



## New Kelvin-Voigt Model to simulate the collision of rigid bodies

M. Papi, H. Toopchi-Nezhad\*

Department of Civil Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran

**ABSTRACT:** The effective simulation of collision between two adjacent structures has always been of interest in structural engineering. Several analytical models have been proposed by different scholars to simulate this phenomenon. The Kelvin-Voigt Model is one of the popular ones due to its linearity, and ease of application. In this study, a parameter (coefficient  $\alpha$ ) is introduced in the original Kelvin-Voigt Model to calculate the energy dissipation both in the compression and restitution (separation) phases of the contact. Besides, the accuracy of the modified model has been improved by presenting a new equation for the estimation of damped energy. Furthermore, the tensile force is eliminated in the restitution phase. The effectiveness of the proposed modified model in the simulation of the collision was examined by comparing the results with those of the original model, as well as previous experimental studies. The mean relative error between the selected coefficient of restitution before the collision and the coefficient of restitution after the collision that was evaluated by different models were compared. The modified model proposed in this study showed the least error values among all of the other models. This indicated the ability of the model to estimate the damped energy with better accuracy. The results of this research study indicate that the proposed modified Kelvin-Voigt Model is effective in the simulation of collision between two structures.

### Review History:

Received: Apr. 06, 2021

Revised: Feb. 20, 2022

Accepted: Mar. 18, 2022

Available Online: Apr. 01, 2022

### Keywords:

Collision Phenomena

Kelvin-Voigt Model

Damping Energy

Linear Viscoelastic Model

### 1- Introduction

Collision is a physical phenomenon in which two or more objects come into sudden contact with one another. As a result of a collision, significant forces are exchanged between the colliding objects, and this may cause substantial stress demands and damages. The evaluation of stresses and strains due to collision is essential in many practical applications, including civil and mechanical engineering. The proper simulation of collision is an important step toward the identification of its effects on the colliding structures and providing a suitable solution to mitigate the consequences of impact in the structures. Various practical models have been proposed to simulate the impact of structures. Most of these models are inspired by the basic Hertz Model [1]. One of the most popular models in evaluating the impact force is the Kelvin-Voigt linear viscoelastic model.

In this paper, the linear viscoelastic Kelvin-Voigt Model is introduced and its pros and cons are identified. Next, modifications have been applied to the model to improve its accuracy in estimating the energy dissipations during the collision as well as simulating the time history of the impact force.

### 2- Methodology

Hertz's basic theory [1] expresses the force of a collision

between two objects,  $F_p$ , as a nonlinear power function of the relative deformation of the colliding objects.

$$F_p(t) = k \delta(t)^n \quad (1)$$

In Equation (1),  $k$  is a stiffness parameter and  $\delta(t)$  is the relative deformation of the two colliding objects. The model accounts for elastic deformations only and neglects energy dissipation. If the power  $n$  in Equation (1) is set to unity, a linear elastic model is created. The linear viscoelastic model (Kelvin-Voigt Model) is constructed by modifying the linear elastic model of Equation (1). As such, in addition to the linear spring, a linear dashpot is also used in parallel to the spring to simulate the energy dissipations (Equation (2)) [2]. In Equation (2),  $c(t)$  represents the viscous damping coefficient, which is calculated from Equation (3). Parameter  $\dot{\delta}(t)$  indicates the relative velocity of the two colliding objects.

$$F_p(t) = k \delta(t) + c(t) \dot{\delta}(t) \quad (2)$$

$$c(t) = 2\zeta \sqrt{k \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \quad (3)$$

\*Corresponding author's email: h.toopchinezhad@razi.ac.ir



**Table 1. Comparison of different variants of Kelvin-Voigt Model in estimating the coefficient of restitution e**

Models	Ave. Error = Ave. $\left( \frac{ e_{PRE} - e_{POST} }{e_{PRE}} \right) \times 100$	
	0.1 ≤ e ≤ 1	0.5 ≤ e ≤ 0.8
S. Anagnostopoulos [3]	28.76	11.65
S. Mahmoud & R. Jankowski [4]	9.41	9.04
K. Ye et al. [5]	10.86	4.60
Current paper	3.68	0.68

**Table 2. Comparison of the accuracy of different variants of Kelvin-Voigt Model in the peak response evaluation of the impact force**

Models	Absolute value of error (%)
S. Anagnostopoulos [3]	2.2
S. Mahmoud & R. Jankowski [4]	3.8
K. Ye et al. [5]	0.8
Current paper	0.8

Parameter  $\xi$  in Equation (3) represents the equivalent viscous damping ratio. One of the most commonly employed relations to evaluate  $\xi$  is provided by Anagnostopoulos [3] as follows.

$$\xi = \frac{-\ln e}{\sqrt{\pi^2 + (\ln e)^2}} \tag{4}$$

In the model presented by Mahmoud and Jankowski, the damping ratio is calculated as follows [4].

$$\xi = \frac{1 - e^2}{e(e(\pi - 2) + 2)} \tag{5}$$

Using Hertz theory and the first principles of structural dynamics, Ye [5] presented a model for modifying the Kelvin Model in which the damping ratio is considered as follows.

$$\hat{\xi} = \frac{3 k (1 - e)}{2 e (\dot{\delta}_i)} \tag{6}$$

The energy dissipation in the impact (approach) phase is greater than the separation (restitution) phase [6]. According to the classical theory of collision and the law of conservation of energy and momentum, the damping ratio in this paper is presented in terms of  $\alpha$  as follows:

$$\xi = \frac{3 (1 - e^2) k_h}{2 (\alpha + e^2) \dot{\delta}_i} \tag{7}$$

The parameter  $\alpha$  varies between 0 and 1. The value of 0 for  $\alpha$  indicates that the energy dissipation is not included in

the separation phase, and the value of 1 means that the energy dissipation of the compression phase and the separation phase is considered to be the same. Parameter  $\alpha$  should be ideally selected such that the initial value of coefficient e, which is usually evaluated empirically for different substance materials, and the value of e after the collision, remain unchanged. As such, by determining an appropriate value for parameter  $\alpha$  in the modified Kelvin-Voigt Model of this paper, the effect of energy dissipation in both collision and separation phases is taken into account.

The final value of coefficient  $\alpha$  is evaluated using an iterative procedure as follows. First, the initial value of e (i.e., the pre-collision value,  $e_{pre}$ ) is determined from the literature or via experiment based on the substance material of the colliding object. It should be noted that the value of the return coefficient e is unique for each substance material. Next, the impact force is evaluated based on the Kelvin-Voigt Model. The magnitude of the impact force is affected by the value of the unknown coefficient  $\alpha$  which is varied between 0 and 1. The values of the coefficient  $\alpha$  and the effective impact force are evaluated through an iterative procedure that aims at minimizing the error between the post-collision e (i.e.,  $e_{post}$ ) and pre-collision e (i.e.,  $e_{pre}$ ) values. The return-coefficient of various substance materials that are mostly employed in different practical engineering applications is located within the approximate range of 0.5 to 0.75 [7]. The coefficient  $\alpha$  for the case study of a concrete ball dropping on a concrete slab can be expressed as a function of e as follows.

$$\alpha = f(e) : \begin{cases} e+1 & 0.1 \leq e < 0.8 \\ 1 & 0.8 \leq e \leq 1 \end{cases} \tag{8}$$

The model of a concrete ball falling on a concrete slab as presented in this paper was aimed at demonstrating the iterative procedure that can be employed to evaluate the coefficient  $\alpha$ . The coefficient  $\alpha$  acts as an adjusting valve that balances the energy dissipations between the collision and separation phases of impact. It is noteworthy that in the present study, it is assumed that the materials remain linear elastic during and after the collision. Therefore, any plastic behavior or stiffness degradations following the impact is neglected. In addition, the effects of successive impacts are not accounted for in the analysis.

