Amirkabir Journal of Civil Engineering

Amirkabir J. Civil Eng., 53(2) (2021) 163-166
DOI: 10.22060/ceej.2020.16566.6277

Evaluation of Shadow Stress between Hydraulic Fractures

Ali Asgari[1,*], Aliakbar Golshani[2]

[1] Department of Civil Engineering, Faculty of Engineering and Technology, University of Mazandaran, Babolsar, Iran.
[2] Department of Civil and Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

ABSTRACT: In order to increase the productivity of extraction of hydrocarbons reservoirs, the well is usually drilled in the direction of the minimum horizontal in situ stress, and hydraulic fractures simultaneously initiate and propagate perpendicular/transverse to the wellbore. In the last decade, more than 10,000 horizontal wells per year have been bored and hydraulically fractured, with up to a hundred hydraulic fractures placed in the horizontal segment of the well. In order to reduce operational cost, it is usual to create several hydraulic fractures at once. The well is there for stimulated in stages, with one stage consisting of a single pumping operation aimed at initiating and propagating simultaneously typically between 3-8 cracks spaced about 10–30 m apart. When the fluid pressure is applied on the surface of the fracture, the crack can propagate in the medium, but the pressure, induced from the fluid injection, may have a negative influence on the extension of adjacent cracks which is stated as shadow or interaction stress. Certainly, an accurate estimation of interaction/shadow stress between the cracks leads to a more optimal design. In this research, the effect of the interaction between the hydraulic cracks with respect to the spacing and the number of cracks on each other and considering the position of the fractures are evaluated using the pseudo traction method. The results are shown that inner-fractures are further affected by shadow stress compared to outer-fractures. On the other hand as the distance of hydraulic fractures increases, shadow stresses decrease. In the last, the results can be useful in determining the optimum number and spacing of cracks in the design of hydraulic fractures.

Review History:

Received: 6/19/2019
Revised: 7/27/2019
Accepted: 8/24/2019
Available Online: 8/22/2020

Keywords:

Multiple hydraulic fractures
Shadow stress
Simultaneous propagation
Pseudo traction technique
Analytical method

1. INTRODUCTION

In the last decade, extensive research has been done on the propagation of single hydraulic fracture, either numerically or analytically, but most recent research has focused on the simultaneous growth of an array of parallel or multiple oriented hydraulic fractures considering interaction and shadow stress between the fractures along a horizontal wellbore [1-2]. In the case of horizontal wells, a detailed investigation of the interaction between hydraulic fractures and stress interference between propagating hydraulic fractures is still required. In this research, the effects of interactions between hydraulic cracks are investigated using this method. Innovation in this study is related to the application of the pseudo-traction method[3] with a fluid presence which is very useful in estimating the interaction stress between cracks. Also, the effect of interaction on multiple hydraulic cracks with respect to their location and number has been analytically investigated in this study.

2. INTERACTING MODEL FOR TWO HYDRAULIC FRACTURES

In order to evaluate the elastic interaction among neighboring hydraulic fractures, we apply the so-called pseudo-traction method developed by Horii and Nemat-Nasser[3].

For simplicity, we first consider an elastic body with two KGD hydraulic fractures i and j with lengths $2\ell_i$ and $2\ell_j$, both of which are subjected to far-field stresses i.e. normal stresses (σ_{11}^{∞}, σ_{22}^{∞}) and shear stress (σ_{12}^{∞}) as shown in Fig. 1. Two coordinate system $x_i y_i$ and $x_j y_j$ are employed that their origins are located at the center of the hydraulic fractures i and j, respectively. Note that the y_i and y_j are taken to be normal to the hydraulic fracture surfaces. The symbols in Fig. 1 are defined as:

θ_{ji}: The inclination angle of x_i to x_j,

ϕ_{ji}: The angle between x_i and center of cracks direction

and, d_{ij}: The distance between origins of hydraulic fracture.

The original problem is elastically examined by decomposing it into three sub-problems; i.e., a homogeneous sub-problem and two sub-problems i and j. In the homogeneous problem there is no crack and the same stresses as the original problem are applied at infinity (i.e. normal stresses σ_{11}^{∞}, σ_{22}^{∞} and shear stress σ_{12}^{∞}), while in each sub-problem i and j, the single hydraulic fracture which is subjected to uniform pressure p_{fi} and p_{fj} respectively, is

*Corresponding author's email: a.asgari@umz.ac.ir

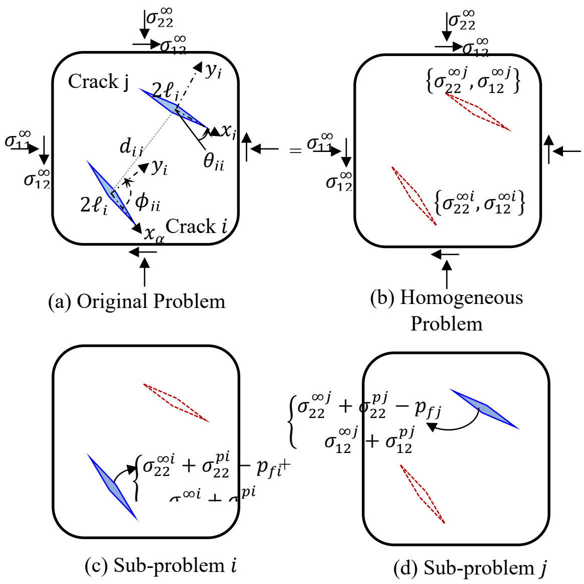


Fig. 1. Process of decomposition of (a) original evolution problem to (b) homogeneous problem and (c,d) sub-problems i and j

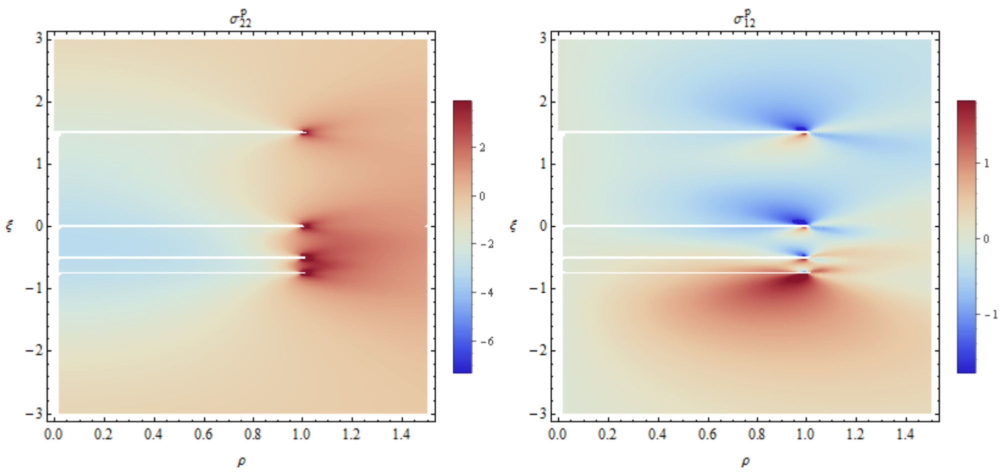


Fig. 2. Distribution of vertical and horizontal stresses vicinity of half-length parallel cracks (drawn using Mathematica version 9.0.0)

contained without far-field stresses, as shown in Fig. 1.

In the sub-problem j , the stress functions with respect to the local coordinate $z_j = x_j + Iy_j$ are given by:

$$\Phi'_j(z_j) = -\frac{1}{2\pi I\sqrt{z_j^2-\ell_j^2}}\int_{-\ell_j}^{\ell_j}\frac{T\sqrt{s^2-\ell_j^2}}{s-z_j}ds,$$
$$\Psi'_j(z_j) = \overline{\Phi'_j(\overline{z_j})} - \Phi'_j(z_j) - z_j\Phi''_j(z_j),$$
$$z_j = x_j + Iy_j \quad j=1,2 \tag{1}$$
$$z_j = d_{ij}e^{I\phi_{ij}} + x_i e^{I\theta_{ij}}, \quad |x_i| \le \ell_j$$
$$T = \left\{\left(\sigma_{22}^{\infty j}+\sigma_{22}^{pj}\right) - I\left(\sigma_{12}^{\infty j}+\sigma_{12}^{pj}\right) - p_{fj}\right\}$$
$$T = T_R + IT_I, \quad T_R = \mathrm{Re}\{T\},\ T_I = \mathrm{Im}\{T\}$$

Where the quantities $\sigma_{22}^{\infty j}$ and $\sigma_{12}^{\infty j}$ are local stresses in j , induced to far-field stresses and σ_{11}^{pj} and σ_{22}^{pj} are “pseudo tractions”, which are unknown functions to be determined (for more information please refer to persian paper).

Fig. 2 shows the 2D distribution of stresses in the various directions by considering the effect of the interaction of parallel hydraulic cracks from the exact method. As can be seen, the effect of the shadow stress increases as the distance between the cracks decreases, and this effect emphasis as the cracks approach each other.

3. SPECIAL CASE: EVALUATIONS FOR INTERACTING PARALLEL HYDRAULIC FRACTURES

In the special case, if the hydraulic fractures are assumed to be parallel to each other we have:

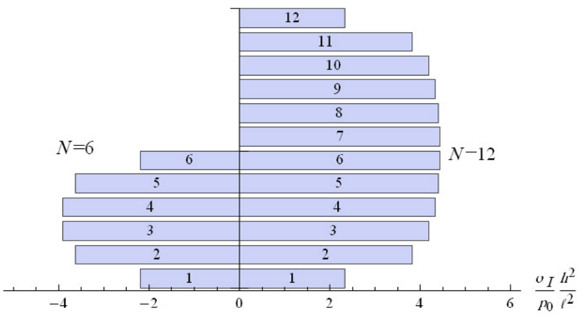


Fig. 3. The shadow stress ratio according to the location of the cracks for the six- and twelve-array cracks

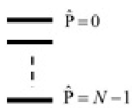
$$\frac{\sigma_I}{p_0}=\left\{1-\frac{\xi^3}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}= \qquad (2)$$
$$\frac{3}{2\xi^2}-\frac{15}{8\xi^4}+\frac{35}{16\xi^6}-\frac{315}{128\xi^8}+O\left(\xi^{-10}\right), \qquad \xi=\frac{d}{\ell}\gg 1$$

Where σ_I is shadow stress between two parallel cracks and p_0 is the internal pressure can be readily obtained by following equation [4]:

$$p_0=\frac{1}{2\pi}\frac{E'Q_0t}{\ell^2} \qquad (3)$$

According to Eq. (2), the shadow stress of adjacent cracks on one of the hydraulic fractures depends on the location of the crack and the number of parallel fractures. Therefore, to evaluate the interaction effect of N parallel hydraulic fractures on one of those in the position of $\hat{\mathrm{P}}$, the Eq. (2) with the approximation of $O\left(\varsigma^{-6}\right)$ changes as follows:

$$\left(\frac{\sigma_I}{p_0}\right)_{\hat{\mathrm{P}}}=\frac{3\ell^2}{2d^2}\left(\mathbb{H}_{\hat{\mathrm{P}}}^2+\mathbb{H}_{N-\hat{\mathrm{P}}-1}^2\right) \qquad (4)$$
$$-\frac{15\ell^4}{8d^4}\left(\mathbb{H}_{\hat{\mathrm{P}}}^4+\mathbb{H}_{N-\hat{\mathrm{P}}-1}^4\right)+O\left(\ell/d\right)^{-6},$$
$$\mathbb{H}_r^{(k)}=\sum_{m=1}^{m=r}\frac{1}{m^k},$$
$$\lim_{r\to\infty}\mathbb{H}_r^{(k)}=\mathbb{Z}\left(k\right),\ \mathrm{H}_\infty^2=\mathbb{Z}\left(2\right)=\frac{\pi^2}{6},$$
$$\mathbb{H}_0^{(k)}=0,\ \ \mathbb{H}_1^{(k)}=1$$



Where, $\mathbb{H}_r^{(k)}$ is the generalized harmonic number of order k and $\mathbb{Z}$ is The Riemann zeta function.

