



## Experimental static data based Embedded Crack Identification of beam-column structures under axial load

M.S. Hashemi, R.A. Izadifard \*

Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

**ABSTRACT:** Identification of damage to structures in order to prevent their expansion or improvement is an important issue that has received much attention from researchers. In this experimental study, a triangular model was used to apply the embedded cracks using CNC on the laboratory beam-columns. The size of the elements is such that the effective length of the crack is located inside the element and from it has not been removed. To identify embedded cracks, a static data index was used for Euler-Bernoulli beam-columns under axial load. In this laboratory study, two simple beams models with single, multiple damages and different loading scenarios were used. In the first step, the laboratory horizontal displacements are recorded and then included in the index. Finally, a comparison of the laboratory and the numerical results have shown the performance accuracy of the static database index.

### Review History:

Received: Jul. 10, 2020

Revised: Sep. 19, 2020

Accepted: Dec. 24, 2020

Available Online: Jan. 07, 2021

### Keywords:

Experimental data

Embedded crack detection

Axial load

Simply supported beam-column

Static index

### 1- Introduction

The failure of the structure may be seen as any deviations or changes in the geometry of the original structure or material properties that may cause stress, displacement, undesirable vibration and eventually lead the structure to weaken. The main purpose of this thesis is the detection of occurrence, location and severity of the failure. For this purpose, structural response plays an important role. Most diagnosis methods in structures are based on observing changes in structural responses. In recent years, various methods for the diagnosis of damage in various structures have been proposed by researchers. But because of the significant progress of this science, extensive effort and research have been made in recent two decades. Structural health control is used to check structural damage in order to prevent sudden destruction of the structure. For this purpose, changes of dynamic and static parameters of the structure are employed. In this regard, the dynamic responses of the structure have been applied by different researchers to estimate the natural frequencies and the mode shape of the structure [1-3]. In addition, static parameters depend only on the stiffness matrix and on the other hand, its measuring instruments are less expensive and more accessible than dynamic instruments. It has received more attention that in

this regard, we can mention the work of Yazdanpanah et al. [4]. This paper aims to investigate the behavior of beam-column structures with respect to axial loads experimentally. For this purpose, the proposed effective damage index for beam-column structures has been investigated through laboratory data, including displacements and its first and second derivatives.

### 2- Index provided to damage detection in laboratory samples

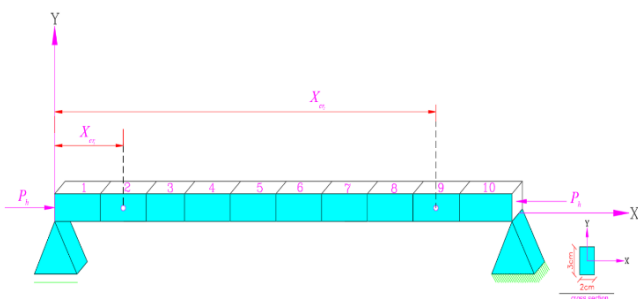
In this index, a prismatic beam-column with a certain length has been studied to identify embedded crack. In the first stage, the beam-column is optionally divided into a number of finite elements, then the horizontal displacement of the healthy and damaged beam-column at the node points

$$nSRBI_q = \max \left[ 0, \left( \frac{SRBI_q - \text{mean}(SRBI)}{\text{std}(SRBI)} \right) \right], \quad (1)$$
$$q = 1, 2, \dots, n + 1$$

$$SRBI_q = \left[ \left| u_{d(q)}'' - u_{h(q)}'' \right| \times u_{d(q)}'^2 \right] - \left[ \left| u_{d(q)}' - u_{h(q)}' \right|^2 \times u_{h(q)} \right], \quad (2)$$

\*Corresponding author's email: izadifard@eng.ikiu.ac.ir





**Fig. 1. Shape and geometry of a simply supported beam-column and its cross-section: case 1**



**Fig. 2. Laboratory equipment**

**Table 1. Damage scenario induced in simply supported beam-column**

Case	Element number	Damage Ratio*	Ph(kg) axial
1	2&9	20&20	2200

\*Damage ratio is  $(Ac/A)*100$  where  $Ac$  is the crack area

is obtained by a finite element method and for this purpose, a MATLAB code [5] has been prepared. Then, having the node coordinates of the beam-column elements, the research index (nSRBI) was defined as Equation (1).

Where  $SRBI_{hd,q}$  is defined by Eq. (2). Also, mean ( $SRBI_{hd,q}$ ) and std ( $SRBI_{hd,q}$ ) represent the mean and standard deviation of  $(SRBI_q, q = 1, 2, \dots, n + 1)$  respectively structure

### 3- Laboratory details of the research

The procedure of laboratory research is done in three steps as follows:

#### 3-1-How to select the number of elements and apply deliberate damage to the beam-column structure

The choice of the number of elements in the laboratory beam-columns was optional. According to the finite element rule, it is noteworthy that the greater the number of elements and nodes, the more accurate the location of the damage will be. But on the other hand, the

The number of elements, according to Mr. Sinha's rule, should be maximum so that the size of the element is not less than twice the effective length of the crack or three times the height of the cross-section of the beam. Because otherwise, the effective length of the crack will enter the adjacent element and the boundary of the elements will be lost. After selecting the number of elements, case damages were optionally created in the elements with the help of CNC precision tools and in the next steps were used to validate the selected index.

#### 3- 2- How to record laboratory data

After selecting the elements and applying the optional cracks with the help of a precision instrument, in the next step, the beams-columns were subjected to specific loads axially using a hydraulic jack and a load cell sensor, and at the same time, with the help of displacement sensors, axial displacement of beam-columns at node points (beginning and end points of elements) were recorded through data logger and computer system.

#### 3- 3- How to place the recorded results in the equations

Finally, the slope and curvature of the recorded laboratory results were calculated as the displacement of node points using MATLAB code and placed in the index equations, and the corresponding nSRBI index was calculated.

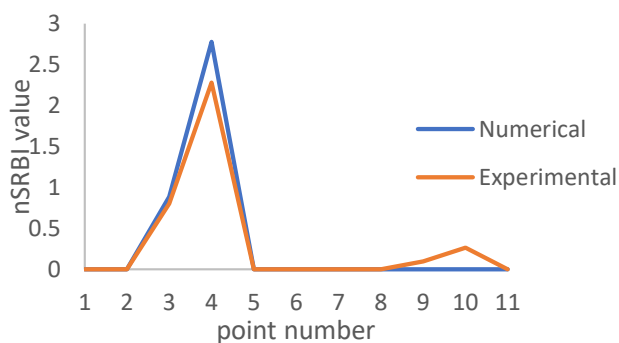
### 4- Numerical and laboratory example

In order to evaluate the efficiency of the proposed index for embedded cracks under the axial load of simply supported beam-column with a span of  $L = 0.62$  (m) according to Figure 1 with a different location of the damage is considered as an example. The dimensions of the cross-section of the beam-column are, as shown in the figure is  $0.02 \times 0.03$  ( $m^2$ ). The modulus of elasticity is  $E = 2.1 \times 10^{11}$  ( $N/m^2$ ). According to Table 1, in order to evaluate the proposed method, a case of multiple damages is considered. In the proposed scenario, the effect of axial load on the embedded crack detection in the damaged element has been evaluated using theoretical and laboratory methods.

Figure 2 also shows the laboratory equipment. The beam-column crack detection diagram for case (1) listed in Table 1 is illustrated in Figure 3.

### 5- Conclusion

In this paper, the effect of axial load on embedded crack detection index (nSRBI) was studied using laboratory results and its comparison with theoretical results for similar elements. According to laboratory and theoretical results, the value of nSRBI is higher near some elements in



**Fig. 3. Diagrams of damage detection for simply supported beam-column for the case 1**

which embedded cracks have occurred. As a result, nSRBI index is sensitive to stiffness reduction and the results showed that this index is able to identify the location of single and multiple damages correctly.

### References

- [1] J.-T. Kim, Y.-S. Ryu, H.-M. Cho, N. Stubbs, Damage identification in beam-type structures: frequency-based method vs mode-shape-based method, *Engineering structures*, 25(1) (2003) 57-67.
- [2] O. Salawu, Detection of structural damage through changes in frequency: a review, *Engineering structures*, 19(9) (1997) 718-723.
- [3] O. Yazdanpanah1a, S. Seyedpoor, A new damage detection indicator for beams based on mode shape data, *Structural Engineering and Mechanics*, 53(4) (2015) 725-744.
- [4] O. Yazdanpanah, R.A. Izadifard, M. Abdi Moghadam, Embedded Crack Identification in Beam-Column Structures under Axial Load Using an Efficient Static Data Based Indicator, *Journal of Rehabilitation in Civil Engineering*, 4(2) (2016) 67-78.
- [5] MATLAB (R2010b), the language of technical computing (software), Math Works Inc.

#### HOW TO CITE THIS ARTICLE

M.S. Hashemi, R.A. Izadifard, *Experimental static data based Embedded Crack Identification of beam-column structures under axial load*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 53(12) (2022) 1107-1110.

DOI: 10.22060/ceej.2021.18662.6935







## شناسایی ترک‌های مدفون در تیر-ستون‌ها تحت بار محوری با استفاده از داده‌های استاتیکی آزمایشگاهی

میرصیاد هاشمی، رضاعلی ایزدی فرد\*

دانشکده مهندسی، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران.

