



## Using the Time-Weighted Residual Method in Forced Vibration Analysis of Timoshenko Beam under Moving Load

A. Borji, B. Movahedian Attar\*, B. Boroomand

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Iran

**ABSTRACT:** In this study, formulation of a recently proposed time-weighted residual method has been developed for the vibration analysis of Timoshenko beams under moving loads. Employing pre-integration relations as well as equilibrium equations is the main idea of this method. In the first step of the proposed method, the time interval is subdivided into a number of sub-intervals and then the acceleration field in each time step is defined as the combination of an unknown function and a series of exponential basis functions with constant coefficients. Finally, the solution of the problem is computed by the time-weighted residual method along with exact satisfaction of the initial and the boundary conditions at the two ends of the beam. Storing the information of solution at each time step on the exponential coefficients is the most important advantage of this method so that the solution is progressed in time without the need to discretize beams and only by using an appropriate recursive relation to update the exponential coefficients. In order to investigate the accuracy and efficiency of the proposed method, the results of solving three sample problems of constant and accelerated moving load on the beams with different boundary conditions, are compared with the results of the finite element method. This comparison illustrates the speed and accuracy of the proposed method in estimating the internal shear forces and bending moments rather than those obtained by the finite element method.

### Review History:

Received: Aug. 03, 2019

Revised: Sep. 26, 2019

Accepted: Sep. 26, 2019

Available Online: Oct. 06, 2019

### Keywords:

Timoshenko Beam

Moving load

Time Weighted Residual Method

Pre-Integration Relations

### 1. Introduction

The vibration analysis of the beams under the effect of moving loads is one of the most important study areas in the dynamic of structures. Problems such as the behavior of bridges, railways, roads, fluid transmission pipes are among these issues. Most of the researches in this field has been done based on the assumption of Euler-Bernoulli beam theory and by neglecting the effects of shear deformation and rotational inertia of the beam section. A set of analytical and semi-analytical responses for single-span and multi-span Bernoulli beams under moving load is present in [2]. The simplifying assumptions used in the estimation of analytical solutions in moving load problems have been the main reason for using and developing various numerical methods such as finite difference method, finite element method, spectral finite element method, and meshless methods.

In this paper, the idea used in [1] to solve the governing differential equation of the vibration of Timoshenko beams under moving load is developed. This method was first proposed in 2019 to solve two and three-dimensional scalar wave propagation problems and its main idea is to use pre-integration relations along with equilibrium equations. In this method, the initial conditions are fully satisfied while the equilibrium equation is satisfied through a time-weighted

residual approach. The boundary conditions are also satisfied at both ends of the beam and the end of each step.

### 2. Methodology

The general form of the differential equation governing the vibration of the Timoshenko beam is exposed to the form of the differential equation (1) under the desired load effect.

$$\begin{cases} \kappa GA \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \kappa GA \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x, t) \\ EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \kappa GA \frac{\partial w}{\partial x} - \kappa GA \varphi = \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1)$$

In the above equations,  $w(x,t)$  is the transverse displacement, while  $\varphi(x,t)$  is the angle of rotation,  $q(x,t)$  is an arbitrary external load, Young's modulus  $E$ , shear modulus  $G$ , mass density  $\rho$ , cross-sectional area  $A$ , the moment of inertia  $I$  and the shear coefficient .

As the first step of the proposed method, the time domain is divided into some time steps. Moreover, the acceleration field in each time step is defined as the combination of an unknown function and a series of exponential basis functions with constant coefficients as follow

\*Corresponding author's email: b.movahedian@cc.iut.ac.ir



$$\dot{w}_n(x, \tau) = f_n(x) + \sum_{j=1}^2 C_{n,j} \times \left\{ \sum_{i=1}^M (h_{j,i} \times e^{\alpha_i x + \beta_{B,i} \tau}) + h_{j,0} \times \tau \right\} \quad (2)$$

$$\ddot{\varphi}_n(x, \tau) = g_n(x) + \sum_{j=1}^2 \bar{C}_{n,j} \times \left\{ \sum_{i=1}^M (l_{j,i} \times e^{\alpha_i x + \beta_{S,i} \tau}) + l_{j,0} \times \tau \right\} \quad (3)$$

In the next step, by satisfying the time-weighted equation of the governing equilibrium equation, the unknown function of the acceleration field is obtained. Then the constant coefficients of the acceleration field are determined by making use of the concept of source function. Finally using the pre-integration relations, a set of recurrence relations will be obtained to advance the numerical solution of velocity and displacement in time.

### 3. Results and Discussion

In this part, the accuracy and efficiency of TWRM solutions are investigated through a comparison between

results obtained from FEM and analytical solution in [3]. The simply-supported uniform beam is traversed by  $q=147$  N from the left to right at speed  $v=6$  m/s. Young's modulus of the beam material is taken to be  $E=206$ GPa, shear modulus  $G=79$ GPa, and the mass density  $\rho=7850$  kg/m<sup>3</sup>. Assume that the length of the beam is  $L=2$ m, the width of the cross-section is  $b=0.1$  m and the depth is  $h=0.025$ m.