Simply, the mean interaction stress‘ $\bar{\sigma}_I$ ‘ on a crack can be obtained from the following equation without considering the position of the crack:

$$\frac{\bar{\sigma}_I}{p_0}\approx\frac{3}{2}\left(\frac{2}{N}\right)\frac{\ell^2}{d^2}\sum_{m=1}^{N-1}\mathbb{H}_m^2-\frac{15}{8}\left(\frac{2}{N}\right)\frac{\ell^4}{d^4}\sum_{m=1}^{N-1}\mathbb{H}_m^4, \qquad (5)$$
$$if\ N\to\infty\Rightarrow\frac{\bar{\sigma}_I}{p_0}\approx\frac{\pi^2\ell^2}{2d^2}-\frac{\pi^4}{24}\frac{\ell^4}{d^4}$$

Using Eq. (4) with approximation term $O\left(\ell/h\right)^{-4}$, Fig. 3 is plotted to better understand the effect of the interaction stress, with respect to the spacing and the number of parallel cracks on each other. According to this figure, inner-fractures are further affected by shadow stress compared to outer-fractures. On the other hand, increase in the number of cracks, the interaction stress effect increases for the inner-fractures, but this increase is not significant.

According to the above-mentioned arguments, if the fluid has been injected in the array parallel hydraulic fractures with the same flow rate, the inner fractures will grow less due to the larger shadow stress.

This diversity in the growing need a modification in the calculated interaction stress, which is unused due to differences in the lengths of the cracks.

4. CONCLUSION

In this study, the pseudo traction method (PTM) is proposed to determine the evaluation of interaction stress between two oriented hydraulic cracks and is extended the array of parallel hydraulic fractures according to the number and position of cracks in the elastic medium. The present study shows that as the number of cracks increases, the interaction stress for the inner cracks increases, but this increase is not so significant for large array cracks. The inner cracks are more affected by interaction stresses (compression stress type), which will lead to a smaller growth. On the other hand, outer cracks will grow more. If the space between the inner cracks is considered more than the outer cracks, then it may lead to the simultaneous growth of cracks.

REFERENCES

[1] A. Bunger, Analysis of the power input needed to propagate multiple hydraulic fractures, International Journal of Solids and Structures, 50(10) (2013) 1538-1549.

[2] C. Cheng, A.P. Bunger, Reduced order model for simultaneous growth of multiple closely-spaced radial hydraulic fractures, Journal of Computational Physics, 376 (2019) 228-248.

[3] M. Hori, S. Nemat-Nasser, Interacting micro-cracks near the tip in the process zone of a macro-crack, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 35(5) (1987) 601-629.

[4] H. Tada, P. Paris, G. Irwin, The analysis of cracks handbook, New York: ASME Press, 2000.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

A. Asgari, A.A. Golshani, Evaluation of Shadow Stress between Hydraulic Fractures, Amirkabir J. Civil Eng., 53(2) (2021) 163-166.

DOI: 10.22060/ceej.2020.16566.6277

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، دوره ۵۳ شماره ۲، سال ۱۴۰۰، صفحات ۷۰۷ تا ۷۲۲
DOI: 10.22060/ceej.2020.16566.6277

برآورد اثر اندرکنش بین ترک های هیدرولیکی

علی عسگری[۱،*]، علی اکبر گلشنی[۲]

[۱] گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران
[۲] گروه مکانیک خاک و پی، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

خلاصه: به منظور افزایش بهره‌وری استخراج هیدروکربن‌ها و گسترش ترک‌ها تا محل مخزن آن‌ها، ترک‌ها معمولا عمود بر تنش حداقل و به صورت دسته ای رشد داده می‌شوند. از دهه اخیر، هر ساله در قاره‌ی آمریکا بیش از ده هزار چاه افقی برای ایجاد و رشد ترک عمودی بر تنش کمینه در حال حفاری است و در هر چاه افقی بالغ بر صد ترک هیدرولیکی ایجاد می‌گردد. به منظور کاهش هزینه اجرایی، معمولا ۳-۸ ترک را به طور هم زمان در یک محدوده ۱۰-۳۰ متری ایجاد می‌کنند و آن‌ها را در مخزن گسترش می‌دهند. رشد هم زمان ترک‌ها با توجه به شکل، تعداد، موقعیت، فاصله و طول آن‌ها بر چگونگی رشد یکدیگر موثر است. به عبارت دیگر وقتی ترکی در سطوح خود تحت فشار ناشی از تزریق سیال قرار می گیرد، باعث رشد آن می شود اما ممکن است این فشار بر روی رشد ترک‌های مجاور اثر منفی داشته باشد، که به این اثر سایه یا اندرکنش گفته می شود. مسلما برآورد صحیح از اثر تنش سایه بین ترک‌ها منجر به طراحی بهینه تری می‌شود در این نوشتار به کمک روش کشش کاذب ارتقا یافته به بررسی اثر اندرکنش بین ترک‌های هیدرولیکی با توجه به فواصل ترک‌ها بر روی یکدیگر پرداخته می‌شود. نتایج نشان می دهدکه در ترک های میانی تحت تاثیر تنش سایه بیشتری نسبت به ترک های کناری قرار دارند و از طرفی افزایش فواصل بین ترک ها باعث کاهش اثر سایه می شود. نتایج این پژوهش در تعیین تعداد و فواصل ترک ها، در طراحی شکست هیدرولیکی بسیار کاربردی است.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۸/۰۳/۲۹
بازنگری: ۱۳۹۸/۰۵/۰۵
پذیرش: ۱۳۹۸/۰۶/۰۲
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۶/۰۱

کلمات کلیدی:
شکست هیدرولیکی چندتایی
اندرکنش ترک ها
رشد هم زمان
روش کشش کاذب
روش تحلیلی

۱- مقدمه و پیشینه پژوهش

پژوهش های گسترده ای بر روی گسترش ترک های هیدرولیکی منفرد، چه حل عددی و چه روش های تحلیلی انجام شده است اما اخیرا اکثر پژوهش ها بر روی رشد هم زمان ترک های هیدرولیکی متمرکز شده است [۱-۱۳] که برخی از این پژوهش ها در زیر اشاره شده است.

لکامپوین و همکارانش [۵] با استفاده از ترکیب روش های حجم محدود و جابه‌جایی گسسته به ترتیب برای مجراسازی معادله ی جریان و کشسانی به طور موفقیت آمیزی توانستند رشد دسته ترک های موازی سکه ای شکل را با در نظرگیری اثر اندرکنش این ترک ها الگوسازی کنند. آن ها فرض کردند که ترک های هیدرولیکی به صورت عمود/عرضی برجداره سیمانی چاه گسترش یابد و چاه به صورت افقی و درجهت تنش افقی کمینه حفر گردد. این حالت بهترین حالت حفر چاه در عمل است. همچنین ترک ها نسبت بهم موازی باقی بمانند و هیچگونه انحنای نسبت بهم نداشته باشند. آن ها در این تحقیق اثرات افت فشار در محل اتصال چاه با ترک و همچنین اثر اندرکنش ترک ها و سیال را درنظرگرفتند.

بونگر [۱] با استفاده از ساده سازی و مقیاس کردن، میزان توان ورودی مورد نیاز پمپ جهت تزریق سیال و ایجاد شکست هیدرولیکی و رشد آن را از روش انرژی برای یک دسته از ترک های هیدرولیکی موازی در رژیم های سختی و گرانروی تعیین کرد. ایشان اثرات اندرکنش بین

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: a.asgari@umz.ac.ir

دو ترک موازی و مجاور هم را با استفاده از رابطه وسترگارد[1] بررسی کرد [۱۴]. همچنین در بررسی انجام شده اثرات شکل ترک را در نظرگرفت و توان ورودی مورد نیاز برای شکست را برای ترک های دوبعدی KGD[2]، شعاعی[3] و PKN[4] برآورد کرد. در ادامه این کار، بونگر و همکارانش [۲] با در نظرگیری اثر افت فشار ناشی از جریان سیال در محل اتصال چاه و ترک ها، مسئله مشابهی را بررسی کردند. آن ها همچنین سه نوع از ترک PKN را با توجه به نسبت ارتفاع، فاصله و طول ترک ها نسبت بهم در رژیم گرانروی مورد بررسی قرار دادند. همچنین، بونگر و همکارانش در سال ۲۰۱۳ [۱۵] گسترش دایک ها را مورد توجه قرار دادند. آن ها دایک ها را به صورت یک ترک PKN تیغه ای شکل در دو حالت (۱- وقتی ارتفاع ترک بزرگتر از فاصله بین دو دایک مجاور باشد و ۲ - وقتی ارتفاع ترک کوچکتر از فاصله بین دو دایک مجاور باشد) بررسی کردند. آن ها نشان دادند که بهینه ترین حالت بر مبنای توان ورودی مورد نیاز پمپ برای رشد هم زمان ترک ها، موقعی است که فاصله دایک ها با ارتفاع آن ها برابر باشند. در پژوهش های اخیر بونگر و همکارانش، تنش های اندرکنش ترک های موازی به درستی مدل نشده اند.

پیرس و بونگر [۷] با پیشنهاد یک الگوی سه بعدی[5]، اثرات تنش های اندرکنشی ترک های هیدرولیکی موازی را نسبت به هم بررسی کردند. این الگو قادر است اثرات تنش لایه های محدوده کننده اطراف مخزن را در نظر گیرد. توضیح اینکه ترک تیغه ای شکل[6] سه بعدی در ابتدا به صورت شعاعی رشد می کنند و وقتی به موانع[7] برخورد کردند با ارتفاع ثابت و به شکل ترک PKN رشد خواهند کرد. همچنین آن‌ها دریافتند که ترک های میانی تحت اثرات بیشتری از تنش های اندرکنش[8] (از نوع تنش فشاری) قرار می گیرد که منجر به رشد کمتر آن ها خواهد شد. این پدیده توسط پژوهشگران دیگر نیز توصیف شده‌است [۴, ۱۶-۱۸]. از طرفی ترک های کناری رشد بیشتری خواهند داشت. اگر فواصل ترک میانی نسبت به هم زیادتر و ترک های کناری نسبت به هم کمتر شود آنگاه ممکن است منجر به رشد هم زمان ترک های میانی و کناری شود.

1 Westergard
2 Khristianovic and Zheltov; Geertsma and de Klerk (KGD or KZGD)
3 penny shape or radial
4 Perkins and Kern; Nordgern (PKN)
5 novel parallel-planar 3D model
6 blade-like geometry
7 barriers
8 stress shadowing

در گذشته، برای در نظر گرفتن اثرات اندرکنش بین ترک ها بدون حضور سیال، نعمت ناصر و هوری [۱۹, ۲۰] روش کشش کاذب[9] را معرفی کردند و در سال ۱۹۸۷ [۲۱] آنرا گسترش دادند. این روش بر مبنای توابع پتانسیل مختلط موسخلیشویلی [۲۲] می باشد. در این پژوهش، با استفاده از همین روش به بررسی اثرات اندرکنش بین ترک های هیدرولیکی پرداخته می شود. نوآوری در این پژوهش مربوط به به کارگیری روش کشش کاذب با حضور سیال است که در برآورد تنش اندرکنش بین ترک ها بسیار کاربردی است. همچنین اثر اندرکنش در تر ک های هیدرولیکی چندتایی با توجه به موقعیت مکانی و تعداد آن ها به صورت تحلیلی بررسی نشده‌است که در این پژوهش به آن نیز پرداخته شده‌است.

برای برآورد تحلیلی از تنش های اندرکنشی ترک های هیدرولیکی مجاور نسبت به هم، ساختار این نوشتار بدین صورت دسته بندی شده‌است: در ابتدا مختصری در مورد معادله ی حاکم، بای-هارمورنیک[10]، بر پایه تئوری الاستیسیته ی اشاره می شود. حل این معادله منجر به تعیین تنش ها و جابجایی ها در یک محیط الاستیک می شود. تحلیل معادله ی بای‌هارمونیک در حالت کلی یعنی؛ بدون درنظرگرفتن شرایط مرزی و نوع بارگذاری توسط موسخلشویلی [۲۲] برمبنای توابع پتانسیل مختلط ارائه شد. این توابع پتانسیل باید طوری تعیین شوند که شرایط مرزی را ارضا کنند. در ادامه ی همین بخش، تنش های ایجاد شده در یک محیط دوبعدی حاوی یک ترک ناشی از تنش کششی به کمک روابط موسخلشویلی تعیین می شوند. در بخش سوم، اثر اندرکنش بین دو ترک هیدرولیکی مورب به روش تنش کششی کاذب مورد بررسی قرار می گیرد. روش تنش کششی کاذب بر پایه روابط موسخلیشویلی (بخش دوم) است. سپس با کمک همین روش، میزان اندرکنش برای دسته ترک های موازی هیدرولیکی محاسبه می گردد و در پایان نتیجه های محقق شده از این نوشتار مورد بررسی قرار می گیرد.