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۹/۰۴/۲۰  
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۶/۲۹  
پذیرش: ۱۳۹۹/۱۰/۰۴  
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۸/۱۰

### کلمات کلیدی:

داده‌های آزمایشگاهی  
شناسایی ترک مدفون  
بار محوری  
تیر-ستون دو سر ساده  
شاخص استاتیکی

**خلاصه:** شناسایی آسیب در سازه به منظور جلوگیری از گسترش آن و یا بهسازی مسئله مهمی است که مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفته است. علی‌رغم ارائه روش‌های مختلف برای شناسایی آسیب، کشف ترک‌های مدفون در تیر-ستون‌ها کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در این پژوهش آزمایشگاهی برای اعمال ترک‌های مدفون به کمک دستگاه ابزار دقیق بر روی تیر-ستون‌های آزمایشگاهی از یک مدل مثلی استفاده شده است. اندازه المان‌ها به گونه‌ای می‌باشد که طول موثر ترک در داخل المان قرار گرفته و از آن خارج نشده است. برای شناسایی آسیب در تیر-ستون اوپلر برنولی تحت بار محوری در این پژوهش از شاخص مبتنی بر داده‌های استاتیکی استفاده شده است. که در این روش برای محاسبه پاسخ‌های استاتیکی از یک روش المان محدودی بهره گرفته شده است. در ادامه بر اساس روش تفاضل مرکزی محدود، شیب و انحنای تغییر مکان‌های افقی محاسبه شده و در شاخص قرار گرفته است. برای این منظور در این پژوهش آزمایشگاهی دو مدل تیر دو سر ساده با سناریو خرابی تکی، چندگانه و بارگذاری متفاوت در نظر گرفته شد. در مرحله اول تغییر مکان‌های آزمایشگاهی به صورت تغییر مکان محوری تیر-ستون ثبت، سپس در شاخص مورد نظر قرار گرفتند و در نهایت مقایسه نتایج آزمایشگاهی و تئوری بیانگر صحت کارایی شاخص مبتنی بر داده‌های استاتیکی می‌بود. همچنین تفاوت جزئی بین نتایج آزمایشگاهی و تئوری بیانگر نویزها و خطاهایی (ساخت قطعات، انجام آزمایش‌ها، خطای سنسورها و...) است که در آزمایشگاه رخ داده بودند.

### ۱- مقدمه

تشخیص خسارت در سازه‌ها می‌تواند بر پایه پاسخ سازه‌ها تحت اثر بارهای اعمالی صورت پذیرد. روش‌های گوناگونی برای تشخیص خرابی در سازه‌ها ارائه شده است که هر کدام دارای توانایی‌ها و ضعف‌هایی می‌باشند. یکی از روش‌های مرسوم برای یافتن اعضای خراب سازه استفاده از آزمایش ارتعاش است. به کمک ارتعاش‌های سازه، می‌توان فرکانس و شکل مودها را محاسبه نمود و خرابی سازه را بررسی کرد. بهینه‌سازی روش دیگری است که می‌توان از طریق آن به شناسایی آسیب پرداخت. این روش که ریشه‌ی آن به زمان نیوتن و لاگرانژ بازمی‌گردد با الهام گرفتن از پدیده‌های طبیعی موجود در جهان و روش‌های ریاضی به بررسی خرابی در سازه می‌پردازد. در این راستا محققین فراوانی با ارائه الگوریتم‌های مختلف به نتایج دقیق‌تری دست یافتند. از دیگر روش‌های شناسایی محل خرابی در سازه‌ها بر اساس پاسخ‌های دینامیکی ناشی از تحلیل تاریخچه‌ی زمانی می‌باشد. زمانی که سازه دچار آسیب می‌شود، به دلیل کاهش سختی و در اثر بارهای اعمال شده، تغییر مکان‌ها در نقاط مختلف سازه افزایش می‌یابند. همچنین می‌توان

خرابی سازه‌ای ممکن است به عنوان هر انحراف یا تغییر در هندسه سازه اصلی و یا خصوصیات مصالح مشاهده شود که ممکن است باعث ایجاد تنش، تغییر مکان، ارتعاشات نامطلوب و در نهایت هدایت سازه به سمت ضعیف شدن شود. هدف اصلی روش‌های شناسایی خرابی تشخیص وقوع، محل و شدت خرابی است. برای این منظور، پاسخ‌های سازه نقش اساسی را ایفا می‌کنند. اساس بسیاری از روش‌های عیب‌یابی در سازه‌ها مبتنی بر مشاهده ایجاد تغییرات در پاسخ‌های سازه‌ای است زیرا بروز خرابی موجب کاهش سختی و گاهی جرم سازه و در نتیجه تغییر در پاسخ‌های سازه‌ای می‌شود. به بیان دیگر بروز آسیب در سازه سبب ایجاد تغییراتی در مشخصه‌های استاتیکی و دینامیکی آن می‌گردد که تحلیل این نتایج عددی و مقایسه آن‌ها با نتایج عددی حاصل از شاخص‌های موجود، مهندسیین را به تشخیص محل بروز و نیز شدت آسیب رهنمون خواهد ساخت. روش‌های

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: izadifard@eng.ikiu.ac.ir



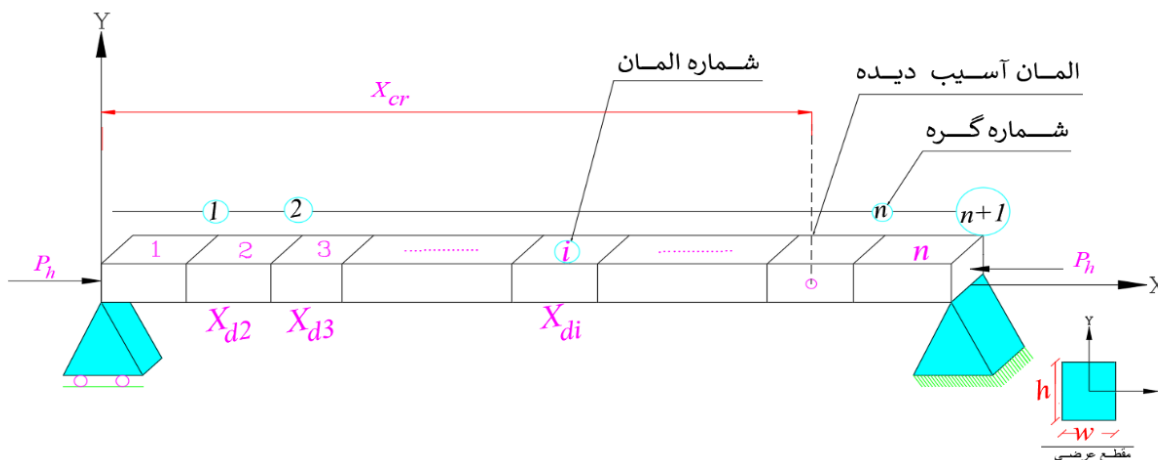
به کمک محاسبه اختلاف انرژی کرنشی در هر عضو از سازه‌ی آسیب دیده و سالم در هر لحظه خرابی سازه را مکان‌یابی نمود. اعضای خراب سازه با تعیین مقدار انرژی کرنشی نسبت به حالت سالم نمایان می‌گردند.

در سالهای اخیر روش‌های متعددی برای عیب‌یابی در سازه‌های گوناگون توسط پژوهشگران پیشنهاد شده است. اما علت پیشرفت چشم‌گیر این علم، تلاش و تحقیقات گسترده محققین در دو دهه اخیر می‌باشد. کنترل سلامت سازه به منظور چک کردن سازه به لحاظ آسیب جهت جلوگیری از تخریب ناگهانی سازه مورد استفاده قرار می‌گیرد. بدین منظور تغییرات پارامترهای دینامیکی و استاتیکی سازه به کار گرفته می‌شوند. در این راستا پاسخ‌های دینامیکی سازه توسط محققین مختلفی برای تخمین فرکانس‌های طبیعی و شکل مودی سازه به کار برده شده است [۱۰-۱]. علاوه بر این، پارامترهای استاتیکی که فقط وابسته به ماتریس سختی بوده و از طرفی ابزارهای سنجش آن کم هزینه و قابل دسترس‌تر از ابزارهای دینامیکی می‌باشند بیشتر مورد توجه قرار گرفته است که در این زمینه می‌توان به کار یزدان پناه و همکاران‌شان اشاره کرد [۱۱]. اندازه‌گیری انرژی کرنشی توسط سنایی و سالتینیک [۱۲] به منظور تخمین پارامترها در سازه‌های الاستیک خطی مورد استفاده قرار گرفته است. یک روش مبتنی بر انرژی کرنشی دخیله شده در المان‌ها به جهت انتخاب مکان بار وارده توسط بختیاری نژاد و همکاران [۱۳] معرفی شده است. یک روش تشخیص آسیب دو مرحله‌ای بر اساس تئوری سیستم خاکستری با استفاده از اندازه‌گیری تغییر مکان استاتیکی تیر طره توسط چن و همکاران [۱۴] ارائه شده است. نتایج نشان داد که آسیب جزئی و متوسط می‌تواند از طریق روش پیشنهادی بر اساس تجزیه و تحلیل رابطه خاکستری مکان‌یابی شود و بهینه‌سازی می‌تواند میزان خسارت را با دقت بالایی تشخیص دهد. یک روش مبتنی بر اندازه‌گیری استاتیکی توسط خادمی و موراسی [۱۵] برای شناسایی ترک تکی در یک تیر از طریق تغییر شکل ناشی از آسیب مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج نشان دهنده هم‌راستا بودن نتایج عددی با تئوری ارائه شده می‌بود. یک مطالعه پارامتری با استفاده از انحنای تغییر مکان استاتیکی برای تشخیص آسیب در سازه تیر توسط عبدو [۱۶] انجام گرفت. نتایج نشان داد که انحنای تغییر مکان می‌تواند به عنوان شاخص کارآمدی به جهت تشخیص آسیب حتی زمانی که مقدار آسیب بسیار کوچک باشد مورد استفاده قرار گیرد. تغییر انرژی کرنشی بر روی داده‌های استاتیکی نوین‌دار برای ارائه یک شاخص