### 3- Results and Discussion

Table 1 compares the accuracy of different variants of Kelvin-Voigt Models, including the model presented in this paper, in evaluating the pre- and post-collision return-coefficients and the peak impact force in the problem of the falling of a ball on a slab of the same substance material for various range of  $e$ -values. As seen, the model presented in this paper is more accurate. In Table 2 the accuracy of different models in the evaluation of the peak impact force of a concrete ball that is fallen on a concrete slab is presented. As seen, the model presented in this paper is in better agreement with the experimental results.

### 4- Conclusions

The accurate simulation of collision is a critical step to evaluate the stress demands and mitigate the response. In this research, a new variant of Kelvin-Voigt Model capable of balancing the energy dissipations before and after the collision was presented. The model employs an  $\alpha$ -coefficient to adjust the energy dissipation during the collision and separation phases of the impact. The results of this study suggest that the proposed model is effective in the time history simulation of the impact force of colliding objects.

### References

- [1] H.J.M.p. Hertz, On the contact of solids—on the contact of rigid elastic solids and on hardness, (1896) 146-183.
- [2] R.J.E.s. Jankowski, Earthquake-induced pounding between equal height buildings with substantially different dynamic properties, 30(10) (2008) 2818-2829.
- [3] S.A.J.E.E. Anagnostopoulos, S. Dynamics, Equivalent viscous damping for modeling inelastic impacts in earthquake pounding problems, 33(8) (2004) 897-902.
- [4] S.Mahmoud,R.J.I.J.o.S. Jankowski, T.T.o.C. Engineering, Modified linear viscoelastic model of earthquake-induced structural pounding, 35(C1) (2011) 51.
- [5] K. Ye, L.J.F.o.A. Li, C.E.i. China, Impact analytical models for earthquake-induced pounding simulation, 3(2) (2009) 142-147.
- [6] M. Papi, H. Toopchi-Nezhad, “A Literature Review on Modeling and Mitigating the Pounding Effects in Buildings”, Amirkabir J. Civil Eng., Vol. 50, no. 6, pp. 1113-1126, 2019( in Persian).
- [7] K. Ye, L. Li, H.J.E.E. Zhu, S. Dynamics, A note on the Hertz contact model with nonlinear damping for pounding simulation, 38(9) (2009) 1135-1142.

#### HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Papi, H. Toopchi-Nezhad, *New Kelvin-Voigt Model to simulate the collision of rigid bodies*, Amirkabir J. Civil Eng., 54(9) (2022) 709-712.

DOI: [10.22060/ceej.2022.19824.7264](https://doi.org/10.22060/ceej.2022.19824.7264)







## اصلاح مدل کلونین-وویت جهت شبیه‌سازی برخورد اجسام

محمد پایی، حمید توپچی نژاد\*

گروه مهندسی عمران، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران.

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۱۷

بازنگری: ۱۴۰۰/۱۲/۰۱

پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۲۴

ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۱/۱۲

### کلمات کلیدی:

پدیده برخورد

مدل کلونین-وویت

استهلاک انرژی

مدل ویسکوالاستیک خطی

**خلاصه:** شبیه‌سازی پدیده ی برخورد بین اجسام یکی از مسائلی است که همواره در علوم مهندسی مورد توجه بوده است. مدل‌های بسیاری جهت شبیه‌سازی این پدیده توسط محققین مختلف ارائه شده است. مدل کلونین-وویت یکی از مدل‌های مطرح در این زمینه است که به دلیل خطی بودن، مدل ساده‌ای بوده و از طرفی دقت مناسبی جهت شبیه‌سازی پدیده برخورد را در بسیاری از موارد دارد. یکی از نقاط ضعف در مدل اولیه کلونین-وویت ایجاد یک نیروی ضربه منفی قبل از جدا شدن دو جسم می‌باشد که خلاف واقعیت بوده و توضیح فیزیکی روشنی برای آن وجود ندارد. البته این نقیصه در مدل‌های اصلاح شده‌ای که بعدها توسط محققین دیگر ارائه شد رفع گردید. در این تحقیق با اصلاح رابطه تخمین انرژی مستهلک شده و تعریف ضریبی به نام آلفا حین برخورد دو جسم، ضمن تنظیم انرژی مستهلک شده بین فاز برخورد و جدایش، دقت مدل کلونین-وویت نیز افزایش یافته است. در پایان، توانایی مدل جدید در شبیه‌سازی پدیده برخورد در تخمین انرژی مستهلک شده حین برخورد، تاریخچه زمانی نیروی برخورد و مقدار بیشینه نیروی برخورد نسبت به سایر مدل‌های ویسکوالاستیک خطی سنجیده شده است. با استفاده از مدل کلونین-وویت جدید ارائه شده می‌توان پدیده برخورد بین دو جسم را با دقت مناسب‌تری شبیه‌سازی نمود.

### ۱- مقدمه

برخورد به عنوان پدیده‌ای شناخته می‌شود که در آن دو یا چند جسم در مدت زمان بسیار کوتاه با هم تالاقی نموده و به یکدیگر ضربه وارد می‌کنند. در نتیجه‌ی برخورد انتقال نیرو بین اجسام صورت می‌گیرد و این امر ممکن است موجب آثار و خسارات قابل توجهی شود. تحلیل برخورد اجسام و ضربه زدن آن‌ها به یکدیگر در بسیاری از مسائل کاربردی در علوم مهندسی، از جمله مهندسی عمران و مهندسی مکانیک یک ضرورت اجتناب ناپذیر می‌باشد. گستره این موضوع شامل مدل‌سازی‌ها در حوزه‌های مختلف مهندسی عمران همانند اجزای مختلف پل‌های شوسه و راه آهن، برخورد ساختمان‌های مجاور به یکدیگر در هنگام زلزله، شبیه‌سازی رفتار مکانیکی گروه ذرات مانند ماسه و رس در روش المان گسسته<sup>۱</sup> و ... می‌باشد. مدل‌سازی در حوزه‌های مهندسی مکانیک و مواد شامل تحلیل خرد شدگی مواد، رفتار دینامیکی قطعات ماشین‌های مکانیکی تحت اثر ضربه و ... می‌شود. همچنین، در سال‌های اخیر این پدیده در حوزه‌های پیشرفته

همچون رباتیک، بیومکانیک، هیدرودینامیک ذرات هموار<sup>۲</sup>، روش مش آزاد<sup>۳</sup>، روش نقطه ماده و ... مورد توجه قرار گرفته است [۱].