۲- رابطه تنش و جابه‌جایی با توابع مختلط پتانسیل در یک سیستم شامل ناپیوستگی

مسلما رشد یک ترک بر روی رشد ترک های دیگر در یک محیط تاثیر دارد. برای برآورد این اثرات نیاز است ابتدا اطلاعاتی

9 pseudo-traction method
10 Biharmonic

در مورد توزیع یا پخش تنش در یک محیط دو بعدی با وجود یک ترک، داشته باشیم. برای تعیین توزیع تنش نیاز است معادله بای-هارمونیک، $\nabla^4 U = 0$ (به‌طور مثال آمده در مرجع [۲۳]) تحلیل شود. U تابع تنش ایری[۱] است که با تعیین آن می توان تنش ها، کرنش ها و جابه‌جایی ها را در یک نقطه دلخواه در محیط شامل به‌دست آورد. لازم به ذکر است که این معادله برپایه ی فرضیات تئوری الاستیسیته ی خطی به‌دست می آید. برای تحلیل و تعیین تابع تنش ایری به صورت حقیقی برای یک محیط دو بعدی با شرایط مرزی دلخواه کاری نسبتا دشواریست ولی با استفاده از توابع مختلط می توان جواب عمومی معادله بای-هارمونیک را بر حسب توابع پتانسیل مختلط $\Phi(z)$ و $\Psi(z)$ محاسبه کرد. موسخلشویلی [۲۲] یک راه حل تحلیلی با استفاده از توابع پتانسیل مختلط برای معادله بای-هارمونیک برای یک ترک در محیط کشسان ارائه کرد. مطابق تئوری موسخلشویلی، اگر در یک سیستمی ترکی از قبل موجود باشد (رجوع به شکل(۱))، آنگاه مولفه های تنش و جابه‌جایی در نقطه $z=(x,y)$ از مرکز مختصات آن ترک از روابط زیر به‌دست می آید[۲۲]:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{xx}^A+\sigma_{yy}^A=2[\Phi'(z)+\overline{\Phi'(z)}]=4\,\mathrm{Re}\left[\Phi'(z)\right]\\
&\sigma_{yy}^A-\sigma_{xx}^A+2I\tau_{xy}^A=2[\bar{z}\Phi''(z)+\Psi'(z)]\\
&2G(u_x^A+Iu_y^A)=\kappa\Phi(z)-z\overline{\Phi'(z)}-\overline{\Psi(z)}\\
&\Psi'(z)=\overline{\Phi'(\bar{z})}-\Phi'(z)-z\Phi''(z)\\
&z=x+Iy,\; I=\sqrt{-1},\begin{cases}\kappa=3-4\upsilon, & \text{Plane strain}\\ \kappa=(3-\upsilon)/(1+\upsilon), & \text{Plane Stress}\end{cases}
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

علامت بار و پریم به ترتیب نشانه مزدوج تابع مختلط و مشتق نسبت به متغیر   است. همچنین پارامترهای به کار رفته در رابطه‌ی ۱ به صورت زیر تعریف شده اند:

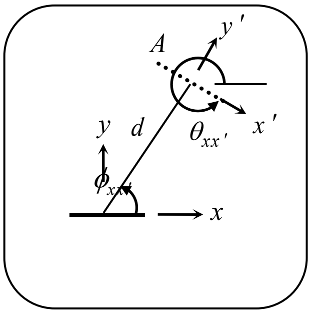
x و y: مختصات مکانی

z: متغیر توابع مختلط که برابر است با: $z=x+Iy$

$\Phi(z)$ و $\Psi(z)$: توابع پتانسیل مختلط هستند که به ابعاد هندسی ترک، بارگذاری خارجی و مکان وابسته است.

σ_{xx}^A و σ_{yy}^A: تنش های نرمال در جهت x و y برای نقطه ی A

τ_{xy}^A: تنش برشی در نقطه ی A



شکل ۱. ترک با طول 2ℓ در یک محیط همسان و کشسان

Fig. 1. A crack with 2ℓ length in the isotropic linear elastic solid

u_x^A و u_y^A: جابجایی های نقطه ی A در جهت x و y

υ: ضریب پواسون محیط

G : مدول برشی محیط

رابطه‌ی ۱ از معادلات تعادل و سازگاری تنش و جابه‌جایی قابل اثبات است. برای اطلاع از چگونگی اثبات آن می توانید به مرجع[۲۴] رجوع کنید.

تابع پتانسیل مختلط $\Phi(z)$ به حالت های بارگذاری و شرایط مرزی و نوع ناپیوستگی (مثل ترک، حفره) بستگی دارد. برای اطلاعات بیشتر از چگونگی تعیین توابع پتانسیل به کمک شرایط مرزی و نوع بارگذاری می توانید به مرجع [۲۲] رجوع کنید.

برای حالت خاصی، اگر تنش کششی محیطی σ_∞ به طور عمود بر امتداد ترک به طول 2ℓ وارد شود آن‌گاه داریم[۲۵]:

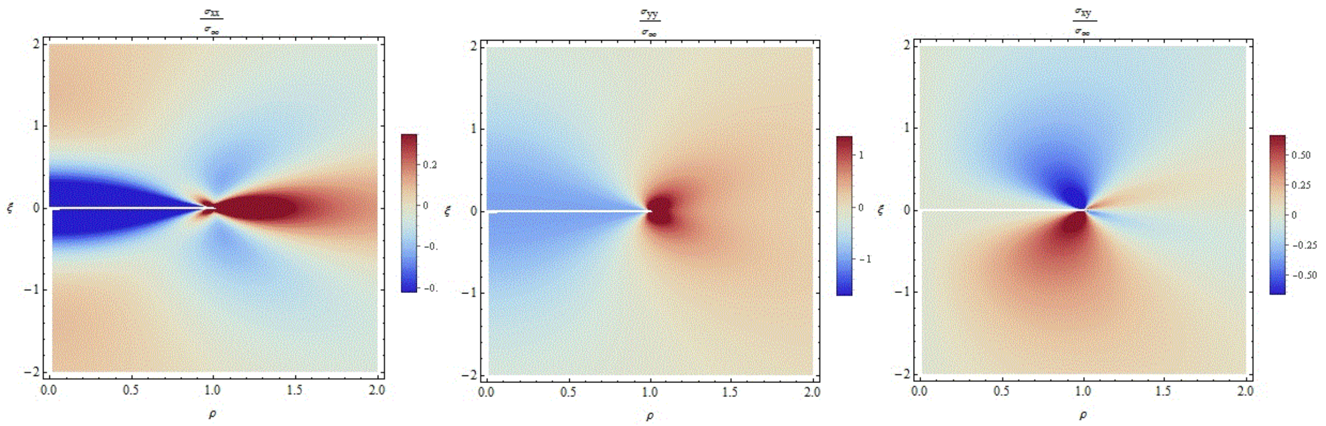
$$
\begin{aligned}
&\Phi'(z)=\frac{\sigma_\infty}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-\ell^2}}-1\right)=\frac{\sigma_\infty}{2}\left(\frac{\Im}{\sqrt{\Im^2-1}}-1\right),\\
&z=x+Iy,\quad \Im=\rho+I\xi,\quad \rho=\frac{x}{\ell},\ \xi=\frac{y}{\ell}
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

که در آن ρ و ξ به ترتیب مختصات بی بعد شده در جهت x و y هستند.

برای تعیین تنش ها در مختصات محلی $x'y'$ تحت زاویه $\theta_{xx'}$ در جهت پادساعتگرد از محور x و به فاصله z از مرکز ترک، روابط (۱) به صورت زیر تغییر می کنند:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{x'x'}^A+\sigma_{y'y'}^A=2[\Phi'(z)+\overline{\Phi'(z)}]=4\,\mathrm{Re}\left[\Phi'(z)\right]\\
&\sigma_{x'x'}^A+I\tau_{x'y'}^A=\Phi'(z)+\overline{\Phi'(z)}-e^{-2I\theta_{xx'}}\left(z\Phi''(z)+\overline{\Psi'(z)}\right)\\
&\sigma_{y'y'}^A-I\tau_{x'y'}^A=\Phi'(z)+\overline{\Phi'(z)}+e^{-2I\theta_{xx'}}\left(z\Phi''(z)+\overline{\Psi'(z)}\right)\\
&z=x+Iy=de^{I\phi_{xx'}}+x'e^{I\theta_{xx'}},\quad I=\sqrt{-1}
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

1 Airy Stress Function



شکل ۲. توزیع تنشهای قائم، افقی و برشی نرمال شده حول یک ترک با استفاده از توابع پتانسیل مختلط ترسیم شده با استفاده از نرمافزار Mathematica version ۹،۰،۰

Fig. 2. Distribution of normalized stresses vicinity of half-length crack in x and y direction using of complex potentials (drawn using Mathematica version 9.0.0)

که در آن d فاصله مرکز ترک (مرکز مختصات xy) تا مرکز مختصات محلی $x'y'$، $\phi_{xx'}$ زاویه ی بین راستای d با محور x و $\sigma^A_{x'x'}, \sigma^A_{y'y'}$ و $\tau^A_{x'y'}$ به ترتیب تنش های نرمال و تنش برشی در مختصات محور محلی $x'y'$ هستند.

شکل ۲، توزیع تنش در جهات افقی و عمودی در حول یک ترک تحت تنش کششی در جهت عمود بر ترک را نشان می دهد. این شکل با جایگذاری رابطه ی ۲ در رابطه ی ۳ و در شرایط $\theta_{xx'} = 0$ ، ترسیم شده اند. همان طورکه در شکل مشاهده می شود در نوک ترک به دلیل وجود نقطه تکینه تمرکز تنش وجود دارد. هر چقدر از نوک ترک دورتر شویم اثر تنش کم رنگ تر خواهد شد. رنگ آبی و قرمز به ترتیب نشانه ی ایجاد تنش کششی و فشاری در آن نقطه است.

۳- اندرکنش متقابل ترک ها

پژوهشگران زیادی با در نظرگرفتن فرض های بسیار ساده کننده اثر اندرکنش بین ترک ها را مطالعه کردند [۲۶-۲۸]. نعمت ناصر و هاری[۱۹, ۲۰] روش کشش کاذب[1] را معرفی کردند و در سال ۱۹۸۷ [۲۱] آن را گسترش دادند. آن ها فرض کردند که ترک به صورت KGD هستند. همچنین با استفاده از تجزیه محیط به چند محیط که در قسمت بعد بدان اشاره می شود، اثر تنش اندرکنش را با استفاده از اصل جمع آثار قوا تعیین کردند. برخی از پژوهشگران برای الگو سازی اثر اندرکنش از این روش استفاده کردند [۲۹, ۳۰]. لازم به ذکر است که روش کشش کاذب بر مبنای توابع پتانسیل مختلط موسخلیشویلی [۲۲] می باشد.