آسیب کارآمد توسط سیدپور و یزدان پناه [۱۷] مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج به دست آمده به روشنی نشان داد که شاخص پیشنهادی دقیقاً می‌تواند المان آسیب دیده را پیدا کند. روش جدید تحت عنوان تغییر مکان ناحیه تغییر شکل یافته مبتنی بر آزمایش انحراف بار استاتیکی بر روی یک تیر توسط اردنبات و همکاران<sup>۴</sup> [۱۸] برای تشخیص آسیب پیشنهاد شد. این روش نیازی به اندازه‌گیری شرایط اولیه نداشت. به منظور ثبت داده‌های شاخص مذکور از تغییر شکل تئوری (مرجع)، مشتقات اول و دوم تغییر شکل استفاده شده است. بیشتر تحقیقاتی قبلی روی یک المان تیر بدون تأثیر بار محوری متمرکز شده است. توانایی داده‌های استاتیکی با توجه به بار محوری توسط یزدان پناه و همکاران [۱۹] برای شناسایی آسیب در سازه‌های تیر-ستون بررسی شد. برای نشان دادن اثرات نیروهای محوری، یک شاخص آسیب شناسی حساس‌تر پیشنهاد شده است. این مقاله با هدف بررسی رفتار سازه تیر-ستون با توجه به بارهای محوری به صورت آزمایشی انجام شده است. برای این منظور، شاخص کارآمد پیشنهادی برای سازه‌های تیر-ستون از طریق داده‌های آزمایشگاهی شامل جابجایی‌ها و مشتقات اول و دوم آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به تئوری پایداری سازه‌ها، در نظر گرفتن اصطلاح شیب در رفتار سازه تیر-ستون و معادله دیفرانسیل حاکم بر آن نقش اساسی دارد. بنابراین، در نظر گرفتن این پارامتر در شاخص آسیب ارائه شده منجر به ارزیابی دقیق‌تر رفتار آن شده است. در این مقاله، تأثیر پارامترهای مؤثر بر کارایی و صحت روش پیشنهادی از طریق داده‌های آزمایشگاهی مورد بررسی قرار گرفته است که انحنای انعطاف‌پذیری و روش‌های انرژی کرنشی به عنوان کاندیداهای تکنیک‌های تشخیص آسیب برای تشخیص آسیب در یک سازه تیر-ستون انتخاب شده‌اند [۲۰-۲۳]. علاوه بر سازه تیر-ستون شاخص جدیدی با تمرکز بر سری‌های زمانی و تاریخچه‌ی پاسخ‌های ارتعاشی به دست آمده از آزمون مودال سازه‌ها توسط مختاری مسینائی و همکاران [۲۵] برای شناسایی محل خسارت‌های ساختگی در دال‌های پیش‌تنیده پرداخته شده است. که نتایج بیانگر کارا بودن شاخص پیشنهادی در شناسایی آسیب در میانه و گوشه‌های دال می‌بود. استفاده از تبدیل کانتورلت برای شناسایی آسیب در دال‌های پیش‌تنیده توسط کاوسی و همکاران [۲۶] از دیگر روش‌های شناسایی آسیب می‌باشد که در این پژوهش روش موجک با کانتورلت مورد مقایسه قرار گرفته است و نتایج بیانگر کارایی روش ارائه شده در شناسایی آسیب می‌باشد. همچنین الگوریتم تشخیص خرابی تیرها که

- 1 Sanayei and Saletnik
- 2 Chen et al
- 3 Abdo

- 4 DAD
- 5 Erdenebat et al



شکل ۱. تیر ستون دو سر ساده دارای ترک مدفون در فاصله  $x_{cr}$  از انتهای چپ

Fig. 1. A simply supported beam-column having a crack located at  $x_{cr}$  from the left end

صورت معادله (۱) بیان کرد.

$$K_{crack}^e = K_u^e - K_{cj} \quad (1)$$

که  $K_u^e$  بیانگر ماتریس سختی تیر-ستون سالم،  $K_{cj}$  میزان کاهش سختی تیر سالم ناشی از ترک  $J$  ام می‌باشد. همچنین بر اساس المان تیر-ستون اوایلر-برنولی ماتریس سختی المان تیر-ستون سالم به صورت ماتریس (۲) بیان می‌شود [۲۳].

$$K_u^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L_e} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & q & \frac{k(1+c)}{L_e} & 0 & -q & \frac{k(1+c)}{L_e} \\ 0 & \frac{k(1+c)}{L_e} & k & 0 & -\frac{k(1+c)}{L_e} & kc \\ -\frac{EA}{L_e} & 0 & 0 & \frac{EA}{L_e} & 0 & 0 \\ 0 & -q & -\frac{k(1+c)}{L_e} & 0 & q & -\frac{k(1+c)}{L_e} \\ 0 & \frac{k(1+c)}{L_e} & kc & 0 & -\frac{k(1+c)}{L_e} & k \end{bmatrix} \quad (2)$$

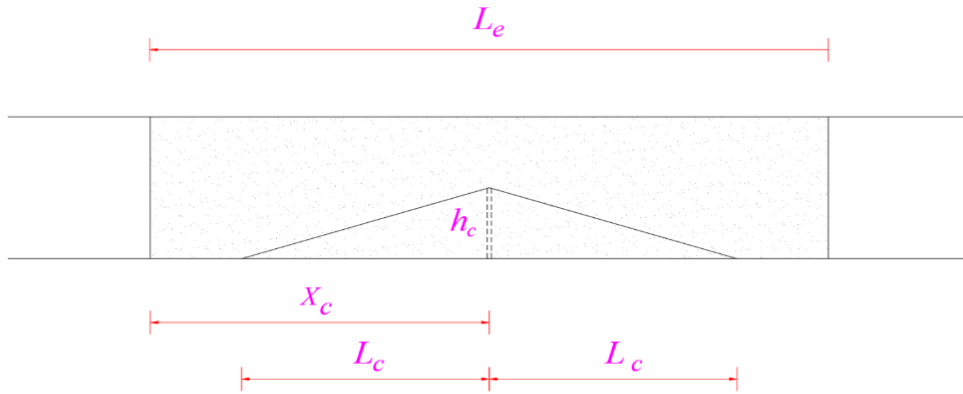
که فاکتورهای ماتریس به صورت رابطه (۳) می‌باشند:

مبتنی بر روش انرژی می‌باشد توسط سیدی و همکاران [۲۷] استفاده شد. که در این روش کرنش تیرهای سالم و آسیب دیده به عنوان پاسخ‌های سازه در الگوریتم قرار گرفتند. جهانگیر و همکاران [۲۸] از روش آنالیز موجک برای آسیب شناسی آسیب در تیرهای بتنی مسلح استفاده کرده‌اند. در این پژوهش شدت آسیب مورد ارزیابی قرار گرفته است و همچنین نتایج نشان داد که ضرایب موجک و شاخص CCDM به صورت قابل توجهی نسبت به محل آسیب حساس می‌باشند.

## ۲- مدل سازی ترک مدفون در تیر-ستون

در شاخص پژوهش فرض می‌شود که ترک عرضی در از سمت چپ تیر-ستون مطابق شکل ۱، اتفاق افتاده است. برای مدل سازی ترک از یک ترک سطحی کاملاً باز که توسط آقای سینها و همکاران شان ارائه شده استفاده شده است [۲۴]. فرض شده است که تاثیر ترک بر جرم تیر ناچیز بوده و ترک صرفاً باعث کاهش سختی موضعی در اطراف محل ترک به میزان طول موثر ترک می‌شود، همچنین کاهش سختی در داخل المان صورت گرفته و از آن خارج نمی‌شود.