یکی از ملموس‌ترین کاربردهای عملی برخورد، تحلیل ضربه سازه‌های مجاور یکدیگر در هنگام لرزش‌های شدید زمین است. در زلزله‌های گذشته موارد متعددی از خسارت‌های ناشی از پدیده برخورد سازه‌ها گزارش شده است [۲-۴]. به همین سبب، محققین به این مسئله توجه ویژه‌ای داشته و به بررسی جوانب مختلف آن پرداخته‌اند. بررسی نیروی برخورد بین سازه‌های بتنی با ارتفاع یکسان، برخورد بین ردیفی از ساختمان‌ها، برخورد بین ساختمان‌های با ارتفاع متفاوت را می‌توان در مراجع [۵-۱۰] مطالعه نمود. تمرکز دسته‌ی دیگر از تحقیقات بر روش‌های موثر کاهش آثار ضربه در سازه‌های مجاور بوده است. استفاده از عناصر الحاقی بین دو سازه، کاربرد میراگرهای ویسکوالاستیک و ... نمونه‌ای از این روش‌هاست که می‌توان در مراجع [۱۱-۱۷] چند نمونه از این مطالعات را مشاهده نمود. راهکارهای ارائه شده عمدتاً در خصوص کاهش آثار ضربه در ساختمان‌های موجود

### 1 Discrete Element Method

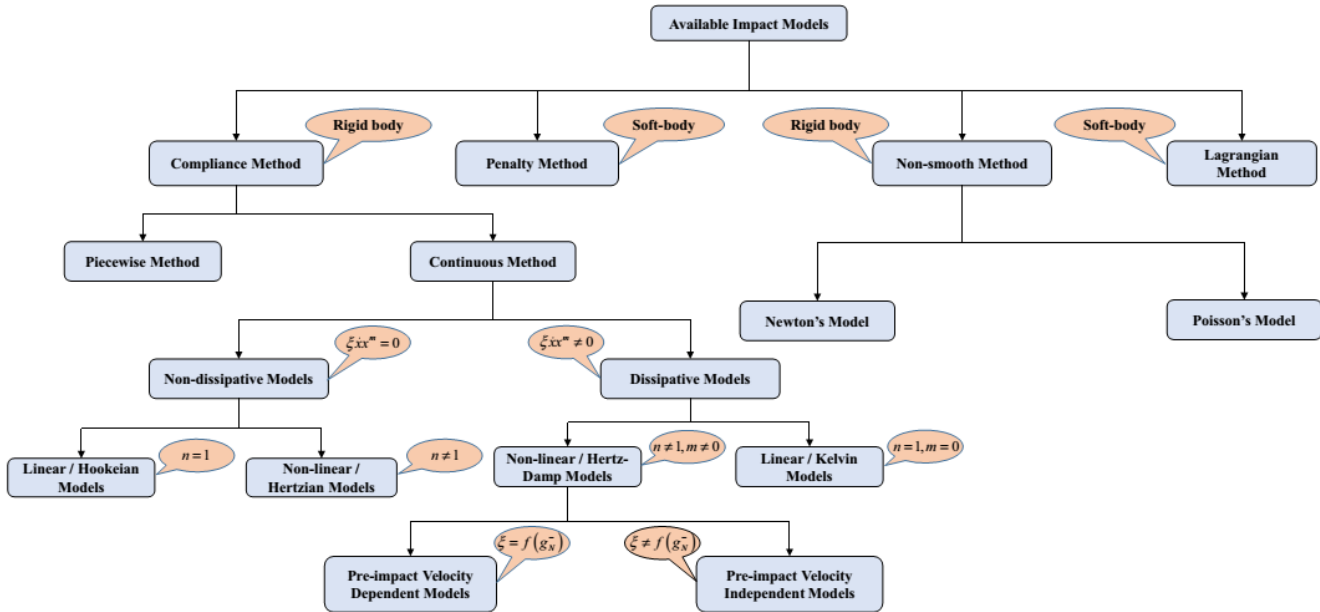
### 2 Smoothed Particle Hydrodynamics

### 3 Mesh-free method

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h.toopchinezhad@razi.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.





شکل ۱. دسته‌بندی کلی مدل‌های برخورد اجسام [۱]

Fig. 1. General classification of collision models [1]

یکی از مدل‌های متداول در محاسبه‌ی نیروی ضربه مدل ویسکوالاستیک خطی کلین-وویت<sup>۳</sup> است. در این مقاله ضمن معرفی مدل مذکور و بیان نقاط ضعف و قوت آن، اصلاحاتی بر روی مدل مورد نظر با هدف بهبود دقت مدل در تخمین استهلاک انرژی حین برخورد و همچنین شبیه‌سازی تاریخچه زمانی نیروی ضربه اعمال شده است. در ادامه مقایسه‌ای بین نتایج مدل اصلاح شده پیشنهادی و تعدادی از سایر مدل‌های موجود در ادبیات تحقیق انجام شده است.

## ۲- مدل کلین-وویت (ویسکوالاستیک خطی)

تئوری پایه‌ی هرترز [۲۰] نیروی برخورد بین دو جسم،  $F_p$ ، را به صورت تابع توانی غیرخطی از تغییر شکل نسبی اجسام برخورد کننده بیان می‌کند.

$$F_p(t) = k\delta(t)^n \quad (1)$$

کاربرد داشته و در ساختمان‌های جدید غالب آیین‌نامه‌ها بر پیشگیری وقوع ضربه با ایجاد فاصله مناسب (درز انقطاع) بین سازه‌های مجاور تاکید دارند. میاری<sup>۱</sup> و همکاران در تحقیقات خود به مرور مطالعات انجام شده در خصوص برخورد قطعات پل‌ها به یکدیگر، عوامل موثر در این برخورد و روش‌های کاهش پاسخ ناشی از ضربه آن‌ها پرداخته‌اند [۱۸]. براون<sup>۲</sup> و همکاران به مرور آخرین مطالعات انجام شده در خصوص آسیب‌های نیروی ضربه، نمونه برخوردهای انجام شده در زلزله و روش‌های آنالیز عددی و آزمایشگاهی برخورد پرداخته‌اند [۱۹].

شبیه‌سازی صحیح پدیده برخورد گام مهمی برای شناخت آثار ضربه و در نتیجه ارائه راهکار مناسب جهت کاهش تبعات آن در سازه‌ها است. به همین جهت مدل‌های کاربردی مختلفی در این زمینه ارائه شده که بسیاری از آن‌ها از مدل پایه‌ای هرترز [۲۰] الهام گرفته‌اند. شکل ۱ دسته‌بندی کلی از مدل‌های موجود در شبیه‌سازی پدیده برخورد را نشان می‌دهد [۱]. به طور کلی انتخاب بهترین مدل جهت شبیه‌سازی ضربه بستگی به نوع مسئله دارد. به منظور آشنایی بیشتر با روش‌های مختلف مدل‌سازی ضربه می‌توان به مراجع [۱] و [۱۷] مراجعه نمود.

3 Kelvin - Voigt

1 Miari  
2 Brown

$$e = -\frac{V_1^f - V_2^f}{V_1^i - V_2^i} \quad (5)$$

در رابطه‌ی (۵)  $V_j^i, V_j^f$  به ترتیب سرعت‌های قبل و بعد از برخورد اجسام برخورد کننده هستند ( $j = 1, 2$ ).