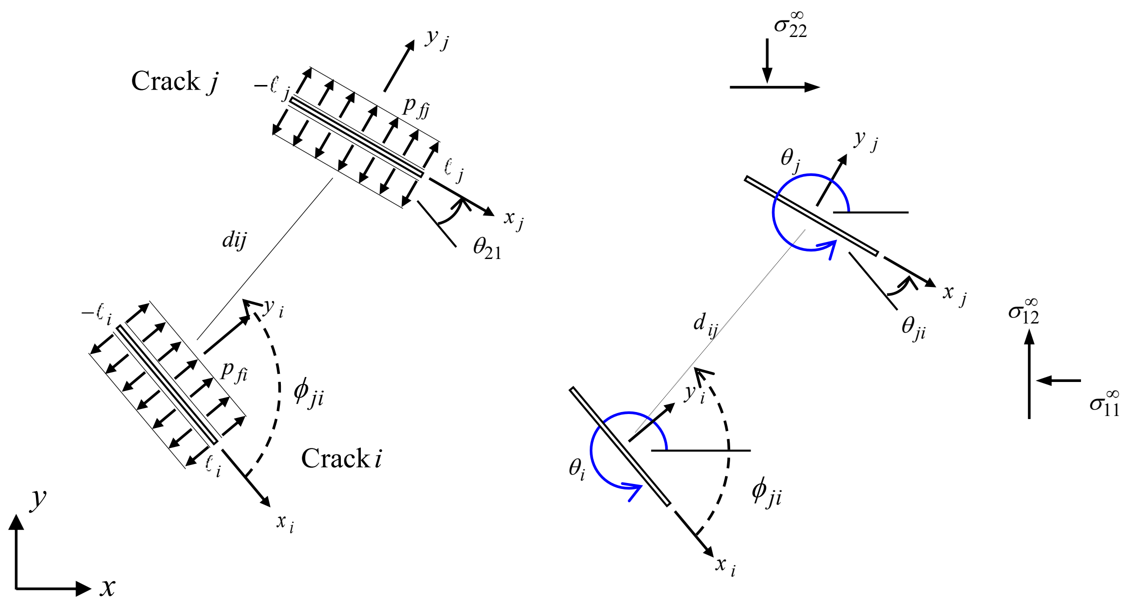
۳-۱- رابطه‌ی سازگاری و اندرکنش بین دو ترک هیدرولیکی

در این‌جا برای ارزیابی اندرکنش بین دو ترک هیدرولیکی از روش تنش کاذب استفاده شده‌است. این روش توسط هاری و نعمت ناصر [۱۹, ۲۰] در سال ۱۹۸۵ برای تحلیل تنش محیط ناهمسانگرد شامل ترک های ریز در محیط کشسانی پیشنهاد شده‌است.

برای سادگی ما در ابتدا یک محیط صفحه ای با دو ترک i و j به ترتیب به طول های ℓ_i و ℓ_j در یک سیستم تحت تنش های محیطی نرمال σ^∞_{11} و σ^∞_{22} و برشی σ^∞_{12}و فشار سیال p_{fi} و p_{fj} مطابق شکل ۳ درنظر می گیریم. در اینجا فرض می شود که ترک ها همواره باز است و سطوح آن ها هیچ تماسی با یکدیگر ندارند. هر یک از ترک های i و j در مرکز خود دارای محورهای مختصات x_iy_i و x_jy_j هستند. زاویه از محور x_i تا x_j با θ_{ji} و زاویه بین محور x_i و خط مرکز تا مرکز ترک ها با ϕ_{ji}نشان داده شد. همچنین فاصله مرکز تا مرکز ترک ها برابر با d_{ij} است.

این مسئله مطابق شکل ۴ به سه جزء همگن، i و j تقسیم می شود. جزء همگن شامل یک محیط بدون هیچ ترک و محصور شده توسط تنش محیطی می باشد و تنش ها در محل فرضی ترک ها تعیین می شود. این تنش ها با استفاده از روابط دایره مور نیز قابل

1 Pseudo-traction method (PTM)



شکل ۳. شماتیک دو ترک هیدرولیکی زاویه دار در یک صفحه

Fig. 3. Schematic of two inclined hydraulic fractures under compression far-field stresses

تعیین می باشند. جزء iام، محیط فقط شامل یک ترک هیدرولیکی i تحت فشار سیال و بدون هیچ تنش محیطی است. تنش ناشی از این ترک هیدرولیکی در محل ترک j با استفاده از توابع پتانسیل موسخیلیشویلی تعیین می گردد.

به‌طور مشابه، جزء jام نیز فقط شامل یک ترک هیدرولیکی j تحت فشار سیال و بدون هیچ تنش محیطی است. تنش ناشی از این ترک هیدرولیکی در محل ترک i نیز با استفاده از توابع پتانسیل موسخیلیشویلی تعیین می گردد. با در نظر گرفتن شرایط مرزی در سطوح ترک ها و اصل جمع آثار قوا می توان تنش اندرکنشی را تعیین کرد. البته نکته مهمی که در اینجا قابل ذکر است می توان جابه‌جایی ناشی از اندرکنش بین ترک ها را نیز از روابط موسخیلیشویلی تعیین کرد.

مطابق با رابطه موسخلشویلی، در جزء j تابع پتانسیل به صورت زیر تعیین می شود:

$$\begin{aligned}
&\Phi'_j(z_j) = -\frac{1}{2\pi I\sqrt{z_j^2-\ell_j^2}}\int_{-\ell_j}^{\ell_j}\frac{T\sqrt{s^2-\ell_j^2}}{s-z_j}ds,\\
&\Psi'_j(z_j) = \overline{\Phi'_j(\overline{z_j})} - \Phi'_j(z_j) - z_j\Phi''_j(z_j),\ \ z_j = x_j + Iy_j \quad j=1,2\\
&z_j = d_{ij}e^{I\phi_{ij}} + x_i e^{I\theta_{ij}},\quad |x_i| \le \ell_j\\
&T = \left\{\left(\sigma_{22}^{\infty j}+\sigma_{22}^{pj}\right) - I\left(\sigma_{12}^{\infty j}+\sigma_{12}^{pj}\right) - p_{fj}\right\}\\
&T = T_R + IT_I,\quad T_R = \mathrm{Re}\{T\},\ T_I = \mathrm{Im}\{T\}
\end{aligned} \tag{۴}$$

که در آن $\sigma_{22}^{\infty j}$ و $\sigma_{12}^{\infty j}$، تنش موضعی ناشی از تنش های محیطی در ناحیه j است و مقادیر σ_{22}^{pj}، و σ_{21}^{pj} تنش های کششی کاذب[1] هستند که در قسمت های بعدی تعیین می شوند.

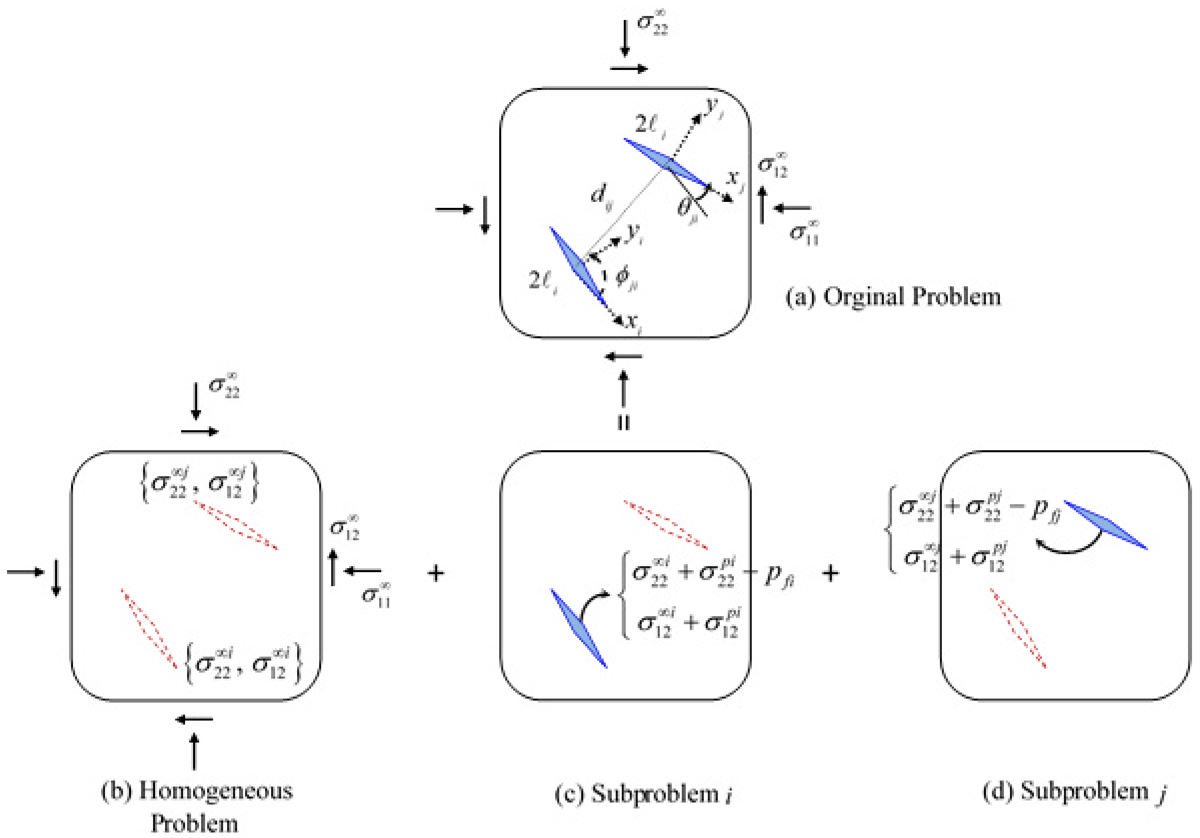
با فرض باز بودن ترک های i و j، تنش کل بر روی سطوح آزاد هر یک از ترک ها هیدرولیکی برابر با فشار سیال وارد بر آن است؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\sigma_{22}^{i}+\sigma_{22}^{\infty i}+\sigma_{22}^{pi}=p_{fi}\\ \sigma_{12}^{i}+\sigma_{12}^{\infty i}+\sigma_{12}^{pi}=0\end{cases},\quad \begin{cases}\sigma_{22}^{j}+\sigma_{22}^{\infty j}+\sigma_{22}^{pj}=p_{fj}\\ \sigma_{12}^{j}+\sigma_{12}^{\infty j}+\sigma_{12}^{pj}=0\end{cases} \tag{۵}$$

روابط فوق همان شرایط مرزی مسئله هستند که از اثر اصطکاک برشی ناشی از حرکت سیال در ترک صرف نظر شده‌است و سطح ترک صیقلی فرض شده‌است. با توجه به این شرایط مرزی و رابطه‌ی ۳، روابط سازگاری برای جزء اصلی مسئله به صورت زیر تعیین می شوند:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}^{pj}+i\sigma_{12}^{pj} = \Phi'_i(z_i)+\overline{\Phi'_i(z_i)}-\\
&e^{-I2\theta_{ij}}\left(z_i\overline{\Phi''_i(z_i)}+\overline{\Psi'_i(z_i)}\right),\\
&\sigma_{22}^{pi}-i\sigma_{12}^{pi} = \Phi'_j(z_j)+\overline{\Phi'_j(z_j)}+\\
&e^{-I2\theta_{ij}}\left(z_j\overline{\Phi''_j(z_j)}+\overline{\Psi'_j(z_j)}\right), I=\sqrt{-1}
\end{aligned} \tag{۶-الف}$$

1 pseudo tractions



شکل ۴. روند تجزیه دو ترک تحت تنشهای فشاری به جزءهای کوچکتر برای درنظرگیری اندرکنش بین آنها

Fig. 4. Process of decomposition of (a) original evolution problem to (b) homogeneous problem and (c, d) sub-problems i and j

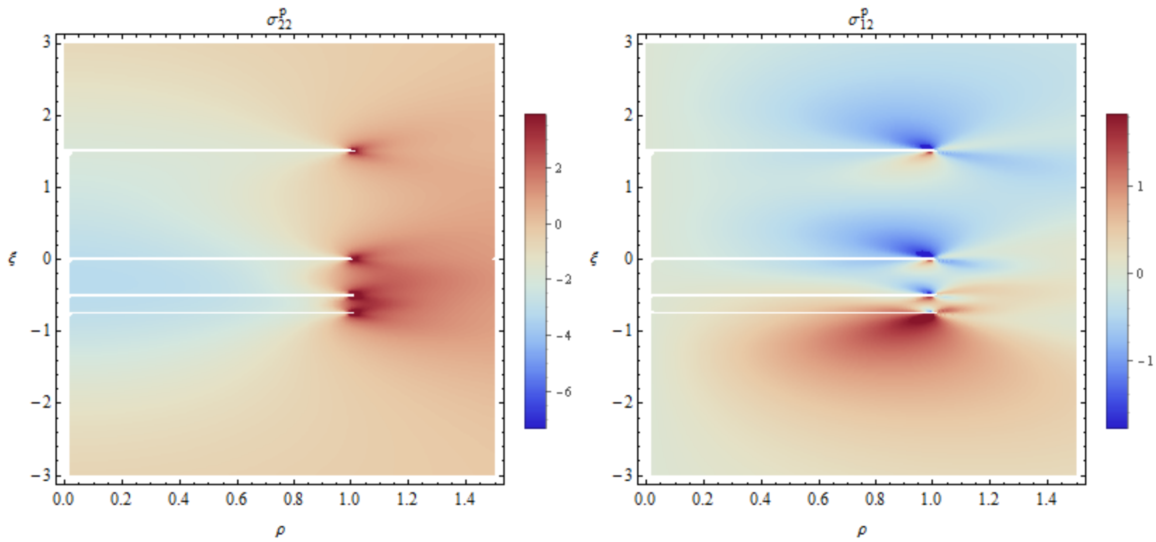
$$z_i = d_{ji}e^{I\phi_{ji}} + x_j e^{I\theta_{ji}} \approx d_{ji}e^{I\phi_{ji}},\ z_j = d_{ij}e^{I\phi_{ij}} + x_i e^{I\theta_{ij}} \approx d_{ij}e^{I\phi_{ij}},\ \left|x_j/\ell_j\right| \le 1$$
$$d_{ji} = d_{ij},\ \ \theta_{ij} = -\theta_{ji},\ \phi_{ij} = \phi_{ji} + \pi - \theta_{ji}.$$

توجه شود که با ثابت فرض کردن فاصله مرکز تا مرکز ترک ها d_{ij} و زاویه بین آن ها ϕ_{ij}، تنش ها و توابع پتانسیل ناشی از ترک j در امتداد ترک i تابعی از x_i است که در اینجا این تغییرات نادیده در نظر گرفته می شود.