با در نظر گرفتن یک ترک مطابق شکل ۲، مدول سختی  $EI$  المان ترک خورده در دو طرف محل ترک به میزان طول موثر ترک  $L_c$  به صورت خطی تغییر می‌کند. در نتیجه ماتریس سختی تیر آسیب دیده را می‌توان به



شکل ۲. تغییرات EI ناشی از ترک در فاصله  $l_e$  از محل ترک [۲۴]

Fig. 2. Variation of EI due to the crack in an element with length  $l_e$

$$K_{c_j} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & -K_{11} & K_{14} \\ & K_{22} & -K_{12} & K_{24} \\ \text{symmetric} & & K_{11} & -K_{14} \\ & & & K_{44} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

که فاکتورهای سختی به صورت رابطه (۵) می‌باشند:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{12E(I_o - I_c)}{l_e^4} \left[ \frac{2l_c^3}{l_e^2} + 3l_c \left( \frac{2x_c}{l_e} - 1 \right)^2 \right], \\ K_{12} &= \frac{12E(I_o - I_c)}{l_e^3} \left[ \frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left( 2 - \frac{7x_c}{l_e} + \frac{6x_c^2}{l_e^2} \right) \right], \\ K_{14} &= \frac{12E(I_o - I_c)}{l_e^3} \left[ \frac{l_c^3}{l_e^2} + l_c \left( 1 - \frac{5x_c}{l_e} + \frac{6x_c^2}{l_e^2} \right) \right], \\ K_{22} &= \frac{2E(I_o - I_c)}{l_e^2} \left[ \frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left( \frac{3x_c}{l_e} - 2 \right)^2 \right], \\ K_{24} &= \frac{2E(I_o - I_c)}{l_e^2} \left[ \frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left( 2 - \frac{9x_c}{l_e} + \frac{9x_c^2}{l_e^2} \right) \right], \\ K_{44} &= \frac{2E(I_o - I_c)}{l_e^2} \left[ \frac{3l_c^3}{l_e^2} + 2l_c \left( \frac{3x_c}{l_e} - 1 \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (۵)$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{EI}{l_e^3} (\mu l)^2 \left[ \frac{\tan(\frac{\mu l}{2})}{\tan(\frac{\mu l}{2}) - (\frac{\mu l}{2})} - 1 \right], \\ \frac{k(1+c)}{L_e} &= \frac{EI}{l_e^2} \frac{(\mu l)^2}{2} \left[ \frac{\tan(\frac{\mu l}{2})}{\tan(\frac{\mu l}{2}) - (\frac{\mu l}{2})} \right], \\ kc &= \frac{EI}{L_e} \frac{(\mu l)}{2} \left[ \frac{(\mu l) \operatorname{cosec}(\mu l) - 1}{\tan(\frac{\mu l}{2}) - (\frac{\mu l}{2})} \right], \\ k &= \frac{EI}{L_e} \frac{(\mu l)}{2} \left[ \frac{1 - (\mu l) \cot g(\mu l)}{\tan(\frac{\mu l}{2}) - (\frac{\mu l}{2})} \right], \\ \mu l &= \pi \sqrt{\frac{P_a}{P_c}}, \quad P_c = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \end{aligned} \quad (۳)$$

با استفاده از تغییرات خطی EI به عنوان مدل پیشنهاد شده توسط آقای

سینها و همکاران [۲۴]، کاهش ماتریس سختی المان تیر-ستون به صورت

ماتریس (۴) قابل محاسبه می‌باشد.



کاهش ماتریس سختی در المان تیر را می‌توان به صورت ماتریس (۶)

برای تیر-ستون گسترش داد:

$$[x_q, u_{h(q)}] = [(x_1, u_{h1}), (x_2, u_{h2}), \dots, (x_i, u_{hi}), \dots, (x_{n+1}, u_{h(n+1)})]$$

حال با داشتن تغییر مکان‌های افقی، شیب تغییر مکان‌های افقی

(مشتق اول  $u' = du/dx$ ) برای تیر سالم با تقریب تفاضل مرکزی

محدود به صورت رابطه (۸) به دست می‌آید:

$$u'_{h(q)} = \frac{u_{h(q+1)} - u_{h(q-1)}}{2l_e} \quad (8)$$

که در این رابطه  $L_e$  فاصله بین دو نقطه اندازه‌گیری شده یا طول المان

و  $Q$  نشانگر تغییر مکان نقاط اندازه‌گیری شده می‌باشد. همچنین انحنای

تغییر مکان افقی (مشتق دوم تغییر مکان افقی  $u''$ ) تیر سالم با استفاده از

تقریب تفاضل مرکزی محدود به صورت رابطه (۹) به دست می‌آید:

$$u''_{h(q)} = \frac{u_{h(q-1)} - 2u_{h(q)} + u_{h(q+1)}}{l_e^2} \quad (9)$$

با توجه به روابط (۸ و ۹)، شیب و انحنای تغییر مکان افقی تیر-ستون

آسیب دیده به صورت روابط (۱۰ و ۱۱) قابل محاسبه می‌باشد:

$$u'_{d(q)} = \frac{u_{d(q+1)} - u_{d(q-1)}}{2l_e} \quad (10)$$

$$u''_{d(q)} = \frac{u_{d(q-1)} - 2u_{d(q)} + u_{d(q+1)}}{l_e^2} \quad (11)$$

در نهایت با استفاده از پاسخ‌های استاتیکی (تغییر مکان، شیب و انحنای

تغییر مکان) که برای دو حالت سالم و آسیب دیده به دست آمده است،

شاخص مبتنی بر پاسخ‌های استاتیکی به صورت رابطه (۱۲) به دست می‌آید:

$$BI_q = \left[ \left[ u''_{d(q)} - u''_{h(q)} \right] \times \left( u_{d(q)} \right)^2 \right] - \left[ \left( u'_{d(q)} - u'_{h(q)} \right) \times u_{h(q)} \right] \quad (12)$$

با فرض اینکه  $SRBI_{hd}$  تمامی نقاط نشان دهنده

$SRBI_q$ ،  $q = 1, 2, \dots, n+1$  یک جمعیت نمونه از متغیر توزیع

$$K_{ij} = \begin{bmatrix} K_0 & 0 & 0 & -K_0 & 0 & 0 \\ & K_{11} & K_{12} & 0 & -K_{11} & K_{14} \\ & & K_{22} & 0 & -K_{12} & K_{24} \\ & & & K_0 & 0 & 0 \\ & \text{symmetric} & & & K_{11} & -K_{14} \\ & & & & & K_{44} \end{bmatrix} \quad (6)$$

که فاکتور  $K_a$  از رابطه (۷) به دست می‌آید:

$$K_a = \frac{E(A_0 - A_c)}{L_e} \quad (7)$$

در رابطه فوق  $x_c$  محل ترک در مختصات محلی می‌باشد.  $l_e$  طول

المان،  $l_c$  طول موثر کاهش سختی، که برابر ارتفاع مقطع تیر-ستون

می‌باشد. همچنین  $E$  مدول یانگ،  $I_0 = \frac{1}{12} wh^3$  ممان اینرسی تیر

سالم،  $I_c = \frac{1}{12} w(h-h_c)^3$  ممان اینرسی تیر-ستون ترک خورده،

به ترتیب پهنا و عمق تیر-ستون سالم و عمق ترک می‌باشد. برای مواردی که

المان ترک خورده بیش از یک مورد می‌باشد (ترک چندگانه) ماتریس سختی

کل از سرهم کردن ماتریس سختی المان‌های ترک خورده به دست می‌آید.

### ۳- شاخص ارائه شده به جهت تشخیص خرابی در نمونه‌های

#### آزمایشگاهی

در این شاخص یک تیر-ستون منشوری با طول مشخص به جهت

شناسایی ترک مدفون مورد مطالعه قرار گرفته است. در مرحله اول تیر-

ستون به صورت اختیاری به تعدادی المان‌های محدود تقسیم‌بندی شده،

سپس تغییر مکان افقی تیر-ستون سالم در نقاط گرهی توسط یک روش

المان محدودی به دست آمده است و برای این منظور یک کد متلب [۲۹]

تهیه شده است.

از این رو با در نظر گرفتن مختصات گرهی ( $x_q, q = 1, 2, \dots$ )

(و تغییر مکان  $u_{h(q)}, q = 1, 2, \dots, n+1$ ) برای تیر-ستون

سالم به صورت زیر به دست می‌آید:

#### ۴-۲- نحوه ثبت داده‌های آزمایشگاهی

پس از انتخاب المان بندی و اعمال ترک‌های اختیاری به کمک دستگاه ابزار دقیق در مرحله بعدی تیر-ستون‌ها به صورت محوری با استفاده از جک هیدرولیکی و سنسور لود سل<sup>۲</sup> تحت بارگذاری‌های مشخص قرار گرفتند و همزمان به کمک سنسورهای ثبت تغییر مکان، تغییر مکان‌های محوری تیر-ستون‌ها در نقاط گرهی (نقاط ابتدا و انتهای المان‌ها) از طریق دیتالاگر و سیستم کامپیوتری ثبت شدند.

#### ۴-۳- نحوه قرارگیری نتایج ثبت شده در معادلات

در نهایت شیب و انحنای نتایج آزمایشگاهی ثبت شده به صورت تغییر مکان نقاط گرهی به کمک کد متلب<sup>۳</sup> محاسبه شده و در معادلات شاخص قرار گرفتند، و شاخص nSRBI متناظر با آن‌ها محاسبه شد.

#### ۵- مثال‌های عددی و آزمایشگاهی

به منظور ارزیابی بهره‌وری شاخص ارائه شده برای ترک‌های مدفون تحت بار محوری یک مثال شامل یک تیر-ستون دو سر ساده با سناریوهای خرابی متفاوت در نظر گرفته شده است (در جدول شماره ۱ لیست شده است)، پارامترهای مختلفی می‌تواند در عملکرد شاخص ارائه شده به صورت آزمایشگاهی تاثیرگذار باشد.

#### ۵-۱- یک تیر-ستون دو سر ساده تحت بار محوری

یک تیر-ستون دو سر ساده با دهانه  $L=0.62(m)$  مطابق شکل‌های ۳-۶ با محل آسیب متفاوت به عنوان مثال در نظر گرفته شده است. ابعاد مقطع عرضی تیر-ستون‌ها مطابق شکل‌های ۵ و ۳ و ۶ و ۴ به ترتیب  $0.04 \times 0.01(m)$  و  $0.02 \times 0.03(m)$  می‌باشد. همچنین شکل‌های ۵ و ۶ برای ترک‌های چندگانه در نظر گرفته شده و مدول الاستیسیته  $E=2.1 \times 10^{11}(N/m^2)$  می‌باشد. مطابق جدول شماره ۱ به منظور ارزیابی روش ارائه شده چهار مورد آسیب شامل هشت سناریو خرابی در نظر گرفته شده است.