یکی از محدودیت‌های مدل میراگر- فنر مذکور در رابطه (۲) ایجاد یک نیروی ضربه منفی درست قبل از لحظه‌ی جدایی دو جسم برخورد کننده است که فاقد توجیه فیزیکی است. علت به وجود آمدن این نیرو، فعال بودن مولفه میرایی ویسکوز (جمله دوم معادله (۲)) در تمام مدت زمان فاز جدایی دو جسم است. از طرفی فعال بودن مولفه میرایی ویسکوز با ضرایب میرایی یکسان در فازهای نزدیک شدن و جدا شدن دو جسم سبب استهلاک انرژی یکنواخت در تمام مدت زمان برخورد می‌شود که این موضوع نیز خلاف واقعیت است. شکل ۲ تاریخچه زمانی نیروی برخورد را نشان می‌دهد. با استناد به نتایج تحقیقات پیشین، مقدار استهلاک انرژی در فاز نزدیک شدن بیشتر است [۱۷].

در مدل ارائه شده توسط محمود و یانکوسکی<sup>۳</sup> به منظور رفع نقیصه وجود نیروی ضربه منفی قبل از جدایی دو جسم، نیروی ضربه به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای تعریف شده است که در آن به طور کلی از استهلاک انرژی در فاز جدا شدن صرف نظر شده و مدل کلین-وویت به شکل زیر اصلاح شده و بازنویسی شده است [۲۲]:

$$\begin{cases} F_p(t) = k\delta(t) + c(t)\dot{\delta}(t) & \dot{\delta} > 0 \\ F_p(t) = k\delta(t) & \dot{\delta} \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

در رابطه فوق اگر  $\dot{\delta} > 0$  باشد یعنی اجسام در لحظه برخورد قرار دارند (فاز برخورد) و اگر  $\dot{\delta} \leq 0$  اجسام در حال جدا شدن از یکدیگر (فاز جدایش) هستند. ضمن اینکه محققین فوق‌الذکر جهت محاسبه نسبت میرایی رابطه جدید زیر را ارائه نموده‌اند:

$$\zeta = \frac{1 - e^2}{e(e(\pi - 2) + 2)} \quad (7)$$

در رابطه (۱)،  $k$  پارامتر سختی و  $t(\delta)$  تغییر شکل نسبی دو جسم است. در این رابطه تنها تغییر شکل‌های الاستیک در نظر گرفته شده‌اند و از استهلاک انرژی نیز صرف نظر شده است. اگر توان  $\pi$  برابر با واحد در نظر گرفته شود مدل الاستیک خطی به وجود می‌آید که به عنوان ساده‌ترین مدل ارائه شده برای برخورد، نیروی ضربه را همانند عکس‌العمل یک فنر خطی مدل می‌نماید. بدیهی است با توجه به در نظر نگرفتن استهلاک انرژی، مدل فوق فاقد دقت کافی برای شبیه‌سازی برخورد است.

مدل ویسکوالاستیک خطی (مدل کلین-وویت) با اصلاح مدل الاستیک خطی منتج از رابطه (۱)، ساخته می‌شود. بدین صورت که علاوه بر فنر خطی، یک میراگر خطی نیز جهت شبیه‌سازی استهلاک انرژی مورد استفاده قرار می‌گیرد (معادله (۲)) [۵].

$$F_p(t) = k\delta(t) + c(t)\dot{\delta}(t) \quad (2)$$

در معادله فوق  $c(t)$  بیانگر ضریب میرایی ویسکوز است که از رابطه (۳) محاسبه می‌گردد. پارامتر  $\dot{\delta}(t)$  مبین سرعت نسبی دو جسم برخورد کننده به یکدیگر است.

$$c(t) = 2\zeta \sqrt{k \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \quad (3)$$

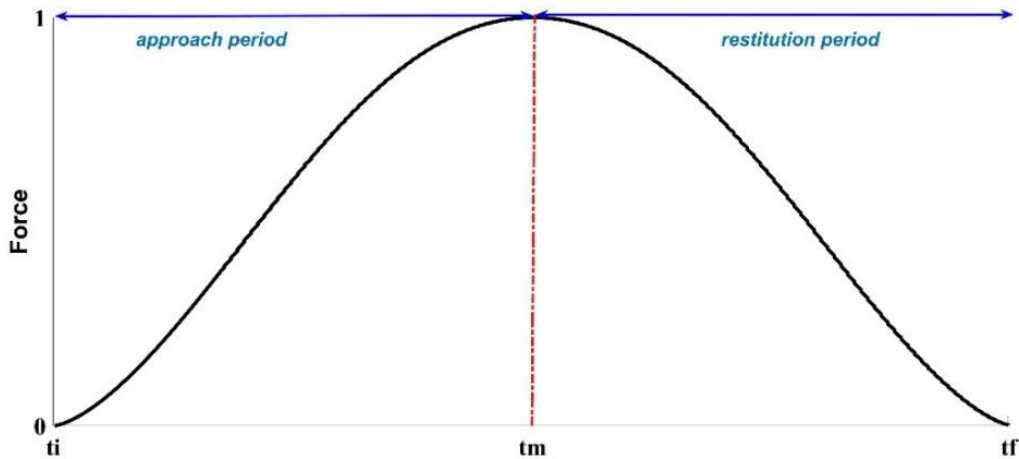
در رابطه فوق  $m_1$  و  $m_2$  جرم اجسام برخورد کننده و پارامتر  $\zeta$  بیانگر نسبت میرایی است. یکی از روابط پر کاربرد در محاسبه نسبت میرایی توسط آناگناستوپولوس<sup>۱</sup> به صورت زیر ارائه شده است [۲۱].

$$\zeta = \frac{-\ln e}{\sqrt{\pi^2 + (\ln e)^2}} \quad (4)$$

$e$  در این رابطه ضریب بازگشت<sup>۲</sup> نام دارد و به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

1 . Anagnostopoulos  
2 Coefficient of restitution





شکل ۲. تاریخچه زمانی نیروی ضربه

Fig. 2. Time history of impact force

محاسبات استهلاک انرژی در فاز برخورد و جدایش را برابر در نظر گرفت که خلاف نتایج آزمایشگاهی است. در این مقاله با تعریف فرضیات جدید و اصلاح نسبت میرایی در مدل کلونین-وویت، مدل بهبود یافته جدیدی ارائه شده است.

### ۳- مدل جدید کلونین-وویت

۳-۱- اتلاف انرژی در برخورد

با فرض  $m_1$  و  $m_2$  به عنوان جرم المان‌های برخورد کننده و طبق نظریه کلاسیک برخورد میزان انرژی مستهلک شده در برخورد،  $\Delta E$ ، به صورت رابطه‌ی زیر نوشته می‌شود [۲۲-۲۴]:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - e^2) \dot{\delta}_i \quad (11)$$

میزان استهلاک انرژی از طریق رابطه‌ی میرایی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\Delta E = \oint c \dot{\delta} d\delta = \oint \zeta \delta \dot{\delta} d\delta = \oint \zeta \delta \dot{\delta}^2 dt \quad (12)$$

کیون اینی<sup>۱</sup> نیز با استفاده از تئوری هرتز و روابط دینامیک سازه مدلی برای اصلاح مدل کلونین ارائه نمود که در آن رابطه نیروی ضربه به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۲۳].