حل معادلات انتگرالی (۶-الف) در حالت دقیق و از راه صریح کار نسبتا پیچیده است. در حالت خاص با فرض این‌که زاویه بین ترک ها θ_{ij}، برابر با صفر باشد، و مقدار T نسبت به متغییر انتگرال در رابطه ی(۴)، ثابت فرض شود و با جایگذاری رابطه ی ۴ در رابطه ی ۶-الف، حل دقیق آن به صورت رابطه ی ۶-ب در می آید:

$$\begin{aligned}\sigma_{22}^{pi} - I\sigma_{12}^{pi} = &\frac{(xT_I + yT_R)\sin\left(\frac{1}{2}\arg\left(-1+(x+\mathrm{I}y)^2\right)\right)}{\sqrt[4]{\left(x^2-y^2-1\right)^2+4x^2y^2}} \\ &+\frac{\left(xT_I + 3y^2xT_I + yT_R - x^3T_I\right)\sin\left(\frac{3}{2}\arg\left(-1+(x+\mathrm{I}y)^2\right)\right)}{\left(\left(x^2-y^2-1\right)^2+4x^2y^2\right)^{3/4}} \\ &+\frac{\left(3x^2y-2y-y^3\right)T_I\cos\left(\frac{3}{2}\arg\left(-1+(x+\mathrm{I}y)^2\right)\right)}{\left(\left(x^2-y^2-1\right)^2+4x^2y^2\right)^{3/4}} \\ &+\frac{\left(xT_R - yT_I\right)\cos\left(\frac{1}{2}\arg\left(-1+(x+\mathrm{I}y)^2\right)\right)}{\sqrt[4]{\left(x^2-y^2-1\right)^2+4x^2y^2}} - T_R\end{aligned} \quad (۶\text{-ب})$$

شکل ۵ توزیع دو بعدی تنش های قائم و افقی با در نظرگرفتن اثر اندرکنش ترک های هیدرولیکی موازی را از روش دقیق برگرفته از



شکل ۵. توزیع تنشهای قائم و افقی حول ترکهای موازی با اثر سایه با فرض $\theta_{ij}=0$ و $T=1$ ترسیم شده با استفاده از نرمافزار Mathematica version (۹،۰،۰)

Fig. 5. Distribution of vertical and horizontal stresses vicinity of half-length parallel cracks (drawn using Mathematica version 9.0.0)

رابطه ی ۶-ب نشان می دهد. همان طور مشاهده می شود، اثر سایه با کم شدن فاصله ترک ها بیشتر می شود و این اثر با نزدیک شدن ترک ها بیشتر می شود.

برای حل‌پذیری معادلات انتگرالی ۶-الف، در حالت ترک های زاویه دار($\theta_{ij}\neq 0$)، فرض می شود که تنش های کششی کاذب در سطوح ترک مقادیر ثابتی هستند و همچنین شرط $\left|\ell_j/z_j\right|\ll 1$ برقرار است. با صرف نظر کردن از ترم های مرتبه بالاتری از $O\left(\ell_j/z_j\right)^5$ و با استفاده از روابط ۴، توابع پتانسیل $\Phi'_j(z_j)$ و $\Psi'_j(z_j)$ برای جزء j بصورت زیر به‌دست می آید:

$$\Phi'_j(z_j)=\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{\ell_j}{z_j}\right)^2+\frac{3}{16}\left(\frac{\ell_j}{z_j}\right)^4\right\}T,$$
$$\Phi''_j(z_j)=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\ell_j^2}{z_j^3}+\frac{3}{2}\frac{\ell_j^4}{z_j^5}\right\}T, \tag{۷}$$
$$\Psi'_j(z_j)=\left\{\frac{1}{2}\frac{\ell_j^2}{z_j^2}+\frac{3}{8}\frac{\ell_j^4}{z_j^4}\right\}T_R+\frac{3}{8}\left\{\frac{\ell_j^4}{z_j^4}\right\}T$$

لازم به ذکر است که $\Phi'_j(z_j)$ در رابطه ی ۷ به کمک بسط تیلور از رابطه ی ۴ تعیین می شود و $\Phi''_j(z_j)$ همان مشتق تابع $\Phi'_j(z_j)$ نسبت به z_j است. با جایگذاری روابط ۷ در ترم های سمت راست از روابط سازگاری ۶-الف داریم:

$$\begin{aligned}
&\Phi'_j(z_j)+\overline{\Phi'_j(z_j)}=\frac{1}{4}\left\{\frac{\ell_j^2}{z_j^2}T+\frac{\ell_j^2}{\bar{z}_j^2}\bar{T}\right\}+\frac{3}{16}\left\{\frac{\ell_j^4}{z_j^4}T+\frac{\ell_j^4}{\bar{z}_j^4}\bar{T}\right\}\\
&\left\{\frac{1}{4}\frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2}\right\}\left(e^{-I2\phi_{ij}}\left\{T_R+IT_I\right\}+e^{I2\phi_{ij}}\left\{T_R-IT_I\right\}\right)+\\
&\left\{\frac{3}{16}\frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4}\right\}\left(e^{-I4\phi_{ij}}\left\{T_R+IT_I\right\}+e^{I4\phi_{ij}}\left\{T_R-IT_I\right\}\right)=\\
&\left\{\frac{1}{4}\frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2}\right\}\left\{2\cos 2\phi_{ij}T_R+2\sin 2\phi_{ij}T_I\right\}+\\
&\frac{3}{16}\frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4}\left\{2\cos 4\phi_{ij}T_R+2\sin 4\phi_{ij}T_I\right\},\\
&z_j\overline{\Phi''_j(z_j)}+\overline{\Psi'_j(z_j)}=-\frac{z_j}{2}\left\{\frac{\ell_j^2}{\bar{z}_j^3}+\frac{3}{2}\frac{\ell_j^4}{\bar{z}_j^5}\right\}\bar{T}+\\
&\left\{\frac{1}{2}\frac{\ell_j^2}{\bar{z}_j^2}+\frac{3}{8}\frac{\ell_j^4}{\bar{z}_j^4}\right\}T_R+\frac{3}{8}\left\{\frac{\ell_j^4}{\bar{z}_j^4}\right\}\bar{T}=\\
&\left\{\frac{1}{4}\frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2}\right\}\left(-2e^{4I\phi_{ij}}\bar{T}+2e^{2I\phi_{ij}}T_R\right)+\\
&\left\{\frac{3}{16}\frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4}\right\}\left(-4e^{6I\phi_{ij}}\bar{T}+2e^{4I\phi_{ij}}T_R+2e^{4I\phi_{ij}}\bar{T}\right)
\end{aligned}\tag{۸}$$

با قراردادن روابط ۸ در در روابط سازگاری ۷ داریم:

$$\begin{aligned}
\sigma_{22}^{pi}-I\sigma_{12}^{pi}&=\frac{1}{4}\frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2}\begin{pmatrix}\left\{e^{-I2\phi_{ij}}\left(T_R+iT_I\right)+e^{I2\phi_{ij}}\left(T_R-IT_I\right)\right\}\\+\left(-2e^{I2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)}\left(T_R-IT_I\right)+2e^{2I\left(\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)}T_R\right)\end{pmatrix}\\
&+\left\{\frac{3}{16}\frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4}\right\}\begin{pmatrix}\left\{e^{-I4\phi_{ij}}\left(T_R+IT_I\right)+e^{I4\phi_{ij}}\left(T_R-IT_I\right)\right\}\\\left(-4e^{I2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)}\left(T_R-IT_I\right)+2e^{I2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)}T_R+2e^{I2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)}\left(T_R-IT_I\right)\right)\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{4}\frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2}\begin{pmatrix}\left[2\cos 2\phi_{ij}-2\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)+2\cos\left(2\left(\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_R\\+\left[2\sin 2\phi_{ij}-2\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_I\\\left[-2\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)+2\sin\left(2\left(\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]IT_R+2\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)IT_I\end{pmatrix}\\
&+\frac{3}{16}\frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4}\begin{pmatrix}\left[2\cos 4\phi_{ij}-4\cos\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)+4\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_R\\+\left[2\sin 4\phi_{ij}-4\sin\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)+2\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_I\\+\left[-4\sin\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)+4\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]IT_R\\+\left[4\cos\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)-2\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]IT_I\end{pmatrix},
\end{aligned}\tag{۹}$$

تنش های کششی کاذب که همان تنش های اندرکنش بین دو ترک هم محسوب می شوند، در طول ترک ثابت فرض شده‌است. بنابراین روابط فوق به صورت زیر ساده می شوند:

$$\begin{aligned}
\sigma_{22}^{pi}&=\frac{1}{4}\frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2}\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}2\cos 2\phi_{ij}-2\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)+\\2\cos\left(2\left(\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\end{bmatrix}T_R\\+\left[2\sin 2\phi_{ij}-2\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_I\end{pmatrix}\\
&+\frac{3}{16}\frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4}\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}2\cos 4\phi_{ij}-4\cos\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)+\\4\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\end{bmatrix}T_R\\+\begin{bmatrix}2\sin 4\phi_{ij}-4\sin\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)+\\2\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\end{bmatrix}T_I\end{pmatrix},\\
\sigma_{12}^{pi}&=\frac{1}{4}\frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2}\begin{pmatrix}\left[2\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)-2\sin\left(2\left(\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_R\\-2\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)T_I\end{pmatrix}\\
&+\frac{3}{16}\frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4}\begin{pmatrix}\left[4\sin\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)-4\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_R\\+\left[-4\cos\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)+2\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_I\end{pmatrix},\\
\sigma_{11}^{pi}&=\frac{1}{4}\frac{\ell_j^2}{d_{ij}^2}\begin{pmatrix}\left[2\cos 2\phi_{ij}+2\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)-2\cos\left(2\left(\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_R\\+\left[2\sin 2\phi_{ij}+2\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_I\end{pmatrix}\\
&+\frac{3}{16}\frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4}\begin{pmatrix}\left[2\cos 4\phi_{ij}+4\cos\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)-4\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_R\\+\left[2\sin 4\phi_{ij}+4\sin\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)-2\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_I\end{pmatrix},
\end{aligned}\tag{۱۰}$$

در نهایت رابطه فوق را می توان به صورت یک رابطه تانسوری بیان کرد.