در دو سناریو اول (مورد اول) تاثیر بار محوری بر شاخص تشخیص خرابی مدفون در المان آسیب دیده سوم با استفاده از روش‌های تئوری و آزمایشگاهی مورد ارزیابی قرار گرفته است. در مورد دو سناریو بعدی (مورد دوم) آسیب در المان دوم با در نظر گرفتن بارهای محوری مختلف مورد

نرمال باشد. یک نرمال سازی از SRBI می‌تواند به صورت رابطه (۱۳) تعریف شود:

$$nSRBI_q = \max \left[ 0, \left( \frac{SRBI_q - \text{mean}(SRBI)}{\text{std}(SRBI)} \right) \right] \quad (13)$$

$$q = 1, 2, \dots, n + 1$$

که در رابطه (۱۳)  $SRBI_{hd,q}$  از رابطه (۱۲) به دست می‌آید، همچنین  $\text{mean}(SRBI_{hd,q})$  و  $\text{std}(SRBI_{hd,q})$  نشان دهنده میانگین و انحراف استاندارد ( $SRBI_q, q = 1, 2, \dots, n + 1$ ) می‌باشد.

نتایج به دست آمده برای شاخص ارائه شده در معادله (۱۳)، به وسیله نتایج آزمایشگاهی و تئوری مورد آزمایش و بررسی قرار گرفته است.

#### ۴- جزئیات آزمایشگاهی پژوهش

نحوه انجام پژوهش آزمایشگاهی کار در سه گام به شرح زیر صورت گرفته است.

#### ۴-۱- نحوه انتخاب تعداد المان‌ها و اعمال آسیب‌های عمدی در سازه تیر-ستون

انتخاب تعداد المان‌ها در تیر-ستون‌های آزمایشگاهی اختیاری بود. اما طبق قاعده المان محدود این نکته قابل توجه است که هر چه تعداد المان گره‌ها بیشتر باشد مکان آسیب دقیق تر مشخص خواهد شد اما از طرفی هم تعداد المان بندی طبق قاعده آقای سینها باید حداکثر به قدری باشد که اندازه المان از دو برابر طول موثر ترک یا همان سه برابر ارتفاع مقطع تیر کوچک تر نباشد یا به عبارتی طبق قاعده آقای سینها المان بندی به هر تعداد می‌تواند انتخاب شود به شرطی که اندازه المان از دو برابر طول موثر ترک کوچک تر نباشد، زیرا در غیر این صورت طول موثر ترک وارد المان مجاور خواهد شد و مرز بندی المان‌ها از بین خواهد رفت. پس از انتخاب تعداد المان‌ها، آسیب‌های موردی به صورت اختیاری در المان‌ها به کمک ابزار دقیق سی ان سی<sup>۱</sup> ایجاد شد و در مراحل بعدی به جهت صحت سنجی شاخص انتخابی به کار برده شد.

2 loadcell

3 MATLAB (R2017a)

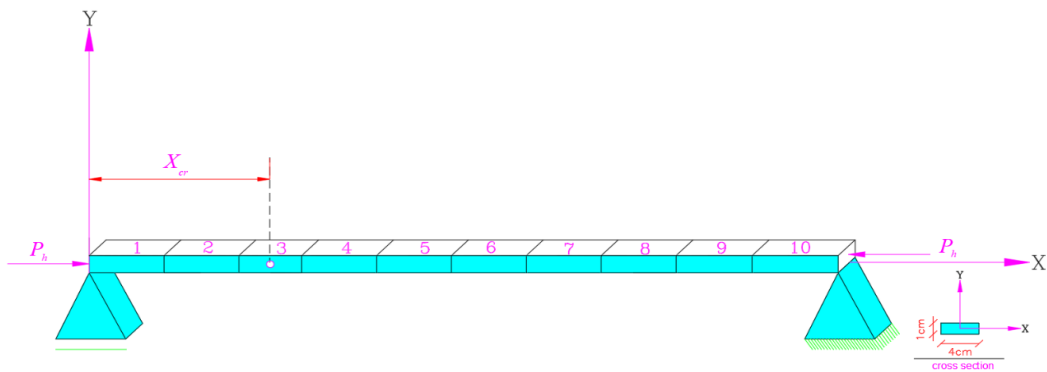
1 CNC

جدول ۱. هشت مورد از سناریوهای آسیب مدفون در تیر-ستون دو سر ساده

Table 1. Eight embedded damage scenarios induced in simply supported beam - column

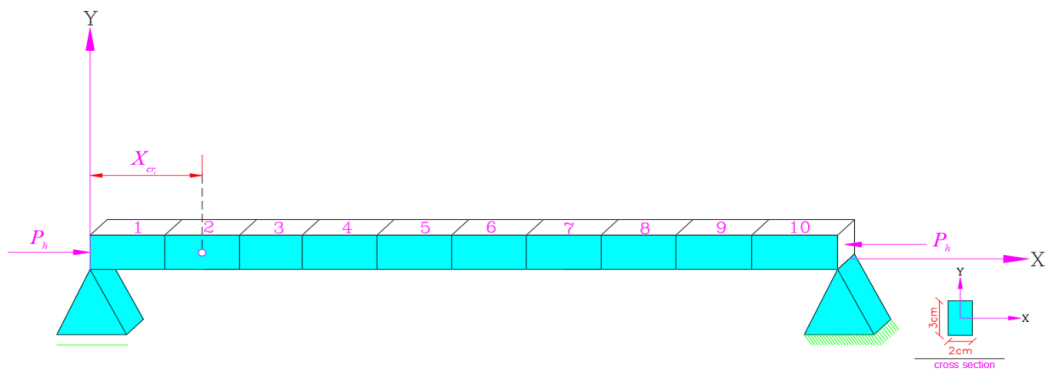
مورد	سناریو	شماره المان	% درصد آسیب	$P_h$ (kg) (محوری)
1	1	3	10	700
	2	3	10	1000
2	1	2	20	1000
	2	2	20	1500
3	1	8&3	15&10	600
	2	8&3	15&10	900
4	1	2&9	20&20	1300
	2	2&9	20&20	2200

• درصد آسیب  $100 \cdot (Ac/A)$  می باشد که  $Ac$  سطح آسیب می باشد.



شکل ۳. شکل و هندسه تیر-ستون دو سر ساده و مقطع عرضی آن: مورد ۱

Fig. 3. Shape and geometry of simply supported beam-column and cross section: case 1

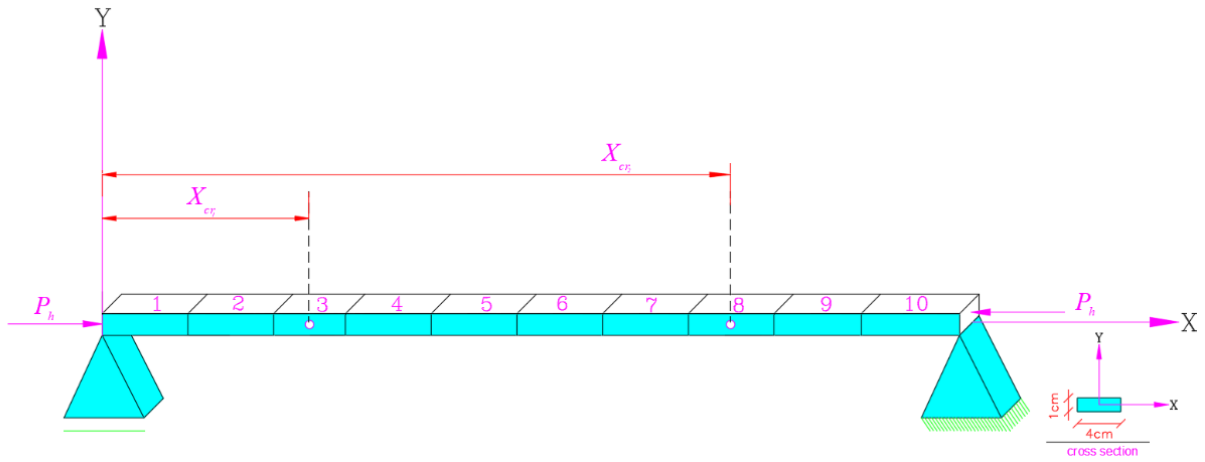


شکل ۴. شکل و هندسه تیر-ستون دو سر ساده و مقطع عرضی آن: مورد ۲

Fig. 4. Shape and geometry of simply supported beam-column and cross section: case 2

