است. در حالی که میزان تغییر در پارامتر تنش موثر در مکش مشابه (۲۰۰ کیلوپاسکال) در خاک مورد مطالعه و برای بررسی‌های انجام شده با مقدار چهاربرابر نسبت درصد حجمی آب باقیمانده به درصد حجمی آب اشباع و نیز سه برابر شیب منحنی نگهداشت آب-خاک، به ترتیب، تنها ۴٪ و ۱٪ می‌باشد. بنابراین، در حالی که آنالیز پارامتری، از حساسیت بیشتر پارامتر تنش موثر نسبت به مکش ورود هوا حکایت دارد، کاهش قابل توجه دقت روابط تجربی که تنها بر پایه مکش ورود هوا بنا شده اند نسبت به دقت رابطه پیشنهادی، نشانگر آن است که در رابطه تنش موثر از سایر مشخصات

از این جدول بر می‌آید که هر سه مطالعه تحقیق حاضر، آهنگر عمرو جواد (۲۰۲۱) و جوهری و همکاران (۲۰۱۳) که بر پایه روش‌های مبتنی بر هوش مصنوعی هستند عملکردی مطلوب داشته‌اند. هرچند استفاده از روش برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی توانسته است به ارائه معادله‌ای با سطح دقت مطلوب‌تر و بر پایه همه‌ی متغیرهای تاثیرگذار فیزیکی بیانجامد. یکی از دلایل دقت بالاتر معادلات به دست آمده از روش‌های هوش مصنوعی نسبت به روش‌های تجربی به طور کلی دامنه‌ی جستجوی بزرگتر این روش‌ها با تولید معادلات مختلف با فرم‌های متنوع ریاضی بر اساس الگوریتم‌های هوش مصنوعی همانند برنامه‌ریزی ژنتیکی (GP)، برنامه‌ریزی بیان ژن (GEP)، برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی (MGGP) و رگرسیون چند جمله‌ای تکاملی (EPR) می‌باشد. در بین روش‌های پیش‌گفته، برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی استفاده شده در این تحقیق، ضمن ارائه یک معادله صریح ریاضی که روش‌های دیگر هوش مصنوعی همانند شبکه عصبی به آن نمی‌پردازند، انعطاف‌پذیری و توانایی بالاتری نسبت به سایر الگوریتم‌های تکاملی جهت یافتن روابط مورد نیاز با پیچیدگی کمتر و دقت بالاتر را دارد. علت این امر استفاده برنامه نویسی ژنتیکی چند ژنی از ترکیب رگرسیون خطی و برنامه نویسی ژنتیکی و ابداع مفهوم برنامه نویسی چندژنی است که در آن با کنترل پیچیدگی معادله بر اساس پیچیدگی عبارتی زیر درخت‌ها (زیرگراف‌های) سازنده معادله، می‌توان به درخت‌هایی با عمق کمتر و در نتیجه معادله‌ای با پیچیدگی کم‌تر دست یافت. در عین حال رگرسیون خطی ترکیب شده با برنامه نویسی ژنتیکی به یافتن بهترین ضرایب این ژن‌ها (یا همان زیرگراف‌ها) کمک می‌نماید. نوآوری دیگر و نیز اهمیت تحقیق حاضر در مقایسه با سایر تحقیقات بر پایه هوش مصنوعی و نیز روابط تجربی، در نظر گرفتن تمامی متغیرهای تاثیرگذار فیزیکی (مشخصات منحنی نگهداشت خاک) و نیز تعریف یک رابطه‌ی دوضابطه‌ای می‌باشد. در این رابطه به آغاز و گسترش ناحیه‌ی غیر اشباع، با ورود هوا به حفره‌های خاک، پس از مکش ورود هوا توجه شده است. در حالی که در سایر روابط بر پایه هوش مصنوعی این نکته در نظر گرفته نشده است. این امر مستلزم تغییر برنامه‌های معمول استفاده شده در الگوریتم‌های هوش مصنوعی است، در نتیجه سایر محققان بهره‌گرفته از هوش مصنوعی عمدتاً از آن صرف‌نظر نموده‌اند.