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix}\sigma_{11}^{pi}\\\sigma_{22}^{pi}\\\sigma_{12}^{pi}\end{Bmatrix}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\ell_j}{d_{ij}}\right)^2\begin{Bmatrix}\left(\cos 2\phi_{ij}+\cos 2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)-\cos 2\left(\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)T_R\\+\left(\sin 2\phi_{ij}+\sin 2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)T_I,\\\left(\cos 2\phi_{ij}-\cos 2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)+\cos 2\left(\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)T_R\\+\left(\sin 2\phi_{ij}-\sin 2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)T_I,\\\left(\sin 2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)-\sin\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)T_R-\cos 2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)T_I,\end{Bmatrix}\\
&+\frac{3}{8}\frac{\ell_j^4}{d_{ij}^4}\begin{Bmatrix}\left[\cos 4\phi_{ij}+2\cos\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)-2\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_R\\+\left[\sin 4\phi_{ij}+2\sin\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)-\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_I,\\\left[\cos 4\phi_{ij}-2\cos\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)+2\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_R\\+\left[\sin 4\phi_{ij}-2\sin\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)+\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_I,\\\left[2\sin\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)-2\sin\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_R\\+\left[-2\cos\left(2\left(3\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)+\cos\left(2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\right)\right]T_I\end{Bmatrix},
\end{aligned}\tag{۱۱}$$

با جای‌گذاری ترم های T_R و T_I در رابطه فوق داریم:

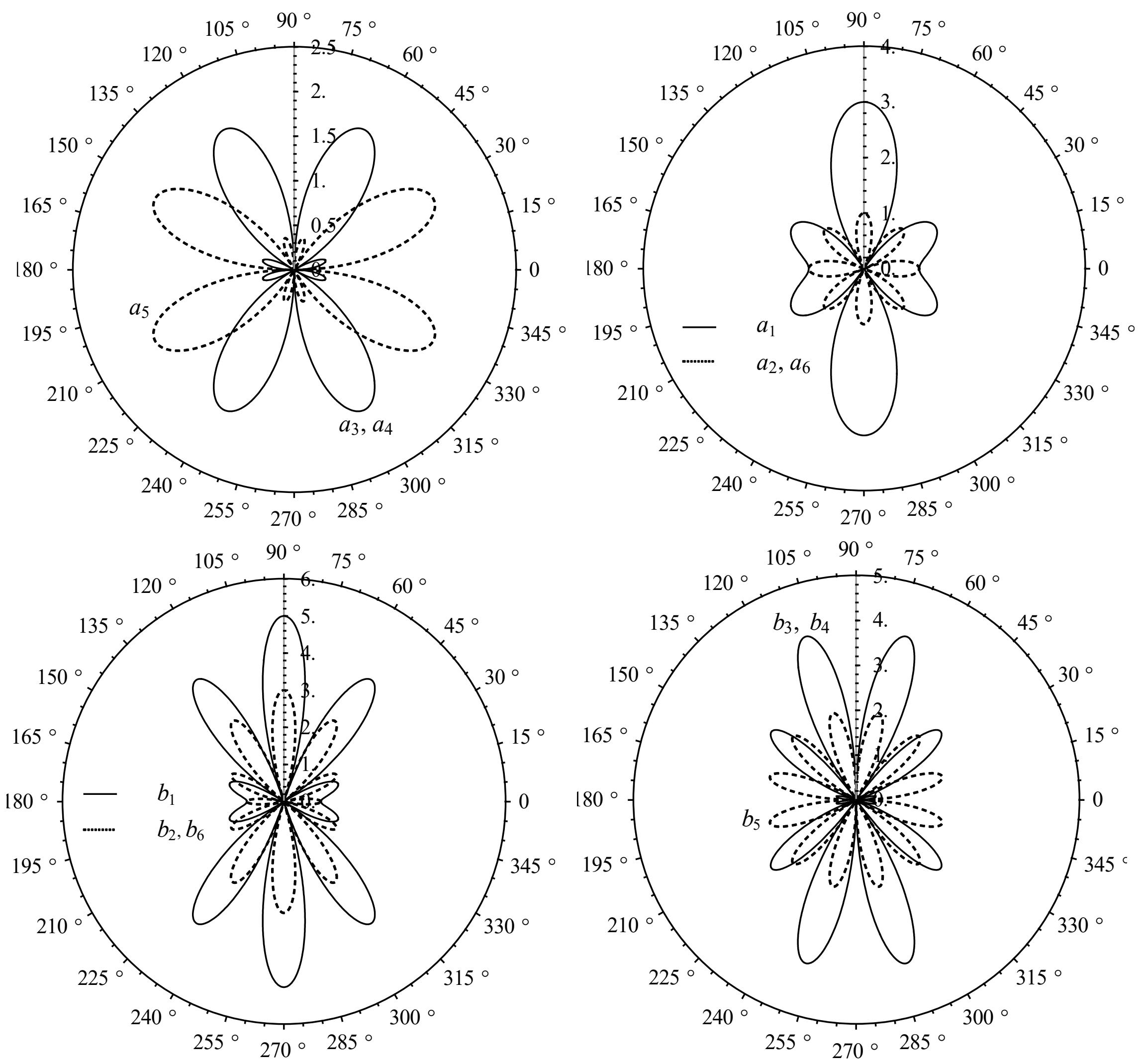
$$\left\{\sigma^{pi}\right\}=\left\{\left[\gamma_{ij}\right]+\left[\varpi_{ij}\right]\right\}\left(\left\{\sigma^{\infty j}\right\}+\left\{\sigma^{pj}\right\}-\left\{p_{fj}\right\}\right)\tag{۱۲}$$

که در آن $\sigma^{pi}=\left\{\sigma_{11}^{pi},\sigma_{22}^{pi},\sigma_{12}^{pi}\right\}^T$، $\sigma^{\infty i}=\left\{\sigma_{11}^{\infty i},\sigma_{22}^{\infty i},\sigma_{12}^{\infty i}\right\}^T$ و $p_{fj}=\left\{0,p_{fj},0\right\}^T$ می باشد و تانسورهای سازگاری تقریب از درجه اول و دوم از ماتریس زیر پیروی می کند:

$$\begin{aligned}
\left[\gamma_{ij}\right]&=\frac{1}{2}\left(\frac{\ell_j}{d_{ij}}\right)^2\begin{Bmatrix}0&a_1&a_4\\0&a_2&a_5\\0&a_3&a_6\end{Bmatrix}\\
\left[\varpi_{ij}\right]&=\frac{3}{8}\left(\frac{\ell_j}{d_{ij}}\right)^4\begin{Bmatrix}0&b_1&b_4\\0&b_2&b_5\\0&b_3&b_6\end{Bmatrix}
\end{aligned}\tag{۱۳}$$

که در آن a_i و $b_i,\left\{i=1,2,\ldots,6\right\}$ از رابطه زیر تعیین می شوند:

$$\begin{aligned}
a_1&=\cos 2\phi_{ij}+\cos 2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)-\cos 2\left(\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\\
a_2&=\cos 2\phi_{ij}-\cos 2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)+\cos 2\left(\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\\
a_3&=\sin 2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)-\sin\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\\
a_4&=\sin 2\phi_{ij}+\sin 2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\\
a_5&=\sin 2\phi_{ij}-\sin 2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)\\
a_6&=-\cos 2\left(2\phi_{ij}-\theta_{ij}\right)
\end{aligned}\tag{۱۴}$$



شکل ۶. نمودار ضرایب اندرکنش ترکها بر حسب زاویه نسبی بین آنها ϕ_{ij} و با فرض $\theta_{ij} = \pi/2$.

Fig. 6. Dependence of interaction effects on relative angle ϕ_{ij} assuming $\theta_{ij} = \pi/2$.

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \cos 4\phi_{ij} + 2\cos\left(2\left(3\phi_{ij} - \theta_{ij}\right)\right) - 2\cos\left(2\left(2\phi_{ij} - \theta_{ij}\right)\right) \\
b_2 &= \cos 4\phi_{ij} - 2\cos\left(2\left(3\phi_{ij} - \theta_{ij}\right)\right) + 2\cos\left(2\left(2\phi_{ij} - \theta_{ij}\right)\right) \\
b_3 &= 2\sin\left(2\left(3\phi_{ij} - \theta_{ij}\right)\right) - 2\sin\left(2\left(2\phi_{ij} - \theta_{ij}\right)\right) \\
b_4 &= \sin 4\phi_{ij} + 2\sin\left(2\left(3\phi_{ij} - \theta_{ij}\right)\right) - \sin\left(2\left(2\phi_{ij} - \theta_{ij}\right)\right) \\
b_5 &= \sin 4\phi_{ij} - 2\sin\left(2\left(3\phi_{ij} - \theta_{ij}\right)\right) + \sin\left(2\left(2\phi_{ij} - \theta_{ij}\right)\right) \\
b_6 &= -2\cos\left(2\left(3\phi_{ij} - \theta_{ij}\right)\right) + \cos\left(2\left(2\phi_{ij} - \theta_{ij}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{۱۵}
$$

مقادیر ضرایب روابط ۱۴ و ۱۵ در مختصات قطبی برای مقادیر مشخصی از θ_{ij} در شکل ۶ ترسیم شده‌است. این ضرایب، درایه های تانسور سازگاری هستند که میزان تاثیر تنش های محیطی و فشار هیدرولیکی را در برآورد تنش های کششی کاذب بیان می کند.

۳-۲- رابطه اندرکنش بین دو ترک هیدرولیکی موازی

اگر دو ترک هیدرولیکی i و j در یک سیستم مطابق شکل ۴ بدون هیچ اختلاف زاویه ای و موازی از هم قرار گرفته باشند ($\phi_{ij} = \pi/2,\ \theta_{ij} = 0, d_{ij} = h$)، آنگاه تانسورهای سازگاری از رابطه‌ی ۱۳ به صورت در می آید:

$$
\left[\gamma_{ij}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{h}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \left[\varpi_{ij}\right] = \frac{3}{8}\left(\frac{\ell}{h}\right)^4 \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{۱۶}
$$

که در آن h فاصله بین دو ترک هیدرولیکی است. اگر از اثرات تنش های فشاری σ_{11}^{∞} و σ_{12}^{∞} صرف نظر گردد، آن‌گاه تنش های

کششی کاذب به کمک رابطه ی ۱۱ به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}^{pi}\\ \sigma_{22}^{pi}\\ \sigma_{12}^{pi}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{h}\right)^2-\frac{9}{8}\left(\frac{\ell}{h}\right)^4 & 0\\ 0 & -\frac{3}{2}\left(\frac{\ell}{h}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{\ell}{h}\right)^4 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{h}\right)^2+\frac{9}{8}\left(\frac{\ell}{h}\right)^4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{11}^{\infty j}+\sigma_{11}^{pj}\\ \sigma_{22}^{\infty j}+\sigma_{22}^{pj}-p_{fj}\\ \sigma_{12}^{\infty j}+\sigma_{12}^{pj}\end{Bmatrix} \quad (۱۷)$$

$$\sigma_{22}^{pi}=\left(-\frac{3}{2}\left(\frac{\ell}{h}\right)^2+\frac{15}{8}\left(\frac{\ell}{h}\right)^4\right)\left\{\sigma_{22}^{\infty j}+\sigma_{22}^{pj}-p_{fj}\right\}$$

با فرض این‌که $\sigma_{22}^{pi}=\sigma_I^{pi}$ و $\sigma_{22}^{pj}=\sigma_I^{pj}$ باشد رابطه ی (۱۷) به صورت زیر ساده می شود:

$$\sigma_{22}^{pi}=\sigma_I^{pi}=\left(-\frac{3}{2\xi^2}+\frac{15}{8\xi^4}\right)\left(\sigma_0-p_{fj}+\sigma_I^{pj}\right)$$
$$\sigma_{22}^{\infty j}=\sigma_0,\quad \sigma_I^{pj}=\sigma_{22}^{pj},\quad \xi=\frac{h}{\ell} \quad (۱۸)$$

با توجه به این‌که طول نیم ترک ها و دیگر مشخصات آنها یکسان فرض شده‌است در نتیجه $\sigma_I^{pi}=\sigma_I^{pj}$است؛ یعنی این‌که اثری که ترک i بر روی ترک j می گذارد با اثر ترک j بر روی ترک i یکسان است. بنابراین رابطه‌ی ۱۸ به صورت زیر ساده می شود:

$$\sigma_I^{pi}=\frac{3p_0\left(4\xi^2-5\right)}{-15+12\xi^2+8\xi^4}+\mathrm{O}\left(\xi^{-6}\right),$$
$$p_0=p_{f\beta}-\sigma_0,\quad \xi=\frac{h}{\ell} \quad (۱۹)$$

رابطه ی ۱۹ یک رابطه ی تقریبی برای تعیین اندرکنش با تقریب $\mathrm{O}\left(\xi^{-6}\right)$است که اثر ترم $\left(\gamma_{ij}+\varpi_{ij}\right)\sigma_I^{pj}$ (تنش کاهنده ناشی از تنش اندرکنش) نیز درنظر گرفته شد. برای تعیین رابطه دقیق اندرکنش با درنظرگرفتن اثر تنش کاهنده، کدی تحت نرم افزار Mathematica version 9.0.0 نوشته شده‌است. این رابطه به صورت زیر است:

$$\frac{\sigma_I^{pi}}{p_0}=\left\{1-\frac{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}{-\xi^3+2\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}=1-\frac{1}{2-\frac{\xi^3}{\left(1+\xi^2\right)^{3/2}}}=$$
$$\frac{3}{2\xi^2}-\frac{33}{8\xi^4}+\frac{179}{16\xi^6}-\frac{3873}{128\xi^8}+\mathrm{O}\left(\xi^{-10}\right) \quad (۲۰\text{-الف})$$