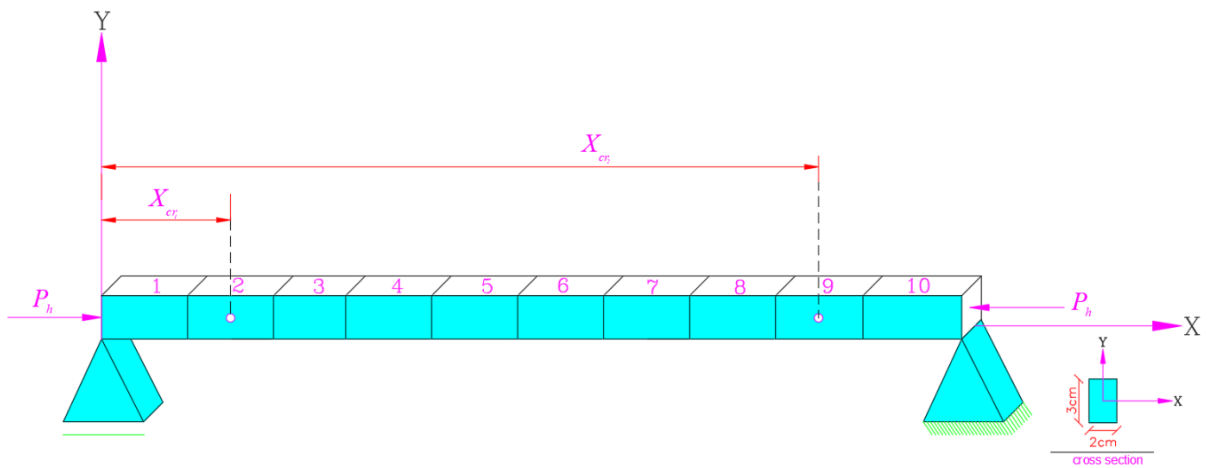
ویرا، پلت فرم، لودسل یا سنسور سنجش میزان بار محوری و همچنین ترک‌های مدفون می باشد. دیاگرام‌های تشخیص ترک مدفون تیر-ستون برای موارد (۱-۴) که در جدول ۱ لیست شده است در شکل‌های (۸-۱۱) به ترتیب به تصویر کشیده شده است.

آزمایش قرار گرفته است. علاوه بر موارد فوق موارد سوم و چهارم برای ترک‌های چندگانه در نظر گرفته شده است. همچنین شکل ۷ نشانگر مجموعه تجهیزات آزمایشگاهی شامل دستگاه مدل سازی شده قبل از ساخت، نحوه سرهم کردن، ال وی دی تی (سنسور تغییر مکان سنج)، دیتالاگر، نرم افزار



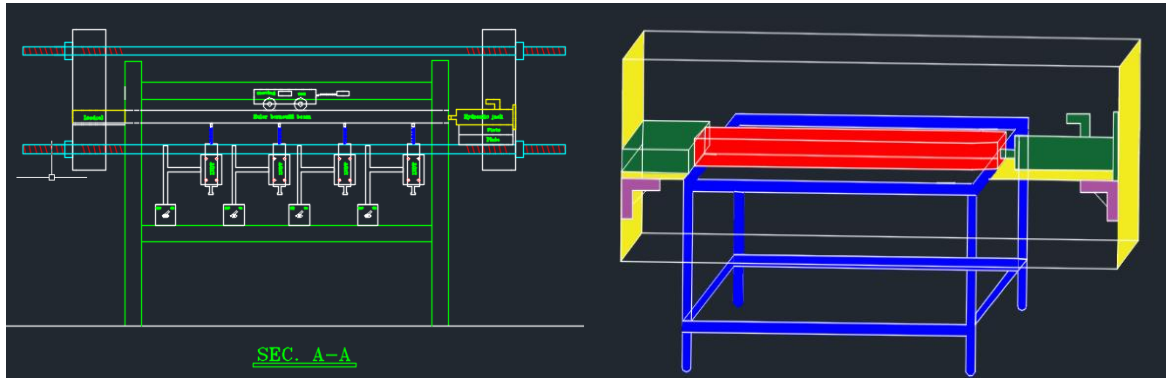
شکل ۵. شکل و هندسه تیر-ستون دو سر ساده و مقطع عرضی آن: مورد ۳

Fig. 5. Shape and geometry of simply supported beam-column and cross section: case 3



شکل ۶. شکل و هندسه تیر-ستون دو سر ساده و مقطع عرضی آن: مورد ۴

Fig. 6. Shape and geometry of simply supported beam-column and cross section: case 4



(b)

(a)



(e)



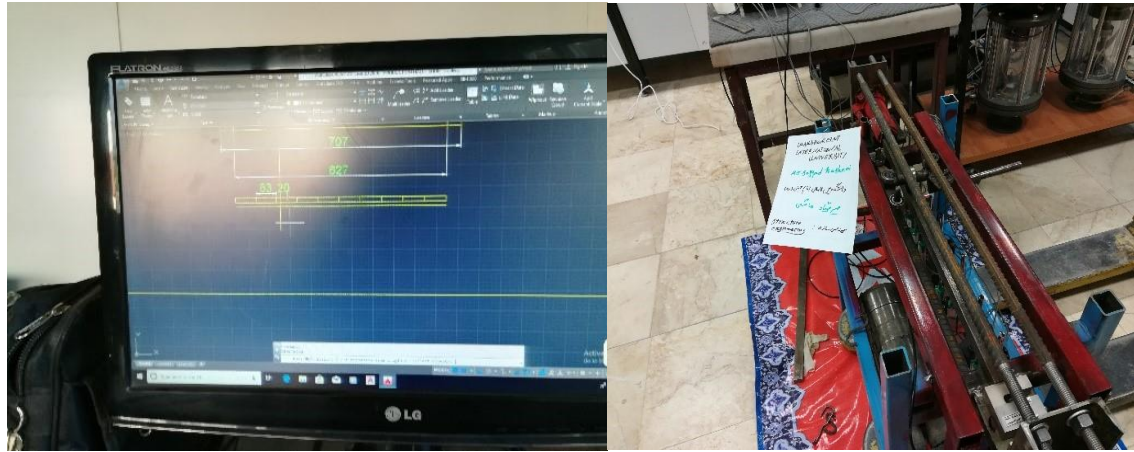
(b)



(c)

شکل ۷. مراحل آزمایشگاهی تیر-ستون دو سر ساده

Fig. 7. Laboratory steps of simply supported beam-column



(b)

(a)



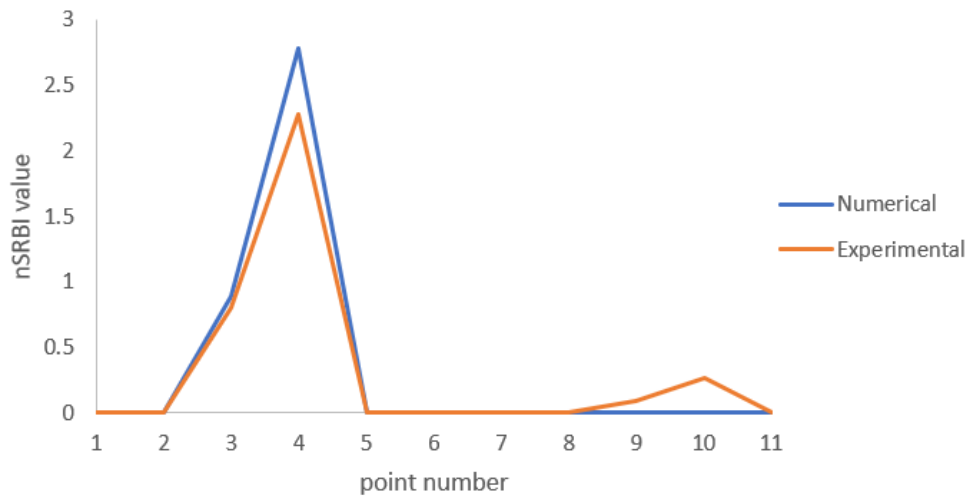
(e)

(d)

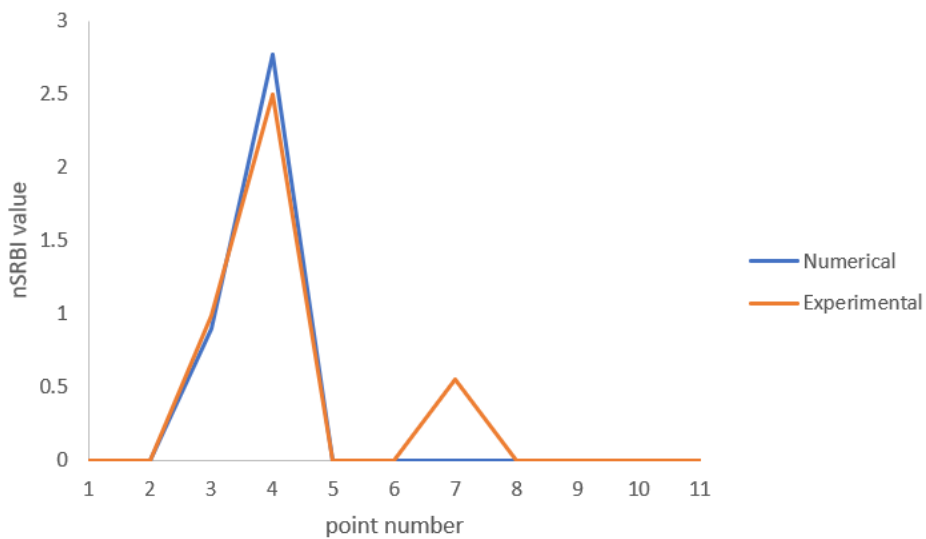
(c)