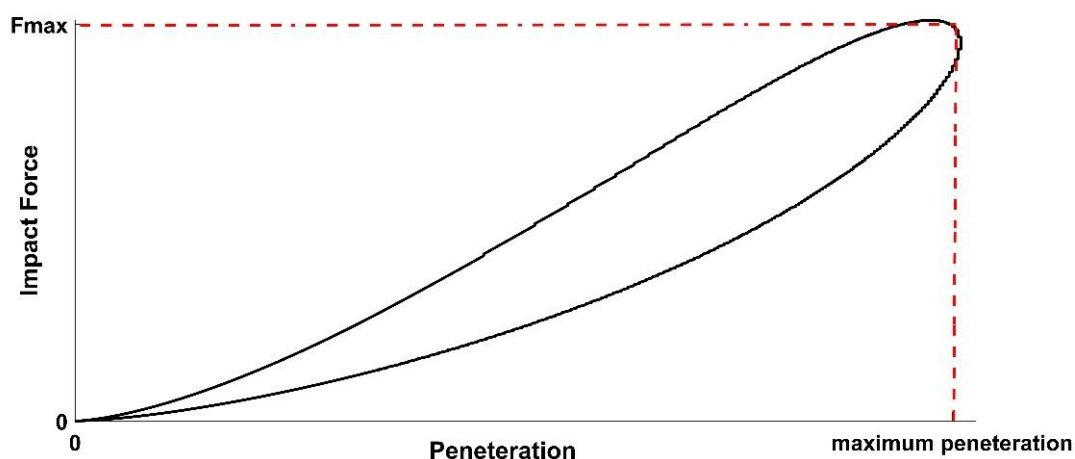
$$F_p(t) = k\delta(t) + \hat{c}(t)\dot{\delta}(t) \quad (8)$$

$$\hat{c}(t) = \hat{\zeta}\delta(t) \quad (9)$$

$$\hat{\zeta} = \frac{3}{2} \frac{k(1-e)}{e(\dot{\delta}_i)} \quad (10)$$

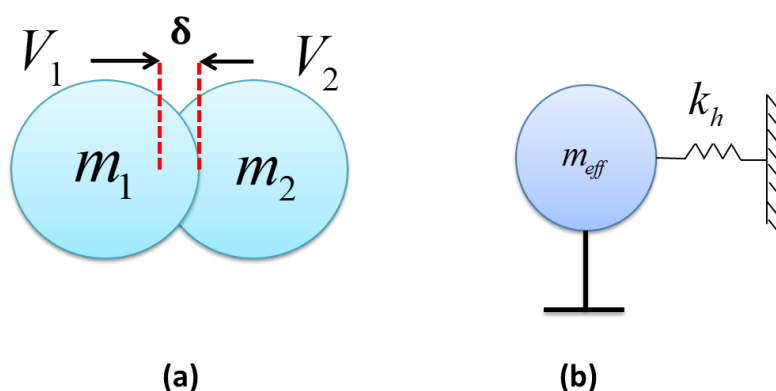
در رابطه شماره (۱۰) پارامتر  $\dot{\delta}_i$  سرعت دو جسم نسبت به یکدیگر قبل از برخورد است. نکته قابل توجه این است که کیون اینی به منظور بهبود مدل، رابطه جدیدی برای محاسبه نسبت میرایی ارائه نمود که مشکل وجود نیرو در فاز جدایش را نیز ندارد ولی در فرضیات اولیه جهت ساده‌سازی در





شکل ۳. نمودار نیرو-تغییر شکل (نفوذ)

Fig. 3. Force-deformation diagram (penetration)



شکل ۴. (a) برخورد دو جسم مجزا (b) سیستم معادل برخورد

Fig. 4. (a) collision of two separate objects (b) equivalent collision system

$$m\ddot{\delta}(t) + k_h\delta(t) = 0 \quad (13)$$

جواب‌های کلی این سیستم به صورت زیر است:

$$\delta = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) \quad (14)$$

$$\dot{\delta} = A\omega\cos(\omega t) - B\omega\sin(\omega t) \quad (15)$$

در رابطه (۱۲) پارامترهای  $\delta, \dot{\delta}, \ddot{\delta}$  به ترتیب بیانگر ضریب میرایی هیستریزیس، تغییر شکل (نفوذ) و سرعت در برخورد است. انتگرال‌گیری حول حلقه هیستریزیس انجام می‌شود تا انرژی مستهلک شده در هنگام ضربه را محاسبه نماید (شکل ۳).

جهت مدل‌سازی برخورد از مدل جرم-فنر یک درجه آزادی به عنوان سیستم معادل استفاده شده است (شکل ۴). معادله ارتعاش آزاد سیستم یک درجه آزادی بدون میرایی به صورت زیر نوشته می‌شود:

شرایط مرزی این سیستم را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\Delta E = \Delta E_{AP} + \Delta E_{RP} \quad (21)$$

$$\alpha = \frac{\Delta E_{RP}}{\Delta E_{AP}} \rightarrow \Delta E = (1 + \alpha)\Delta E_{AP} \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_i \left| \begin{array}{l} \delta_i = 0 \\ \dot{\delta}_i > 0 \end{array} \right. \\ t_m \left| \begin{array}{l} \delta_m \\ \dot{\delta}_m = 0 \end{array} \right. \\ t_f \left| \begin{array}{l} \delta_f \\ \dot{\delta}_f < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (16)$$

با توجه به اینکه  $\Delta E_{AP} > \Delta E_{RP}$  بنابراین،  $\alpha < 1$  فرض می‌شود. از روابط (۱۲) و (۲۲) رابطه زیر نتیجه می‌شود.

$$\Delta E = (1 + \alpha) \left[ \int_0^{t_m} \zeta \delta \dot{\delta}^2 dt \right] \quad (23)$$

با اعمال شرایط اولیه در زمان  $t_i$  در معادلات (۱۴) و (۱۵) ضرایب مجهول به دست آمده و معادلات به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

با جایگذاری روابط (۱۷) و (۱۸) در انتگرال فوق و حل عددی آن در نهایت رابطه (۲۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_i}{\omega} \sin(\omega t) \quad (17)$$

$$\dot{\delta} = \dot{\delta}_i \cos(\omega t) \quad (18)$$

$$\Delta E = \frac{(1 + \alpha)}{3} \zeta \dot{\delta}_i \delta_m^2 \quad (24)$$

در صورت اعمال شرایط مسئله در زمان  $t_m$  در معادلات (۱۷) و (۱۸) خواهیم داشت:

$$t_m = \frac{\pi}{2\omega} \quad (19)$$

$$\delta_m = \frac{\dot{\delta}_i}{\omega} \quad (20)$$

### ۳-۲- بقای انرژی و مومنتوم

از تعادل انرژی بین زمان‌های  $t_m$  و  $t_i$ :

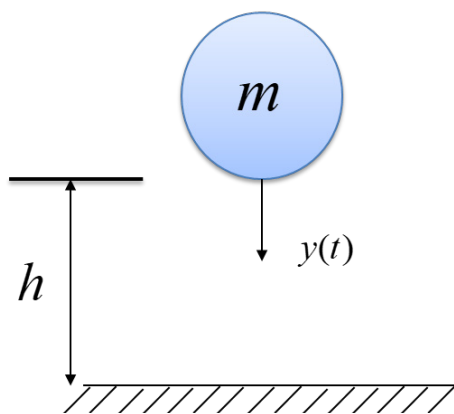
$$T_i = T_m + U_m + \Delta E_{AP} \quad (25)$$