در حالت خاص اگر اثر ترم $\left(\gamma_{ij}+\varpi_{ij}\right)\sigma_I^{pj}$ (تنش کاهنده ناشی از تنش اندرکنش)، برای محاسبه ترم اندرکنشی، σ_I^{pi}، در رابطه ی ۱۲ نادیده فرض شود، در این صورت رابطه ی ۲۰-الف به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\sigma_I^{pi}}{p_0}=\left\{1-\frac{\xi^3}{\left(1+\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}=\frac{3}{2\xi^2}-\frac{15}{8\xi^4}+$$
$$\frac{35}{16\xi^6}-\frac{315}{128\xi^8}+\mathrm{O}\left(\xi^{-10}\right),\qquad \xi\gg 1 \quad (۲۰\text{-ب})$$

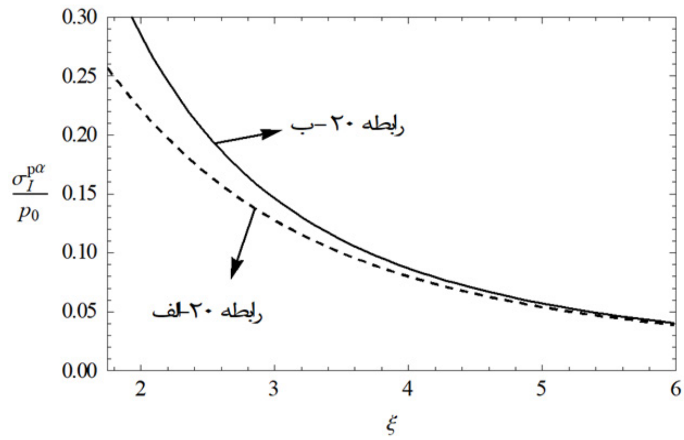
رابطه ی ۲۰-ب با یافته های مراجع [۳۱, ۳۲] نیز مطابقت دارد. شکل(۷) مقایسه ای بین تنش اندرکنش با ترم تنش کاهنده ناشی از تنش اندرکنش (رابطه‌ی ۲۰-الف) و بدون آن (رابطه‌ی (۲۰-ب) را نشان می دهد. نتایجی که از این شکل برداشت می شود اینست که اولا: با افزایش فاصله ترک ها از هم تنش اندرکنشی کاهش می یابد و اثر آن ناچیز است. ثانیا: اختلاف بین تنش های اندرکنشی از دو رابطه‌ی ۲۰- الف و ب با افزایش فاصله کاهش می یابد و مسلما برای فواصل کمتر این اثر قابل توجه است. لازم به ذکر است که رابطه‌ی ۲۰-ب تنش اندرکنش را دست بالاتر تعیین می کند.

۳-۲-۱- محاسبه تنش اندرکنش، σ_I، ناشی از چندین ترک موازی هیدرولیکی در حالت ترک دو بعدی KGD :

با فراخوانی و کمک از رابطه‌ی ۳، توابع پتانسیل $\Phi'(z)$ و $\Psi'(z)$ برای ترک دو بعدی KGD از رابطه زیر به‌دست می آید:

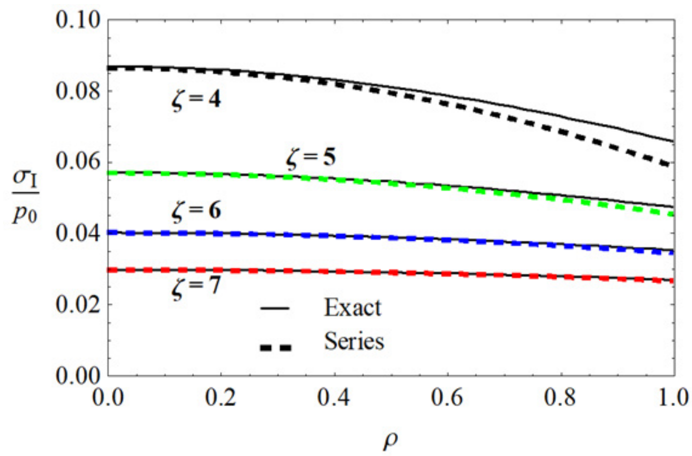
$$\Phi'(z)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{z^2-\ell^2}}\int_{-\ell}^{\ell}p_0\frac{\sqrt{\ell^2-s^2}}{s-z}ds$$
$$\Psi'(z)=\overline{\Phi'(\overline{z})}-\Phi'(z)-z\Phi''(z) \quad (۲۱)$$
$$z=x+Iy,\quad I=\sqrt{-1}$$

که ℓ طول نیم ترک است. اگر فشار p_0 بر سطوح ترک نسبت به متغیر انتگرال ثابت فرض شود آنگاه رابطه ی ۲۱ به صورت زیر ساده می شود:



شکل ۷. مقایسه‌ی ترم اندرکنش با در نظرگیری ترم $\left(\gamma_{ij}+\varpi_{ij}\right)\sigma_I^{pj}$ و بدون آن

Figure 7. Comparison the interaction term considering $\left(\gamma_{ij}+\varpi_{ij}\right)\sigma_I^{pj}$ and without it.



شکل ۸. مقایسه ی بین مقادیر رابطه ۲۴) و مقادیر دقیق محاسبه شده از رابطه ۲۳)

Fig. 8. Comparison Between exact solution of (Eq. 23) and 3 term series approximation (Eq. 24) for $\frac{\sigma_I}{p_0}$

$$\Phi'(z)=-\frac{p_0}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-\ell^2}}-1\right)=$$
$$-\frac{p_0}{2}\left(\frac{z/\ell}{\sqrt{\left(z/\ell\right)^2-1}}-1\right)=-\frac{p_0}{2}\left(\frac{\Im}{\sqrt{(\Im)^2-1}}-1\right) \tag{۲۲}$$
$$\Im=\frac{z}{\ell}=\frac{x}{\ell}+I\frac{y}{\ell}=\rho+I\zeta,\ I=\sqrt{-1}$$

با فراخوانی رابطه ی ۳ و فرض موازی بودن ترک های هیدرولیکی و رشد هم زمان، تنش اندرکنش از رابطه ی زیر تعیین می شود:

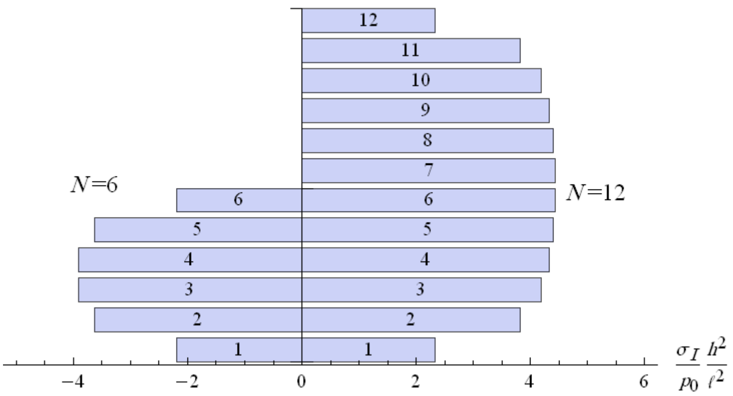
$$\sigma_{y'y'}^{A}=\sigma_I=\mathrm{Re}\left[\Phi'(z)+\overline{\Phi'(z)}+z\overline{\Phi''(z)}+\overline{\Psi'(z)}\right]$$
$$=\mathrm{Re}\left[2\Phi'(z)+\bar{z}\Phi''(z)+\Psi'(z)\right] \tag{۲۳}$$
$$\Psi'(z)=\overline{\Phi'(\bar{z})}-\Phi'(z)-z\Phi''(z),$$
$$z=x+Iy,\ x=0,\ \ y=d,\ \ I=\sqrt{-1},$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۲۲ در رابطه‌ی ۲۳ و با کمک سری مجانب شونده[1] به رابطه‌ی زیر می رسیم:

$$\frac{\sigma_I}{p_0}=\frac{3}{2\zeta^2}-\frac{15\left(\rho^2+\frac{1}{4}\right)}{2\zeta^4}+\frac{35\left(\rho^4+3\rho^2+\frac{1}{8}\right)}{2\zeta^6}+\mathrm{O}\left(\zeta^{-8}\right) \tag{۲۴}$$

رابطه‌ی ۲۴ برای مقادیر $\zeta\gg1$ دقت نسبتا قابل قبولی دارد. گفتنی است که بسط مجانبی برای مقادیر نسبتا بزرگتر از یک استفاده می گردد و برای مقادیر کوچکتر از یک از بسط تیلور استفاده می شود. مقایسه ای بین مقادیر رابطه‌ی ۲۴ و مقادیر دقیق آن (رابطه‌ی ۲۳) در شکل ۸ نشان داده شد. با توجه به ماهیت سری مجانب شونده هر چقدر ζ بزرگتر باشد، میزان خطای تنش اندرکنش نسبت به حل دقیق کمتر است. لازم به ذکر است که رابطه‌ی ۲۴ بدون اثر تنش

1 asymptotic expansion



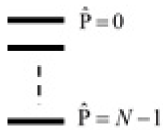
شکل ۹. میزان ضریب اندرکنش با توجه به موقعیت ترک ها برای دسته ترک های شش تایی و دوازده تایی

Fig. 9. The shadow stress ratio according to the location of the cracks for the six- and twelve-array cracks

کاهنده تاشی از اندرکنش ترک مجاور، بهدست آمده از رابطه (۱۹) است. در شرایطی که از ترم های $O\left(\zeta^{-4}\right)$ و بالاتر صرف نظر شود و $\rho=0$ باشد، روابط ۲۴ و ۱۹ یکسان می‌شوند.

آن‌چه مسلم است، مطابق با رابطه ی ۲۴، میزان تنش اندرکنش ترک های مجاور بر روی یکی از آن ها به موقعیت آن ترک و تعداد ترک های موازی وابسته است. بنابراین برای برآورد اثر اندرکنش N ترک هیدرولیکی بر روی یکی از ترک ها در موقعیت $\hat{\mathrm{P}}$ از ترک کناری، رابطه‌ی ۲۴ با تقریب درجه $O\left(\zeta^{-6}\right)$ به صورت زیر تغییر می کند:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\sigma_I}{p_0}\right)_{\hat{\mathrm{P}}}=\frac{3\ell^2}{2h^2}\left(\mathbb{H}_{\hat{\mathrm{P}}}^2+\mathbb{H}_{N-\hat{\mathrm{P}}-1}^2\right)-\\&\frac{15\ell^4}{8h^4}\left(\mathbb{H}_{\hat{\mathrm{P}}}^4+\mathbb{H}_{N-\hat{\mathrm{P}}-1}^4\right)+\mathrm{O}\left(\ell/h\right)^{-6},\\&\mathbb{H}_r^{(k)}=\sum_{m=1}^{m=r}\frac{1}{m^k},\quad \lim_{r\to\infty}\mathbb{H}_r^{(k)}=\mathbb{Z}(k),\\&\mathrm{H}_\infty^2=\mathbb{Z}(2)=\frac{\pi^2}{6},\\&\mathbb{H}_0^{(k)}=0,\ \mathbb{H}_1^{(k)}=1\end{aligned} \tag{۲۵}$$



که در آن $\mathbb{H}_r^{(k)}$ عدد هارمونیک[1] از درجه k و $\mathbb{Z}$ تابع زتای ریمان است. تنش های اندرکنشی با استفاده از رابطه‌ی ۲۵ برای تمام ترک هایی که قرار است باهم و هم زمان رشد پیدا کنند، بسته به موقعیت مکانی ترک ها محاسبه می گردد.