The parameters used in a time-weighted residual method to solve this example include the time step, the exponential base number of source function, and the number of exponential bases of loading, are  $\Delta t = 1.6 \times 10^{-6}$  s,  $M = 25$ ,  $M' = 25$  respectively. To the velocity of the load and the length of the beam, the duration of the load is 0.33 sec.

Fig. 1 and Fig. 2 shows deflection at  $x=0.5L$  and flexural strain at  $x=0.25L$ , respectively.

According to the results shown in Fig. 1 and Fig. 2, it can be said that the accuracy of the proposed method is better than the finite element method. Increasing the accuracy of the finite element method in calculating internal forces, requires an increase in the number of elements and as a result increasing the degrees of freedom of solution. While in the proposed method without the need for the discretization of amplitude and with minimum degrees of freedom, the forceful and displaced variation responses of the beam are calculated.

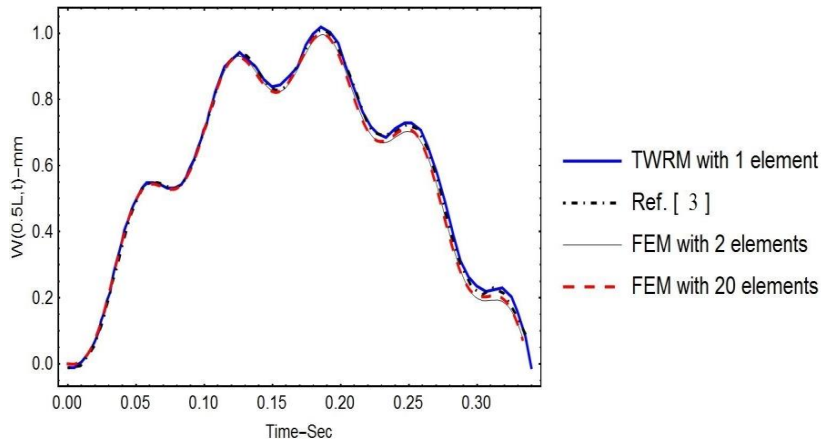


Fig. 1. Deflection at  $x=0.5L$

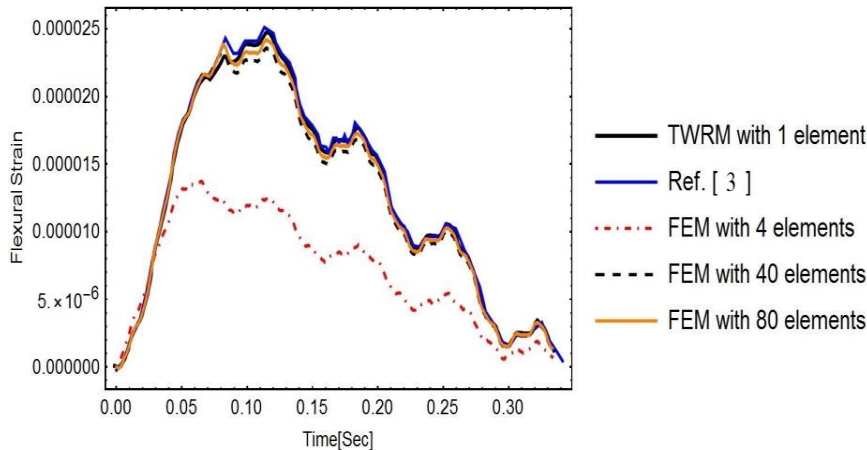


Fig. 2. Flexural Strain at  $x=0.25L$

#### 4. Conclusions

In this paper, the formulation of the time-weighted residual method is developed to solve the problem of the Timoshenko beam under constant and variable pace moving load. This new method makes it easy to simulate moving loads due to the independence of disassembling the beam. Therefore, the common problems of tracking the load in different member elements in existing numerical methods such as finite element have been eliminated. Another advantage of the time-weighted residual method in solving the Timoshenko beam vibration equation under moving load is the information storage of acceleration, velocity, and displacement of each time step on the exponential basis coefficients so that getting progress in solving the problem can only be possible by updating these coefficients. Moreover, the use of exponential bases with unlimited continuity order as a solution provides the accuracy of calculating the shear force and bending moment variations of the beam without increasing the degrees of freedom.