شکل ۷. مراحل آزمایشگاهی تیر-ستون دو سر ساده

Fig. 7. Laboratory steps of simply supported beam-column



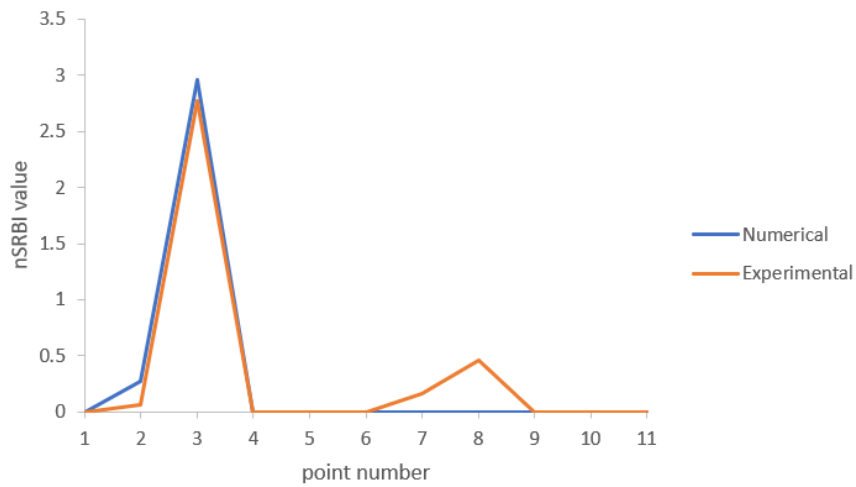
(a) - مورد اول - سناریو ۱



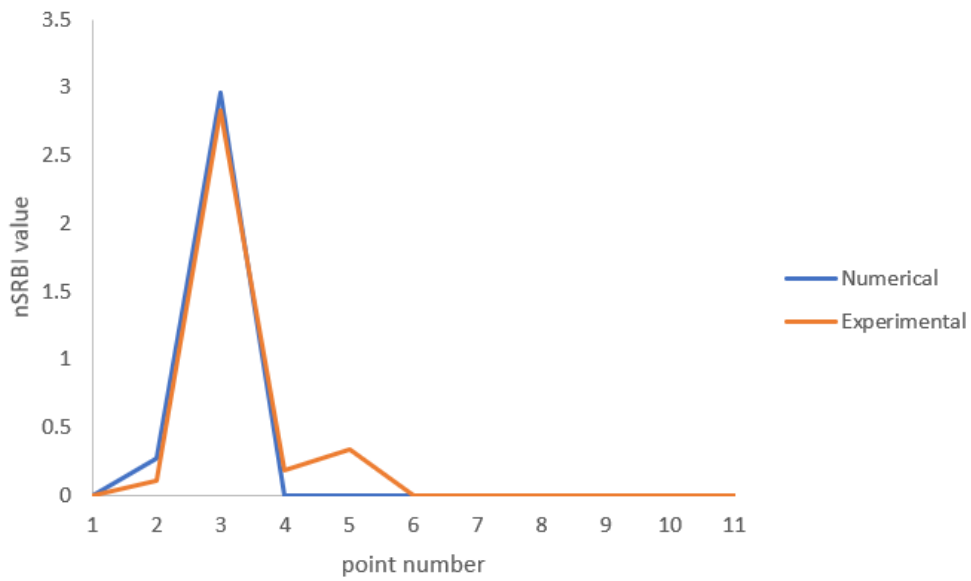
(b) - مورد اول - سناریو ۲

شکل ۸. دیاگرام‌ها تشخیص خرابی برای تیر-ستون دو سر ساده برای مورد اول با بارهای محوری متفاوت

Fig. 8. Damage identification diagram of simply supported beam-column for first case with different axial loads / (a) Case 1 - Scenario 1 (b) Case 1 - Scenario 2



(c) - مورد دوم- سناریو ۱

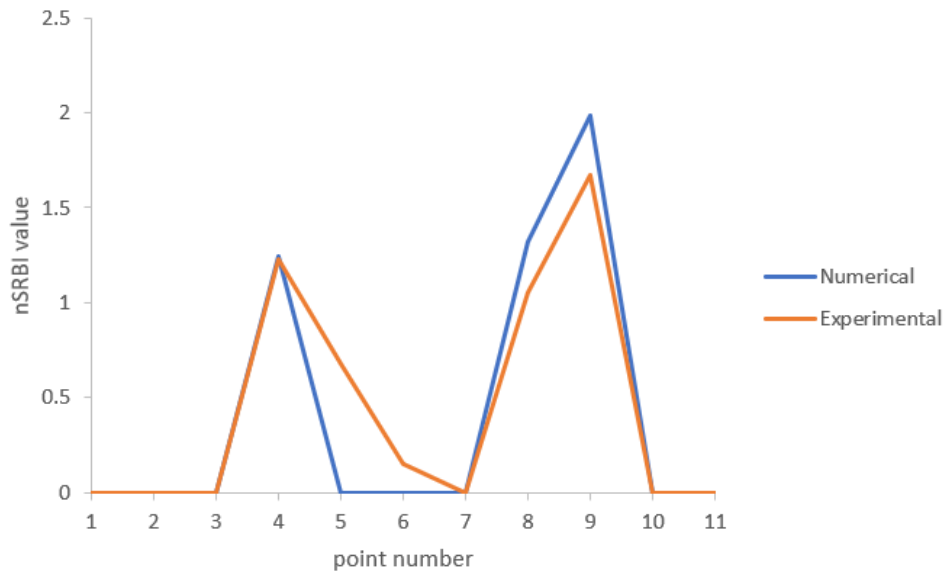


(d) - مورد دوم- سناریو ۲

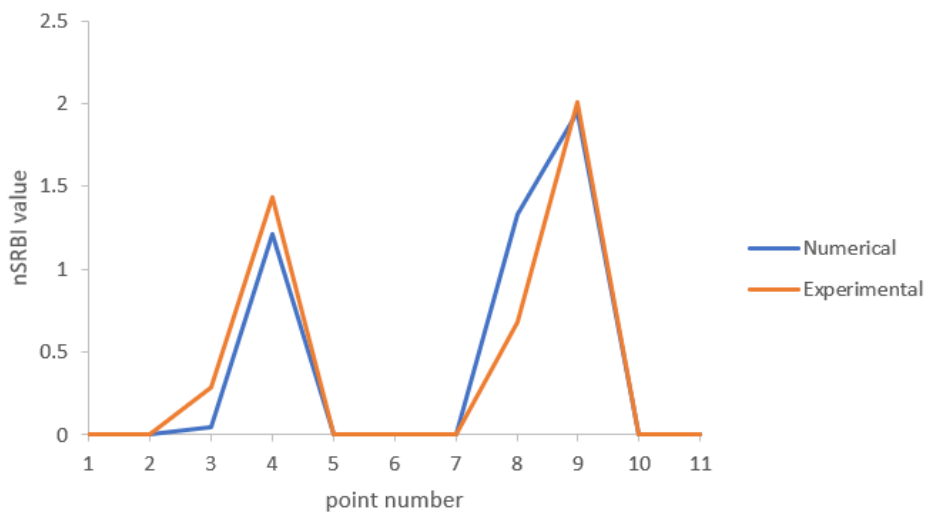
شکل ۹. دیاگرام‌ها تشخیص خرابی برای تیر-ستون دو سر ساده برای مورد دوم با بارهای محوری متفاوت

Fig. 9. Damage identification diagram of simply supported beam-column for second case with different axial loads / (c) Case 2 - Scenario 1 (d) Case 2 - Scenario 2





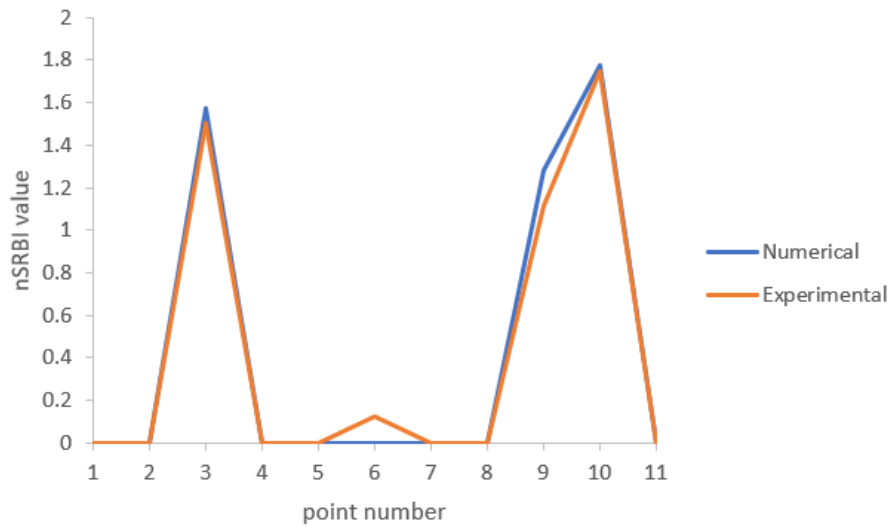
(e) - مورد سوم - سناریو ۱



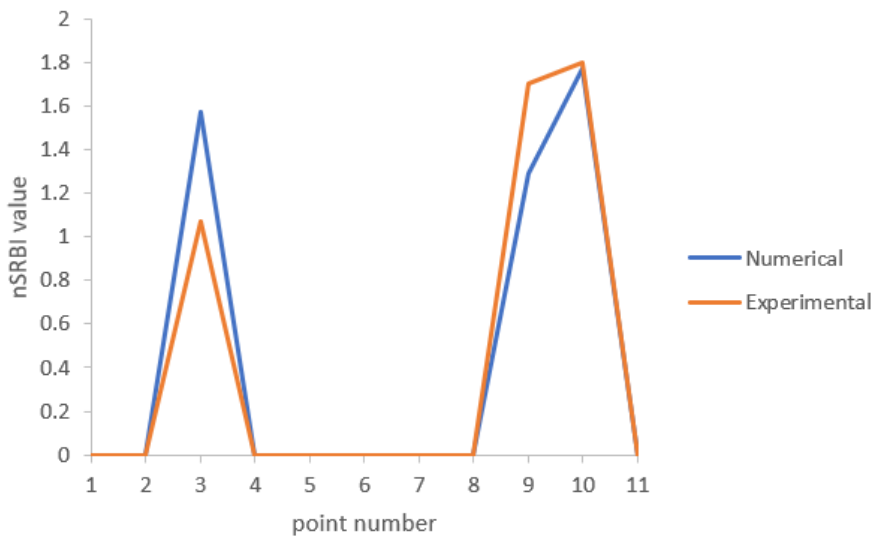
(f) - مورد سوم - سناریو ۲

شکل ۱۰. دیاگرام‌ها تشخیص خرابی برای تیر-ستون دو سر ساده برای مورد سوم با بارهای محوری متفاوت