با یک متوسط گیری ساده می توان تنش اندرکنش متوسط، $\bar{\sigma}_I$، بر روی یک ترک جدای از موقعیت مکانی آن ترک را از رابطه‌ی زیر به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{\sigma}_I}{p_0}\approx\frac{3}{2}\left(\frac{2}{N}\right)\frac{\ell^2}{h^2}\sum_{m=1}^{N-1}\mathbb{H}_m^2-\frac{15}{8}\left(\frac{2}{N}\right)\frac{\ell^4}{h^4}\sum_{m=1}^{N-1}\mathbb{H}_m^4,\\&if\ N\to\infty\Rightarrow\frac{\bar{\sigma}_I}{p_0}\approx\frac{\pi^2\ell^2}{2h^2}-\frac{\pi^4}{24}\frac{\ell^4}{h^4}\end{aligned} \tag{۲۶}$$

رابطه‌ی فوق با یافته‌ی بنسم و همکارانش [۳۳] در حالتی که تعداد ترک ها بی نهایت فرض شود، مطابقت دارد.

شکل ۹، برای درک بهتر میزان تاثیر اندرکنش با توجه به موقعیت و تعداد ترک های موازی، به کمک رابطه‌ی ۲۵ و با خطای $\mathrm{O}\left(\ell/h\right)^{-4}$، ترسیم شده‌است. مطابق با این شکل، ترک های میانی بیشتر از ترک های کناری تحت تاثیر اندرکنش قرار می گیرند. از طرفی با افزایش تعداد ترک ها، میزان اندرکنش برای ترک های میانی افزایش یافته است ولی این افزایش چندان چشمگیر نیست. با توجه به توضیحات فوق، مسلما اگر به دسته ترک های موازی سیالی با دبی یکسان تزریق شود، ترک های میانی رشد کمتری به دلیل وجود تنش‌های فشاری ناشی از اندرکنش خواهند داشت. این رشد ناهمسان باعث تغییر مجدد در برآورد اثر اندرکنش خواهد گذاشت که به دلیل اختلاف در طول های دسته ترک، رابطه ی ۲۵ بلااستفاده است. البته برای این‌که ترک ها رشد یکسانی داشته باشند و یا به عبارت دیگر، تنش اندرکنش یکسانی داشته باشند می توان فواصل بین ترک های میانی را نسبت به فواصل ترک های کناری افزایش داد. این دستاورد

1 Harmonic Number

می تواند در انتخاب تعداد سوراخ اولیه[1] و فواصل بین ترک ها در فرآیند شکست هیدرولیکی بسیار کمک‌کننده باشد.

مطابق با رابطه ی سندون و تادا و همکارانش [۱۴, ۲۵]، فشار سیال بر روی سطوح ترک به راحتی از رابطه‌ی زیر قابل تعیین است:

$$p_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{E'Q_0 t}{\ell^2} \tag{۲۷}$$

با تعیین میزان اندرکنش بین دسته ترک ها با توجه به تعداد و موقعیت آن ها در محیط الاستیک، می توان نرخ کار انجام شده ناشی از اثر اندرکنش را برای ترک هیدرولیکی به‌دست آورد:

$$W_I' = -2\int_0^{\ell} \sigma_I \frac{\partial w}{\partial t} dx, \tag{۲۸}$$

که در آن w بازشدگی ترک و σ_I و $\bar{\sigma}_I$ به ترتیب تنش اندرکنش ناشی از ترک های هیدرولیکی مجاور و متوسط است که مطابق رابطه‌ی زیر تعیین می شود:

$$\sigma_I = \frac{3}{4\pi}\frac{E'Q_0 t}{h^2}\mathrm{H}_{N-1}^2 + \mathrm{O}\left(\ell/h\right)^{-4}, \qquad \bar{\sigma}_I \approx \frac{3}{2\pi}\frac{E'Q_0 t}{Nh^2}\sum_{m=1}^{N-1}\mathrm{H}_m^2, \tag{۲۹}$$

با استفاده از رابطه ی نرخ انرژی می توان، توان مورد نیاز پمپ برای ایجاد شکست و رشد دادن ترک ها تخمین زد. هنگامی که ترک های هیدرولیکی بطور هم زمان رشد می کنند باعث افزایش در تنش فشاری ناشی از اندرکنش بین ترک های همسایه می شود؛ در نتیجه توان یا قدرت پمپ بالاتری جهت تامین فشار سیال ورودی و به تبع آن برای گسترش ترک نیاز است.

۴- نتیجه گیری

در این پژوهش، روش کشش کاذب برای تعیین میزان اندرکنش بین ترک های هیدرولیکی مورب ارائه شد و برای دسته ترک ها با توجه به تعداد و موقعیت ترک ها در محیط الاستیک گسترش داده شد. پژوهش حاضر نشان می دهد که با افزایش تعداد ترک ها، میزان اندرکنش برای ترک های میانی افزایش یافته است ولی این افزایش برای دسته های بزرگی از ترک ها چندان چشمگیر نیست. ترک های میانی تحت اثرات بیشتری از تنش های اندرکنش (از نوع تنش فشاری) قرار می گیرد که منجر به رشد کمتر ترک ها خواهد شد. از طرفی ترک های کناری رشد بیشتری خواهند داشت. اگر فواصل ترک میانی نسبت به هم زیادتر و ترک های کناری نسبت به هم کمتر شود آنگاه ممکن است منجر به رشد هم زمان ترک های میانی و کناری شود. نتایج این پژوهش می تواند در تعیین تعداد سوراخ اولیه و فواصل بین ترک ها در صنعت شکست هیدرولیکی بسیار موثر باشد.

برای ادامه پژوهش، می توان اثرات هندسه ترک ها و نوع رژیم (سختی یا گرانروی) را در برآورد تنش اندرکنش بین ترک ها بررسی کرد.

۵- تقدیر و تشکر

نویسندگان از راهنمایی های ارزنده پروفسور اندرو بونگر(Andrew Bunger) از دانشگاه Pittsburg آمریکا برای واضح تر شدن روند این پژوهش سپاسگزارند.

مراجع

[1] A. Bunger, Analysis of the power input needed to propagate multiple hydraulic fractures, International Journal of Solids and Structures, 50(10) (2013) 1538-1549.

[2] A. Bunger, R.G. Jeffrey, X. Zhang, Constraints on simultaneous growth of hydraulic fractures from multiple perforation clusters in horizontal wells, SPE Journal, 19(04) (2014, a) 608-620.

[3] A.P. Bunger, A.P. Peirce, Numerical Simulation of Simultaneous Growth of Multiple Interacting Hydraulic Fractures from Horizontal Wells, in: Shale Energy Engineering -Technical Challenges, Environmental Issues, and Public Policy, ASCE, 2014, b, pp. 201-210.

[4] L.N. Germanovich, L.M. Ring, D.K. Astakhov, J. Shlyapobersky, M.J. Mayerhofer, Hydraulic fracture with multiple segments II. Modeling, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 34(3) (1997) 98. e91-98. e15.

1 Perforation

260.

[15] A.P. Bunger, T. Menand, A. Cruden, X. Zhang, H. Halls, Analytical predictions for a natural spacing within dyke swarms, Earth and Planetary Science Letters, 375 (2013) 270-279.

[16] M. Fisher, J. Heinze, C. Harris, B. Davidson, C. Wright, K. Dunn, Optimizing horizontal completion techniques in the Barnett shale using microseismic fracture mapping, in: SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Society of Petroleum Engineers, 2004.

[17] B.R. Meyer, L.W. Bazan, A discrete fracture network model for hydraulically induced fractures-theory, parametric and case studies, in: SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference, Society of Petroleum Engineers, 2011.

[18] H.H. Abass, M.Y. Soliman, A.M. Al-Tahini, J.B. Surjaatmadja, D.L. Meadows, L. Sierra, Oriented fracturing: A new technique to hydraulically fracture an openhole horizontal well, in: SPE Annual Technical Conference and Exhibition, Society of Petroleum Engineers, 2009.

[19] H. Horii, S. Nemat-Nasser, Elastic fields of interacting inhomogeneities, International journal of solids and structures, 21(7) (1985) 731-745.

[20] H. Horii, S. Nemat-Nasser, Compression-induced microcrack growth in brittle solids: axial splitting and shear failure, Journal of Geophysical Research, 90(B4) (1985) 3105-3125.

[21] S. Nemat-Nasser, M. Hori, Toughening by partial or full bridging of cracks in ceramics and fiber reinforced composites, Mechanics of materials, 6(3) (1987) 245-269.

[22] N.I. Muskhelishvili, J. Radok, Some basic problems of the mathematical theory of elasticity, Cambridge Univ Press, 1953.

[23] A.T. Zehnder, Fracture Mechanics, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer Netherlands: 62, Pages XIV, 226, 2012.

[24] A. Asgari, Hydraulic Fracture Propagation in Brittle Rock: Based on Hydro-Mechanical Model, Tarbait Modares University, Tehran, 2016.

[25] H. Tada, P. Paris, G. Irwin, The analysis of cracks

[5] B. Lecampion, J. Desroches, Simultaneous initiation and growth of multiple radial hydraulic fractures from a horizontal wellbore, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, (2015).

[6] V.M. Narendran, Analysis of growth and interaction of multiple hydraulic fractures, in: SPE Reservoir Simulation Symposium, Society of Petroleum Engineers, 1983.

[7] A. Peirce, A. Bunger, Interference Fracturing: Nonuniform Distributions of Perforation Clusters That Promote Simultaneous Growth of Multiple Hydraulic Fractures, SPE Journal, 20(02) (2015) 384-395.

[8] K. Yamamoto, T. Shimamoto, S. Sukemura, Multiple fracture propagation model for a three-dimensional hydraulic fracturing simulator, International Journal of Geomechanics, 4(1) (2004) 46-57.

[9] A. Zerzar, Y. Bettam, Interpretation of multiple hydraulically fractured horizontal wells in closed systems, in: Canadian International Petroleum Conference, Petroleum Society of Canada, 2004.

[10] G.A. Waters, B.K. Dean, R.C. Downie, K.J. Kerrihard, L. Austbo, B. McPherson, Simultaneous hydraulic fracturing of adjacent horizontal wells in the Woodford Shale, in: SPE hydraulic fracturing technology conference, Society of Petroleum Engineers, 2009.

[11] C. Cheng, A.P. Bunger, Reduced order model for simultaneous growth of multiple closely-spaced radial hydraulic fractures, Journal of Computational Physics, 376 (2019) 228-248.

[12] C. Cheng, A.P. Bunger, Optimizing fluid viscosity for systems of multiple hydraulic fractures, AIChE Journal, 65(5) (2019).

[13] G. Lu, E. Gordeliy, R. Prioul, G. Aidagulov, A. Bunger, Modeling simultaneous initiation and propagation of multiple hydraulic fractures under subcritical conditions, Computers and Geotechnics, 104 (2018) 196-206.

[14] I. Sneddon, The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid, in: Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, The Royal Society, 1946, pp. 229-

handbook, New York: ASME Press, 2000.

[26] R. Hoagland, J. Embury, A treatment of inelastic deformation around a crack tip due to microcracking, Journal of the American Ceramic Society, 63(7) (1980) 404-410.

[27] A. Chudnovsky, M. Kachanov, Interaction of a crack with a field of microcracks, International Journal of Engineering Science, 21(8) (1983) 1009-1018.

[28] L. Rose, Microcrack interaction with a main crack, International journal of fracture, 31(3) (1986) 233-242.

[29] A. Golshani, Y. Okui, M. Oda, T. Takemura, A micromechanical model for brittle failure of rock and its relation to crack growth observed in triaxial compression tests of granite, Mechanics of materials, 38(4) (2006) 287-303

[30] A. Golshani, T. Tran-Cong, Energy analysis of hydraulic fracturing, KSCE Journal of Civil Engineering, 13(4) (2009) 219-224.

[31] J.E. Olson, Predicting fracture swarms—The influence of subcritical crack growth and the crack-tip process zone on joint spacing in rock, Geological Society, London, Special Publications, 231(1) (2004) 73-88

[32] K. Wu, J.E. Olson, Simultaneous multifracture treatments: fully coupled fluid flow and fracture mechanics for horizontal wells, SPE journal, 20(02) (2015) 337-346.

[33] J. Benthem, W. Koiter, Asymptotic approximations to crack problems, in: Methods of analysis and solutions of crack problems, Springer, 1973, pp. 131-178.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Asgari, A.A. Golshani, Evaluation of Shadow Stress between Hydraulic Fractures, Amirkabir J. Civil Eng., 53(2) (2021) 707-722.

DOI: 10.22060/ceej.2020.16566.6277