در رابطه‌ی (۲۵) پارامترهای  $T_m$  و  $U_m$  بیانگر انرژی سینماتیک و انرژی کرنشی ذخیره شده در زمان‌های مذکور هستند. بنابراین:

$$\frac{1}{2} m_1 (V_1^i)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2^i)^2 = \quad (26)$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) (V_m)^2 + U_m + \Delta E_{AP}$$

اتلاف انرژی در هر دو فاز فشردگی و جدا شدن رخ می‌دهد. کل انرژی تلف شده طبق رابطه (۲۱) از جمع اتلاف انرژی در فاز فشردگی،  $\Delta E_{AP}$ ، و اتلاف انرژی در فاز جدا شدن،  $\Delta E_{RP}$  به دست می‌آید. اما، همانطور که قبلاً بیان شد نتایج تحقیقات نشان می‌دهد انرژی بیشتری در فاز فشردگی تلف می‌شود. بنابراین، جهت در نظر گرفتن این واقعیت ضریب  $\alpha$  طبق رابطه (۲۲) تعریف می‌شود:



شکل ۵. برخورد گوی بتنی به یک صفحه حجیم بتنی [۲۶]

Fig. 5. A concrete ball dropping on a thick concrete slab [26]

به منظور یافتن رابطه بین  $\zeta$  و  $\alpha$  و  $e$ ، برنامه‌ای در نرم افزار متلب [۲۵] نوشته شده است که در آن ضریب  $e$  از ۰/۱ تا ۱ با گام‌های ۰/۱ تغییر می‌یابد. مقدار مناسب  $\alpha$  باید به نحوی تعیین شود که  $e$  انتخاب شده قبل از برخورد و  $e$  به دست آمده بعد از برخورد کمترین اختلاف را با هم داشته باشند. در این مقاله جهت شبیه‌سازی برخورد از یک نمونه مدل برخورد (سقوط) گوی بتنی به صفحه حجیم بتنی (شکل ۵) الگوبرداری شده است [۲۶]. معادله دینامیکی این برخورد به صورت زیر نوشته شده است:

$$m\ddot{y}(t) + F_p(t) = mg \quad (31)$$

در معادله‌ی فوق  $m$  جرم گوی،  $\ddot{y}(t)$  شتاب قائم،  $g$  شتاب ثابت گرانش زمین (۹/۸ متر بر ثانیه) و  $F_p(t)$  نیروی ضربه می‌باشد. جرم گوی  $1/763$  کیلوگرم، سرعت اولیه برخورد  $0/13$  متر بر ثانیه و  $k_h$  (پارامتر سختی)  $4/91 \times 10^7$  نیوتن بر متر (مقادیر پیش فرض آزمایش) در نظر گرفته شده است.

روش کار به این صورت است که مقدار اولیه  $e$  (یعنی  $e_{pre}$ ) که برای هر ماده در طبیعت منحصر به فرد است انتخاب شده و نیروی ضربه بر اساس مدل کلون-وویت برای آن محاسبه می‌شود. نیروی برخورد به ازای محدوده متغیر ضریب  $\alpha$  که بین ۰ و ۱ است به دست آمده و به ازای هر  $\alpha$  در نظر گرفته شده پس از پایان مدل‌سازی از روابط تئوری با توجه به رابطه ۵ مقدار  $e$  بعد از برخورد ( $e_{post}$ ) محاسبه می‌شود. نهایتاً ضریب  $\alpha$  دارای کمترین اختلاف (خطا) بین ضرایب بازگشت ( $e$ ) قبل و بعد از برخورد انتخاب

از قانون بقای مومنتوم در زمان‌های مذکور رابطه ۲۷ حاصل می‌گردد:

$$m_1 V_1^i + m_2 V_2^i = (m_1 + m_2) V_m \quad (27)$$

با استفاده از روابط (۷) و (۲۱) و (۲۲) و (۲۳) می‌توان نوشت:

$$U_m + \Delta E_{AP} = \frac{\Delta E}{(1 - e^2)} \quad (28)$$

انرژی کرنشی ذخیره شده از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$U_m = \int_0^{\delta_m} k_h \delta d\delta = \frac{1}{2} k_h \delta_m^2 \quad (29)$$

در نهایت با جایگذاری روابط (۲۲) و (۲۴) و (۲۹) در معادله (۲۸) نسبت

میرایی به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\zeta = \frac{3(1 - e^2)k_h}{2(\alpha + e^2)\dot{\delta}_i} \quad (30)$$

محدوده تغییرات  $\alpha$  بین صفر تا یک در نظر گرفته شده است. مقدار صفر برای پارامتر  $\alpha$  نشان دهنده‌ی آن است که استهلاک انرژی در فاز جدا شدگی در نظر گرفته نشده است و مقدار یک برای این ضریب به این معنی است که استهلاک انرژی فاز فشردگی و فاز جدایش برابر در نظر گرفته شده است.  $\alpha$  باید به گونه‌ای انتخاب شود که در حالت ایده‌آل ضریب  $e$  اولیه، که معمولاً با توجه به نتایج آزمایشگاهی برای مصالح مختلف انتخاب می‌شود، و  $e$  بعد از برخورد که از رابطه (۵) محاسبه می‌شود، با هم برابر باشند. بنابراین، با تعیین مقدار  $\alpha$  مناسب در مدل برخورد به روش کلون-وویت اصلاح شده در این مقاله می‌توان اثر استهلاک انرژی در هر دو فاز برخورد و جدایش را در نظر گرفت. روش به دست آوردن مقدار مناسب ضریب  $\alpha$  به صورت زیر می‌باشد.

جدول ۱. مقادیر مناسب ضریب  $\alpha$  با توجه به معیار ضریب بازگشت (e)

Table 1. Appropriate values of coefficient  $\alpha$  according to the criterion of coefficient of restitution (e)

$\alpha$	$e_{pre}$	$e_{post}$	درصد خطا
۰/۲	۰/۱	۰/۱۲۷۲	۲۷/۲۵
۰/۳	۰/۲	۰/۲۰۷۷	۳/۸۷
۰/۴	۰/۳	۰/۳۰۰۲	۰/۰۵
۰/۵	۰/۴	۰/۳۹۷۵	۰/۶۲
۰/۶	۰/۵	۰/۴۹۶۲	۰/۷۵
۰/۷	۰/۶	۰/۵۹۵۰	۰/۸۴
۰/۸	۰/۷	۰/۶۹۳۳	۰/۹۵
۱	۰/۸	۰/۸۰۱۳	۰/۱۷
۱	۰/۹	۰/۸۸۹۷	۱/۱۵
۱	۱	۰/۹۸۸۳	۱/۱۷
میانگین خطا (درصد)			۳/۶۸

به حداقل رسیده و به حالت ایده آل بسیار نزدیک گردد. قابل ذکر است در تحقیق حاضر فرض می‌شود که رفتار مصالح پس از برخورد در محدوده ارتجاعی باقی می‌ماند. بنابراین، از هرگونه رفتار خمیری (پلاستیک) و یا کاهش سختی در پی برخورد صرف نظر شده است. همچنین، اثر ضربات پیاپی نیز منظور نشده است.