مقایسه دقت روابط تجربی ارائه شده توسط ایچیسون، خلیلی و خباز همچنین راسل و خلیلی با دقت معادله ارائه شده در تحقیق حاضر نشانگر آن است که گرچه براساس نتایج مطالعه پارامتری سایر مشخصات منحنی نگهداشت آب-خاک تاثیر کمتری نسبت به مکش ورود هوا بر تغییرات پارامتر



شکل ۱۱. تغییرات پارامتر تنش موثر با مکش ماتریک در مقادیر مختلف تنش خالص (مدل پیشنهادی در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی برای نمونه های لای، تهیه شده از منطقه کیدستون، کوینزلند شمالی، استرالیا، داده های آزمایشگاهی از [۵۴]).

Fig. 11. Changes of effective stress parameter with matric suction at different values of net stress (proposed model compared to laboratory results for soil samples from Kidston area, North Queensland, Australia, laboratory data from [54])

منحنی آب-خاک نمی توان صرفنظر نمود.

		علائم انگلیسی
θ	مقدار محتوای آب، -	c' چسبندگی، N/m^2
λ	شیب منحنی نگهداشت آب - خاک، -	D بعد فراکتالی، -
σ	تنش کل، N/m^2	h_b مکش ورود هوا، N/m^2
σ'	تنش موثر، N/m^2	M شیب خط گسیختگی، -
τ	تنش برشی، N/m^2	N تعداد داده ها، -
φ'	زاویه اصطکاک داخلی موثر، درجه	P تنش خالص، N/m^2
φ^b	زاویه نشانگر تغییرات مقاومت برشی بر اساس تغییرات مکش ماتریک، درجه	p تنش کل میانگین، N/m^2
χ	پارامتر تنش موثر، -	q تنش انحرافی، N/m^2
زیرنویس		S مکش ماتریک، N/m^2
a	هوا	u فشار سیال حفره ای، N/m^2
f	در صفحه گسیختگی	y داده های آزمایشگاهی متغیر وابسته
r	باقی مانده	\hat{y} مقادیر تخمینی متغیر وابسته
s	اشباع	\bar{y} مقادیر متوسط متغیر وابسته
w	آب	
بالانویس		علائم یونانی
*	باقی مانده	α ثابت تجربی، -
		γ ثابت تجربی، -

- [12] Y. Xu, Fractal approach to unsaturated shear strength, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental engineering*, 130(3) (2004) 264-273.
- [13] A. Uchaipichat, Influence of hydraulic hysteresis on effective stress in unsaturated clay, *International Journal of Geological and Environmental Engineering*, 4(12) (2010) 639-643.
- [14] A.W. Bishop, I. Alpan, G. Blight, I. Donald, Factors controlling the strength of partly saturated cohesive soils, (1960).
- [15] A.W. Bishop, I. Donald, The experimental study of partly saturated soil in the triaxial apparatus, in: *Proc. 5th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Paris, 1961*, 1961, pp. 13-21.
- [16] J. Jennings, A revised effective stress law for use in the prediction of the behaviour of unsaturated soils. Pore pressure and suction in soils, in: *Proceedings of the Conference on Pore Pressure and Suction in Soils, British National Society of International Society of Soil Mechanics Foundation Engineering at the Institute of Civil Engineering, Butterworths, London, England, 1960*, pp. 26-30.
- [17] J. Jennings, J. Burland, Limitations to the use of effective stresses in partly saturated soils, *Géotechnique*, 12(2) (1962) 125-144.
- [18] M.I. Zerhouni, Role de la pression interstitielle negative dans le comportement des sols: Application au calcul des routes, Ph.D. Thesis, Ecole Centrale, Paris (1991).
- [19] G. Aitchison, Relationships of moisture stress and effective stress functions in unsaturated soils, in: *Proceeding of Pore Pressure and Suction in Soils Conf., the British National Society of The International Society for Soil Mechanics and Foundation Engineering, London, United Kingdom, (1960)*.
- [20] N. Lu, J.W. Godt, D.T. Wu, A closed-form equation for effective stress in unsaturated soil, *Water Resources Research*, 46(5) (2010).
- [21] A. Russell, N. Khalili, A unified bounding surface plasticity model for unsaturated soils, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in*
- [1] S. FazliGhiyasabadi, G. Habibagahi, E. Nikooee, A Capillary Water-Retention Framework for the Effective Stress Parameter Considering Hydraulic Hysteresis, *Transport in Porous Media*, 138(3) (2021) 489-509.
- [2] D. Fredlund, N.R. Morgenstern, R. Widger, The shear strength of unsaturated soils, *Canadian geotechnical journal*, 15(3) (1978) 313-321.
- [3] V. Escario, J. Saez, The shear strength of partly saturated soils, *Geotechnique*, 36(3) (1986) 453-456.
- [4] H. Rahardjo, T. Lim, M. Chang, D. Fredlund, Shear-strength characteristics of a residual soil, *Canadian Geotechnical Journal*, 32(1) (1995) 60-77.
- [5] C. Feuerharmel, A. Bica, W. Gehling, J. Flores, A study of the shear strength of two unsaturated colluvium soils, in: *Proceedings of the International Symposium on Advanced Experimental Unsaturated Soil Mechanics. Taylor & Francis, Trento, Italy, 2005*, pp. 169-174.
- [6] S. Nam, M. Gutierrez, P. Diplas, J. Petrie, Determination of the shear strength of unsaturated soils using the multistage direct shear test, *Engineering Geology*, 122(3-4) (2011) 272-280.
- [7] D.G. Fredlund, A. Xing, M.D. Fredlund, S. Barbour, The relationship of the unsaturated soil shear strength to the soil-water characteristic curve, *Canadian geotechnical journal*, 33(3) (1996) 440-448.
- [8] S. Vanapalli, D. Fredlund, D. Pufahl, A. Clifton, Model for the prediction of shear strength with respect to soil suction, *Canadian geotechnical journal*, 33(3) (1996) 379-392.
- [9] E. Garven, S. Vanapalli, Evaluation of empirical procedures for predicting the shear strength of unsaturated soils, in: *Unsaturated soils 2006, 2006*, pp. 2570-2592.
- [10] A.W. Bishop, The principle of effective stress, *Tekniskukeblad*, 39 (1959) 859-863.
- [11] N. Khalili, M. Khabbaz, A unique relationship for χ for the determination of the shear strength of unsaturated soils, *Geotechnique*, 48(5) (1998) 681-687.