Fig. 10. Damage identification diagram of simply supported beam-column for the third case with different axial loads / (e) Case 3 - Scenario 1 (f) Case 3 - Scenario 2



(g) - مورد چهارم - سناریو ۱



(h) - مورد چهارم - سناریو ۲

شکل ۱۱. دیاگرام تشخیص خرابی برای تیر-ستون دو سر ساده برای مورد چهارم با بارهای محوری متفاوت

Fig. 11. Damage identification diagram of simply supported beam-column for the fourth case with different axial loads / (g) Case 4 - Scenario 1 (h) Case 4 - Scenario 2

structures, 25(1) (2003) 57-67.

- [5] B. Koh, S. Dyke, Structural health monitoring for flexible bridge structures using correlation and sensitivity of modal data, *Computers & structures*, 85(3-4) (2007) 117-130.
- [6] A. Messina, I.A. Jones, E.J. Williams, Damage detection and localization using natural frequency changes, *Proceedings of the Conference on Identification in Engineering System*, Cambridge, UK, 1 (1992) 67-76.
- [7] A. Messina, E. Williams, T. Contursi, Structural damage detection by a sensitivity and statistical-based method, *Journal of sound and vibration*, 216(5) (1998) 791-808.
- [8] J.-M. Ndambi, J. Vantomme, K. Harri, Damage assessment in reinforced concrete beams using eigenfrequencies and mode shape derivatives, *Engineering Structures*, 24(4) (2002) 501-515.
- [9] O. Salawu, Detection of structural damage through changes in frequency: a review, *Engineering structures*, 19(9) (1997) 718-723.
- [10] O. Yazdanpanah1a, S. Seyedpoor, A new damage detection indicator for beams based on mode shape data, *Structural Engineering and Mechanics*, 53(4) (2015) 725-744.
- [11] O. Yazdanpanah, R.A. Izadifard, M. Abdi Moghadam, Embedded Crack Identification in Beam-Column Structures under Axial Load Using an Efficient Static Data Based Indicator, *Journal of Rehabilitation in Civil Engineering*, 4(2) (2016) 67-78.
- [12] M. Sanayei, M.J. Saletnik, Parameter estimation of structures from static strain measurements. II: Error sensitivity analysis, *Journal of structural Engineering*, 122(5) (1996) 563-572.
- [13] F. Bakhtiari-Nejad, A. Rahai, A. Esfandiari, A structural damage detection method using static noisy data, *Engineering structures*, 27(12) (2005) 1784-1793.
- [14] X.-z. Chen, Z. Hong-Ping, C. Chuan-yao, Structural damage identification using test static data based on grey system theory, *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*, 6(8) (2005) 790-796.

## ۶- نتیجه گیری

در این مقاله تاثیر بار محوری بر شاخص تشخیص خرابی‌های مدفون با استفاده از نتایج آزمایشگاهی و مقایسه آن با نتایج تئوری برای المان‌های مشابه مورد مطالعه قرار گرفت و شاخص تشخیص خرابی برای آنالیز مدال برای داده‌های استاتیکی گسترش داده شد.

به منظور تست و ارزیابی شاخص تشخیص خرابی‌های مدفون سناریوهای خرابی با بارگذارهای متفاوت مورد ارزیابی قرارگرفت. بر اساس نتایج آزمایشگاهی و تئوری، مقدار nSRBI در نزدیکی برخی از المان‌ها که ترک مدفون در داخل آن‌ها رخ داده است بیشتر می‌باشد. در نتیجه شاخص nSRBI در برابر کاهش سختی حساس بوده و نتایج نشان داد که این شاخص قادر به شناسایی درست محل آسیب تکی و چندگانه می‌باشد. همچنین تفاوت جزئی در نتایج دیاگرام‌های آزمایشگاهی نسبت به تئوری بیانگر نویزها و نوسانات در محل‌هایی غیر از آسیب‌ها می‌باشد. که با توجه به کوچک بودن آسیب‌های ساختگی که توسط ابزار دقیق در تیر-ستون‌های آزمایشگاهی ایجاد شده است و همچنین ریز بودن المان‌های تقسیم‌بندی شده و تفاوت چشم‌گیر موج دیاگرام‌ها در محل آسیب‌ها ساختگی نسبت به نویزها و خطاهای آزمایشگاهی که باعث نوسانات جزئی شده است. در ادامه نتایج با دقت قابل قبول بیانگر کارایی شاخص نسبت به شناسایی آسیب‌های بسیار کوچک می‌باشد و می‌توان از نویزها چشم‌پوشی کرد.

## منابع

- [1] M.-B. Abdo, M. Hori, A numerical study of structural damage detection using changes in the rotation of mode shapes, *Journal of Sound and vibration*, 251(2) (2002) 227-239.
- [2] I. Talebinejad, C. Fischer, F. Ansari, Numerical evaluation of vibration-based methods for damage assessment of cable-stayed bridges, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 26(3) (2011) 239-251.
- [3] Y. Ho, D. Ewins, On the structural damage identification with mode shapes, in: *Proceedings of the European COST F3 conference on system identification and structural health monitoring*, 2000.
- [4] J.-T. Kim, Y.-S. Ryu, H.-M. Cho, N. Stubbs, Damage identification in beam-type structures: frequency-based method vs mode-shape-based method, *Engineering*

- quantification using static test data, Structural health monitoring, 10(4) (2011) 381-389.
- [23] S. Seyedpoor, O. Yazdanpanah, Structural damage detection by differential evolution as a global optimization algorithm, Iranian Journal of Structural Engineering, 1(1) (2015) 52-62.
- [24] J.K. Sinha, M. Friswell, S. Edwards, Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data, Journal of Sound and vibration, 251(1) (2002) 13-38.
- [25] M. Mokhtari Masinaei, H. Jahangir, M. Khatibinia, Damage Detection in Prestressed Concrete Slabs Using Vibrational Responses in Time Domain (In Persian), 5th National Conference on Recent Advances in Civil Engineering, Architecture and Urban Development, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran., (2019).
- [26] M. Kavousi, M. Khatibinia, H. Jahangir, Use of Contourlet Transform to Identify Damages in Prestressed Concrete Slabs (In Persian), International Conference on Civil Engineering, Architecture & Urban Management In Iran, Tehran, Iran., (2018).
- [27] S.R. SEYEDI, A. KEYHANI, H. JAHANGIR, AN ENERGY-BASED DAMAGE DETECTION ALGORITHM BASED ON MODAL DATA.
- [28] H. Jahangir, M.R. Esfahani, Structural Damage Identification Based on Modal Data and Wavelet Analysis, in: 3rd National Conference on Earthquake & Structure, 2012.
- [29] MATLAB (R2010b), the language of technical computing (software), Math Works Inc.
- [15] S. Caddemi, A. Morassi, Crack detection in elastic beams by static measurements, International Journal of Solids and Structures, 44(16) (2007) 5301-5315.
- [16] M.A.-B. Abdo, Parametric study of using only static response in structural damage detection, Engineering Structures, 34 (2012) 124-131.
- [17] S. Seyedpoor, O. Yazdanpanah, An efficient indicator for structural damage localization using the change of strain energy based on static noisy data, Applied Mathematical Modelling, 38(9-10) (2014) 2661-2672.
- [18] D. Erdenebat, D. Waldmann, F.N. Teferle, Static load deflection experiment on a beam for damage detection using the Deformation Area Difference Method, in: Life Cycle Analysis and Assessment in Civil Engineering: Towards an Integrated Vision: Proceedings of the Sixth International Symposium on Life-Cycle Civil Engineering (IALCCE 2018), 28-31 October 2018, Ghent, Belgium, CRC Press, 2018, pp. 177.
- [19] O. Yazdanpanah, R.A. Izadifard, M. Dehestani, Static data based damage localization of beam-column structures considering axial load, Mechanics of Advanced Materials and Structures, (2019) 1-18.
- [20] A. Pandey, M. Biswas, Damage detection in structures using changes in flexibility, Journal of sound and vibration, 169(1) (1994) 3-17.
- [21] E.-T. Lee, H.-C. Eun, Damage detection approach based on the second derivative of flexibility estimated from incomplete mode shape data, Applied Mathematical Modelling, 44 (2017) 602-613.
- [22] Q. Yang, B. Sun, Structural damage localization and

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M.S. Hashemi, R.A. Izadifard, Experimental static data based Embedded Crack Identification of beam-column structures under axial load, Amirkabir J. Civil Eng., 53(12) (2022) 5139-5154.

DOI: 10.22060/ceej.2021.18662.6935