در نهایت روابط مربوط به مدل ارائه شده در این مقاله را به صورت زیر جمع‌بندی می‌گردد:

$$F_p(t) = k\delta(t) + \tilde{c}(t)\dot{\delta}(t) \quad (33)$$

$$\tilde{c}(t) = \tilde{\zeta}\delta(t) \quad (34)$$

$$\tilde{\zeta} = \frac{3(1-e^2)}{2(\alpha+e^2)} \frac{k_h}{\delta_i} \quad (35)$$

$$\alpha = f(e) : \begin{cases} e+1 & 0.1 \leq e < 0.8 \\ 1 & 0.8 \leq e \leq 1 \end{cases} \quad (36)$$

می‌شود. ضرایب بازگشت مربوط به مواد و مصالحی که در علوم مهندسی کاربرد بیشتری دارند اهمیت ویژه‌ای دارند که مقدار آن‌ها تقریباً بین ۰/۵ تا ۰/۷۵ است [۲۴].

برای حل معادله دینامیکی مطابق شرایطی که در بالا ذکر شد از روش رانژ کوتای مرتبه چهارم در نرم افزار محاسباتی متلب استفاده شده است. نتایج تحلیل‌ها در جدول ۱ قابل مشاهده است.

با توجه به مقادیر به دست آمده برای  $\alpha$  در جدول ۱، این ضریب برای مدل سقوط گوی بتنی به صفحه حجیم بتنی به صورت تابعی برحسب  $e$  به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\alpha = f(e) : \begin{cases} e+1 & 0.1 \leq e < 0.8 \\ 1 & 0.8 \leq e \leq 1 \end{cases} \quad (32)$$

لازم به ذکر است مقادیر به دست آمده جهت تعیین ضریب  $\alpha$  شناور بوده و قابل تعمیم به سایر مدل‌های برخورد نیز می‌باشد. مدل سقوط گوی بتنی در این مقاله صرفاً جهت نشان دادن نحوه به دست آوردن ضریب  $\alpha$  و استفاده از آن در رابطه تئوری شماره (۳۰) انتخاب شد. در حقیقت ضریب  $\alpha$  مانند پیچ تنظیمی برای رابطه تعیین استهلاک انرژی در هر مدل عمل نموده که به وسیله آن می‌توان استهلاک انرژی بین فاز برخورد و جدایش را به گونه‌ای تراز نمود که اختلاف ضریب بازگشت (e) قبل و بعد از برخورد

جدول ۲. مقایسه‌ی مدل‌های مختلف کلوین-وویت در تخمین ضریب بازگشت  $e$

Table 2. Comparison of different Kelvin-Voigt Models in estimating the coefficient of restitution ( $e$ )

مدل‌ها	درصد میانگین خطا	
	$0.1 \leq e \leq 1$	$0.5 \leq e \leq 0.8$
S. Anagnostopoulos [21]	۲۸/۷۶	۱۱/۶۵
S. Mahmoud & R. Jankowski [22]	۹/۴۱	۹/۰۴
K. Ye et al [23]	۱۰/۸۶	۴/۶۰
Current paper	۳/۶۸	۰/۶۸

زمانی نیروی ضربه و مقدار ماکزیمم نیروی ضربه در زمان  $t_m$  در این مدل نیز ارزیابی شد. نتایج آنالیز مدل ارائه شده در این مقاله و سایر مدل‌های ویسکوالاستیک خطی با نتایج آزمایش سقوط گوی بتنی بر روی صفحه‌ی حجیم همجنس آن [۲۶] مقایسه شد. در این آزمایش جرم گوی  $1/763$  کیلوگرم، سرعت اولیه برخورد  $0.13$  متر بر ثانیه،  $k_h$  (پارامتر سختی)  $4/91 \times 10^7$  نیوتن بر متر و ضریب بازگشت بتن  $e=0.76$  (مقادیر پیش فرض آزمایش) در نظر گرفته شده است. همانگونه که در شکل ۶ مشاهده می‌گردد تاریخچه زمانی نیروی ضربه مدل ارائه شده تطابق خوبی با نتایج آزمایش دارد. ضمناً ماکزیمم نیروی ضربه که در لحظه  $t_m$  رخ می‌دهد، برای همه‌ی مدل‌ها برآورد شده و نسبت به نتایج آزمایش مقایسه شده است. نتایج این ارزیابی نیز در جدول ۳ ارائه شده که مجدداً مشاهده می‌گردد مدل ارائه شده دقت بالایی در تخمین ماکزیمم مقدار نیروی ضربه در زمان  $t_m$  دارد.

#### ۵- نتیجه‌گیری

شبیه‌سازی دقیق پدیده برخورد اجسام به شناخت بهتر این پدیده کمک نموده و به مهندسين این امکان را می‌دهد که راهکار مناسبی برای پیش‌گیری از برخورد و یا کاهش خسارات ناشی از آن ارائه دهند. مدل‌های مختلفی در این زمینه توسط مهندسين سازه و مکانیک مطرح شده است. یک شاخه از این مدل‌ها با نام ویسکوالاستیک خطی (کلوین-وویت) مشهور است. در این تحقیق مدل جدید کلوین جهت شبیه‌سازی برخورد ارائه شد. در این مدل با تعریف ضریب آلفا در رابطه تعیین استهلاک انرژی، میزان انرژی مستهلک شده در فاز برخورد و جدایش تحت کنترل درآمد و به راحتی برای هر مدلی قابل تنظیم است. مدل مطرح شده با سایر مدل‌های

#### ۴- مقایسه مدل اصلاح شده با نتایج آزمایش و سایر مدل‌ها

##### ۴-۱- ارزیابی ضریب بازگشت ( $e$ )

جهت ارزیابی ضریب  $e$ ، مقدار آن از  $0.1$  تا  $1$  با گام‌های  $0.1$  انتخاب می‌شود. مقدار  $e$  برای هر ماده طبق نتایج آزمایشگاهی به دست می‌آید. سپس برخورد طبق مدل‌های مختلف ارائه شده (جدول ۲) صورت گرفته و از رابطه‌ی (۵) مقدار  $e$  حاصل از این روابط بعد از آنالیز به دست آمده و با مقدار انتخاب شده‌ی اولیه (که معرف آن ماده مورد نظر است) مقایسه شده است. خطای نسبی از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$Error = \frac{|e_{PRE} - e_{POST}|}{e_{PRE}} \times 100 \quad (37)$$

همانطور که در بخش‌های قبل بیان شد، مقدار  $e$  در بازه  $0.5$  تا  $0.75$  به دلیل قرار گرفتن اکثر مواد و مصالح ساختمانی در این محدوده، اهمیت ویژه‌ای دارد و در جدول به صورت مجزا بررسی شده است.

طبق نتایج به دست آمده در جدول ۲ مدل اصلاح شده‌ی پیشنهادی در مقاله‌ی حاضر نسبت به سایر مدل‌های کلوین هم در محدوده مواد مهندسی و هم در محدوده کلی مواد از دقت بهتری برخوردار بوده و دارای خطای بسیار کمتری است.