- [31] C. Kayadelen, Estimation of effective stress parameter of unsaturated soils by using artificial neural networks, *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 32(9) (2008) 1087-1106.
- [32] M. Ajdari, G. Habibagahi, A. Ghahramani, Predicting effective stress parameter of unsaturated soils using neural networks, *Computers and Geotechnics*, 40 (2012) 89-96.
- [33] A. Johari, G. Habibagahi, M. Nakhace, Prediction of unsaturated soils effective stress parameter using gene expression programming, *Scientia Iranica*, 20(5) (2013) 1433-1444.
- [34] A. AhangarAsr, A.A. Javadi, Effective stress parameter in unsaturated soils: an evolutionary-based prediction model, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers- Smart Infrastructure and Construction*, 173(4) (2020) 96-105.
- [35] H. Kaydani, M. Najafzadeh, A. Hajizadeh, A new correlation for calculating carbon dioxide minimum miscibility pressure based on multi-gene genetic programming, *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 21 (2014) 625-630.
- [36] A.H. Gandomi, A.H. Alavi, A new multi-gene genetic programming approach to nonlinear system modeling. Part I: materials and structural engineering problems, *Neural Computing and Applications*, 21(1) (2012) 171-187.
- [37] D.P. Searson, D.E. Leahy, M.J. Willis, GPTIPS: an open source genetic programming toolbox for multigene symbolic regression, in: *Proceedings of the International Multiconference of Engineers and Computer Scientists*, Citeseer, 2010, pp. 77-80.
- [38] A.H. Gandomi, A.H. Alavi, C. Ryan, *Handbook of genetic programming applications*, Springer, 2015.
- [39] I.-M. Lee, S.-G. Sung, G.-C. Cho, Effect of stress state on the unsaturated shear strength of a weathered granite, *Canadian Geotechnical Journal*, 42(2) (2005) 624-631.
- [40] A. Russell, N. Khalili, A unified bounding surface plasticity model for unsaturated soils, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30(3) (2006) 181-212.
- [22] Y. Xu, L. Cao, Fractal representation for effective stress of unsaturated soils, *International Journal of Geomechanics*, 15(6) (2015) 04014098.
- [23] E. Nikooee, G. Habibagahi, S.M. Hassanizadeh, A. Ghahramani, Effective stress in unsaturated soils: A thermodynamic approach based on the interfacial energy and hydromechanical coupling, *Transport in porous media*, 96(2) (2013) 369-396.
- [24] J. Huyghe, E. Nikooee, S. Hassanizadeh, Bridging effective stress and soil water retention equations in deforming unsaturated porous media: a thermodynamic approach, *Transport in Porous Media*, 117(3) (2017) 349-365.
- [25] C.-T. Cheng, W.-C. Wang, D.-M. Xu, K.W. Chau, Optimizing hydropower reservoir operation using hybrid genetic algorithm and chaos, *Water Resources Management*, 22(7) (2008) 895-909.
- [26] G. Habibagahi, A. Bamdad, A neural network framework for mechanical behavior of unsaturated soils, *Canadian Geotechnical Journal*, 40(3) (2003) 684-693.
- [27] A. Bamdad, G. Habibagahi, J. Berrill, Liquefaction potential using different neural and neuro-fuzzy networks: A comparative study, in: *Proceedings of International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2001, pp. 23-26.
- [28] A. Johari, A. Javadi, G. Habibagahi, Modelling the mechanical behaviour of unsaturated soils using a genetic algorithm-based neural network, *Computers and Geotechnics*, 38(1) (2011) 2-13.
- [29] A. Ahangar-Asr, A. Johari, A.A. Javadi, An evolutionary approach to modelling the soil-water characteristic curve in unsaturated soils, *Computers & geosciences*, 43 (2012) 25-33.
- [30] R. Taormina, K.-w. Chau, R. Sethi, Artificial neural network simulation of hourly groundwater levels in a coastal aquifer system of the Venice lagoon, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25(8) (2012) 1670-1676.