۴-۲- ارزیابی تاریخچه زمانی نیروی ضربه و مقدار ماکزیمم نیروی ضربه علاوه بر توانایی مدل ارائه شده در مدل‌سازی دقیق استهلاک انرژی حین ضربه، که با شاخص ضریب بازگشت ( $e$ ) سنجیده شد، تاریخچه

جدول ۳. مقایسه مدل‌های مختلف کلوین-وویت در تخمین نیروی ضربه با نتایج آزمایشگاهی

**Table 3. Comparison of the accuracy of different variants of Kelvin-Voigt Model in the peak response evaluation of the impact force**

مدل‌ها	درصد قدرمطلق خطای ماکزیمم نیروی برخورد هر مدل نسبت به آزمایش
<b>S. Anagnostopoulos [21]</b>	۲/۲
<b>S. Mahmoud &amp; R. Jankowski [22]</b>	۳/۸
<b>K. Ye et al [23]</b>	۰/۸
<b>Current paper</b>	۰/۸

Japan, in: Proceedings of the 3rd US Japan Workshop on Seismic Retrofit of Bridge, 1996.

[4] M. Saatcioglu, D. Mitchell, R. Tinawi, N.J. Gardner, A.G. Gillies, A. Ghobarah, D.L. Anderson, D.J.C.J.o.C.E. Lau, The August 17, 1999, Kocaeli (Turkey) earthquake damage to structures, 28(4) (2001) 715-737..

[5] R.J.E.s. Jankowski, Earthquake-induced pounding between equal height buildings with substantially different dynamic properties, 30(10) (2008) 2818-2829.

[6] S.A.J.E.e. Anagnostopoulos, s. dynamics, Pounding of buildings in series during earthquakes, 16(3) (1988) 443-456.

[7] C.G. Karayannis, M.J.J.E.E. Favvata, S. Dynamics, Earthquake-induced interaction between adjacent reinforced concrete structures with non-equal heights, 34(1) (2005) 1-20.

[8] R. Jankowski, Assessment of damage due to earthquake-induced pounding between the main building and the stairway tower, in: Key Engineering Materials, Trans Tech Publ, 2007, pp. 339-344.

[9] B. Madani, F. Behnamfar, H.T.J.S.D. Riahi, E. Engineering, Dynamic response of structures subjected to pounding and structure-soil-structure interaction, 78 (2015) 46-60.

[10] M. Ghandil, F. Behnamfar, M.J.S.D. Vafacian, E. Engineering, Dynamic responses of structure-soil-

ویسکوالاستیک خطی از نظر تخمین استهلاک انرژی و نیروی ضربه مقایسه شد. انتخاب ضریب بازگشت (e) از داده‌های آزمایشگاهی قبل از برخورد و برآورد این مقدار بعد از مدل‌سازی و مقایسه اختلاف آن‌ها، شاخصی برای تعیین میزان دقت مدل‌های ارائه شده در شبیه‌سازی استهلاک انرژی بین دو جسم برخورد کننده است. مدل جدید توانایی تخمین انرژی مستهلک شده با دقتی بسیار بالاتر نسبت به سایر مدل‌ها (هم در محدوده مواد مهندسی و هم در محدوده کلی مواد) را دارد. ضمن اینکه این مدل به خوبی می‌تواند هم تاریخچه زمانی نیروی ضربه و هم ماکزیمم نیروی ضربه برخورد دو جسم را مدل‌سازی کند. بنابراین، با توجه به سادگی (ماهیت خطی رابطه) این مدل به جهت استفاده در برنامه‌های رایانه‌ای و کدنویسی و همچنین دقت مناسب آن می‌توان جهت شبیه‌سازی پدیده برخورد از آن استفاده نمود.

## منابع

- [1] A. Banerjee, A. Chanda, R. Das, Historical origin and recent development on normal directional impact models for rigid body contact simulation: a critical review, Archives of Computational Methods in Engineering, 24(2) (2017) 397-422.
- [2] E. Rosenblueth, R.J.C.i. Meli, The 1985 Mexico earthquake, 8(5) (1986) 23-34.
- [3] H. Otsuka, S. Unjoh, T. Terayama, J. Hoshikuma, K. Kosa, Damage to highway bridges by the 1995 Hyogoken Nanbu earthquake and the retrofit of highway bridges in

- [18] M. Miari, K.K. Choong, R. Jankowski, Seismic pounding between bridge segments: a state-of-the-art review, *Archives of Computational Methods in Engineering*, 28(2) (2021) 495-504.
- [19] T. Brown, A. Elshaer, Pounding of structures at proximity: A state-of-the-art review, *Journal of Building Engineering*, (2022) 103991.
- [20] H.J.M.p. Hertz, On the contact of solids—on the contact of rigid elastic solids and on hardness, (1896) 146-183.
- [21] S.A.J.E.E. Anagnostopoulos, S. Dynamics, Equivalent viscous damping for modeling inelastic impacts in earthquake pounding problems, 33(8) (2004) 897-902.
- [22] S. Mahmoud, R.J.I.J.o.S. Jankowski, T.T.o.C. Engineering, Modified linear viscoelastic model of earthquake-induced structural pounding, 35(C1) (2011) 51.
- [23] K. Ye, L.J.F.o.A. Li, C.E.i. China, Impact analytical models for earthquake-induced pounding simulation, 3(2) (2009) 142-147.
- [24] K. Ye, L. Li, H.J.E.E. Zhu, S. Dynamics, A note on the Hertz contact model with nonlinear damping for pounding simulation, 38(9) (2009) 1135-1142.
- [25] MATLAB 2021a., Natick, Massachusetts, USA: MathWorks, Inc., 2021.
- [26] R. Jankowski, S. Mahmoud, Earthquake-induced structural pounding, Springer, 2015.
- structure systems with an extension of the equivalent linear soil modeling, 80 (2016) 149-162.
- [11] B.D.J.E.e. Westermo, s. dynamics, The dynamics of interstructural connection to prevent pounding, 18(5) (1989) 687-699.
- [12] K. Kasai, J.A. Munshi, B.F. Maison, Viscoelastic dampers for seismic pounding mitigation, in: *Structural Engineering in Natural Hazards Mitigation*, ASCE, 1993, pp. 730-735.
- [13] J.E. Luco, F.C.J.E.E. De Barros, S. Dynamics, Optimal damping between two adjacent elastic structures, 27(7) (1998) 649-659.
- [14] W. Zhang, Y.J.J.o.S. Xu, Vibration, Vibration analysis of two buildings linked by Maxwell model-defined fluid dampers, 233(5) (2000) 775-796.
- [15] P.C. Polycarpou, P. Komodromos, A.C.J.E.E. Polycarpou, S. Dynamics, A nonlinear impact model for simulating the use of rubber shock absorbers for mitigating the effects of structural pounding during earthquakes, 42(1) (2013) 81-100.
- [16] A. Malhotra, T. Roy, V. Matsagar, Effectiveness of friction dampers in seismic and wind response control of connected adjacent steel buildings, *Shock and Vibration*, 2020 (2020).
- [17] M. Papi, H. Toopchi-Nezhad, "A Literature Review on Modeling and Mitigating the Pounding Effects in Buildings", *Amirkabir J. Civil Eng.*, , " vol. 50, no. 6, pp. 1113-1126, 2019( in Persian).

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Papi, H. Toopchi-Nezhad , *New Kelvin-Voigt Model to simulate the collision of rigid bodies*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 54(9) (2022) 3497-3508.

DOI: 10.22060/ceej.2022.19824.7264