- expansive soil, *Engineering Geology*, 65(4) (2002) 261-267.
- [48] C. Rampino, C. Mancuso, F. Vinale, Experimental behaviour and modelling of an unsaturated compacted soil, *Canadian Geotechnical Journal*, 37(4) (2000) 748-763.
- [49] N. Khalili, M.H. Khabbaz, A unique relationship for χ for the determination of the shear strength of unsaturated soils, *Géotechnique*, 48(5) (1998), 681-687.
- [50] N. Khalili, S. Zargarbashi, Influence of hydraulic hysteresis on effective stress in unsaturated soils. *Géotechnique*, 60(9) (2010), 729-734.
- [51] I. Alkroosh, H. Nikraz, Predicting axial capacity of driven piles in cohesive soils using intelligent computing, *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 25(3) (2012) 618-627.
- [52] M. Milatz, E. Andò, G.C., Viggiani, S. Mora, In situ X-ray CT imaging of transient water retention experiments with cyclic drainage and imbibition. *Open Geomechanics*, 3 (2022), 1-33.
- [53] K. Chen, X., He, F., Liang, D., Sheng, Contribution of capillary pressure to effective stress for unsaturated soils: Role of wet area fraction and water retention curve. *Computers and Geotechnics*, 154 (2023), 105140.
- [54] D.W., Rassam, D.J., Williams, A relationship describing the shear strength of unsaturated soils. *Can. Geotech. J.*, *Geomechanics*, 30(3) (2006) 181-212.
- [41] A.R. Russell, N. Khalili, A bounding surface plasticity model for sands exhibiting particle crushing, *Canadian Geotechnical Journal*, 41(6) (2004) 1179-1192.
- [42] H. Rahardjo, O.B. Heng, L.E. Choon, Shear strength of a compacted residual soil from consolidated drained and constant water content triaxial tests, *Canadian Geotechnical Journal*, 41(3) (2004) 421-436.
- [43] A.W. Bishop, G. Blight, Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils, *Geotechnique*, 13(3) (1963) 177-197.
- [44] N. Khalili, F. Geiser, G. Blight, Effective stress in unsaturated soils: Review with new evidence, *International journal of Geomechanics*, 4(2) (2004) 115-126.
- [45] D.W. Rassam, D.J. Williams, A relationship describing the shear strength of unsaturated soils, *Canadian Geotechnical Journal*, 36(2) (1999) 363-368.
- [46] T.M. Thu, H. Rahardjo, E.-C. Leong, Effects of hysteresis on shear strength envelopes from constant water content and consolidated drained triaxial tests, in: *Proceedings of the Fourth International Conference on Unsaturated Soils*, 2006, pp. 1212-1222.
- [47] L. Miao, S. Liu, Y. Lai, Research of soil-water characteristics and shear strength features of Nanyang

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

E. Nikooee, K. Kamran Nejad, Determining the effective stress parameter in drying path by MGGP method, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 55(5) (2023) 1039-1056.

DOI: 10.22060/ceej.2023.21678.7792