#### References

- [1] B. Movahedian, B. Boroomand, S. Mansouri, A robust time-space formulation for large-scale scalar wave problems using exponential basis functions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 114(7) (2018) 719-748.
- [2] J L. Frýba, *Vibration of solids and structures under moving loads*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] J.Q. Jiang, W.-Q. Chen, Y.-H. Pao, Reverberation-ray analysis of continuous Timoshenko beams subject to moving loads, *Journal of Vibration and Control*, 18(6) (2012) 774-784.
- [4] V. Sarvestan, H.R. Mirdamadi, M. Ghayour, Vibration analysis of cracked Timoshenko beam under moving load with constant velocity and acceleration by spectral finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences*, 122 (2017) 318-330.
- [5] P. Lou, G.-l. Dai, Q.-y. Zeng, Dynamic analysis of a Timoshenko beam subjected to moving concentrated forces using the finite element method, *Shock and Vibration*, 14(6) (2007) 459-468.

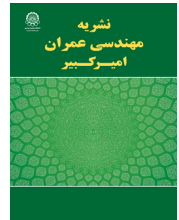
#### HOW TO CITE THIS ARTICLE:

A. Borji, B. Movahedian Attar, B. Boroomand, *Using the Time-Weighted Residual Method in Forced Vibration Analysis of Timoshenko Beam under Moving Load*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 53(4) (2021): 305-308.

DOI: [10.22060/ceej.2019.16867.6381](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.16867.6381)







## استفاده از روش باقیمانده وزنی زمانی در حل ارتعاش اجباری تیر تیموشنکو تحت اثر بار متحرک

امین برجی، بیژن برومند، بشیر موحدیان عطار\*

دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۵/۱۲

بازنگری: ۱۳۹۸/۰۷/۰۴

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۷

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۷/۱۴

### کلمات کلیدی:

تیر تیموشنکو

بار متحرک

روش باقیمانده وزنی زمانی

روابط پیش انتگرال گیری

**خلاصه:** در این مقاله، فرمول بندی یک روش باقیمانده وزنی زمانی برای تحلیل ارتعاش تیر تیموشنکو تحت اثر بار متحرک توسعه داده شده است. ایده اصلی این روش که اولین بار در مرجع [۱] برای حل مسأله انتشار موج اسکالر معرفی گردید، استفاده از روابط پیش انتگرال گیری در کنار معادلات تعادل است. در گام نخست روش پیشنهادی، بازه‌ی زمانی به تعدادی زیر بازه افراز می‌گردد. سپس میدان شتاب در هر زیر بازه به صورت ترکیب یک تابع مجهول و یک سری نمایی با ضرایب ثابت تعریف می‌شود. در نهایت پاسخ مسأله با روش باقیمانده وزنی زمانی همراه با ارضاء دقیق شرایط اولیه و شرایط مرزی در دو انتهای تیر برآورد می‌شود. مهم‌ترین امتیاز این روش، ذخیره‌سازی اطلاعات هر گام زمانی بر روی ضرایب پایه‌های نمایی است، به گونه‌ای که پیشروی حل در زمان بدون نیاز به گسسته‌سازی تیر و تنها با استفاده از یک رابطه بازگشتی مناسب برای اصلاح ضرایب پایه‌های نمایی انجام می‌شود. به منظور بررسی دقت و کارایی روش پیشنهادی، نتایج حاصل در حل چهار مثال نمونه از مسأله بار متحرک سرعت ثابت و شتابدار بر روی تیر با شرایط مرزی متفاوت، با نتایج روش اجزا محدود مقایسه شده است. این مقایسه بیانگر سرعت و دقت بیشتر روش پیشنهادی در برآورد نیروهای داخلی برشی و لنگر خمشی تیر نسبت به روش المان محدود است.

### ۱- مقدمه

نمیه تحلیلی برای انواع تیرهای برنولی تک دهانه و چند دهانه تحت اثر بار متحرک ارائه شده است. فرضیات ساده کننده مورد استفاده در برآورد حل‌های تحلیلی، دلیل اصلی برای استفاده و توسعه روش‌های عددی متنوع نظیر تفاضل محدود<sup>۱</sup>، روش اجزا محدود<sup>۲</sup>، روش المان محدود طیفی<sup>۳</sup> و روش‌های بدون شبکه<sup>۴</sup> برای حل مسائل بار متحرک شده است.

از سال ۱۹۶۵ میلادی، نخستین مطالعات به منظور تحلیل تیر

مسئله‌ی ارتعاش جانبی تیرها تحت اثر بارهای متحرک، از موضوعات قابل توجه در دینامیک سازه‌ها محسوب می‌شود. این مسئله کاربردهای گسترده‌ای در حوزه‌های مهندسی عمران، مکانیک و صنایع هوافضا دارد. مسائلی از قبیل رفتار پل‌ها، راه‌آهن‌ها، جاده‌ها، لوله‌های انتقال سیال و... از این دسته مسائل هستند. بیشتر تحقیقات صورت گرفته در این زمینه بر مبنای برقراری فرض تئوری تیر برنولی و با صرف نظر کردن از اثرات تغییر شکل‌های برشی و اینرسی چرخشی تیر، انجام شده است. در مرجع [۲]، مجموعه‌ای از پاسخ‌های تحلیلی و

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: b.movahedian@cc.iut.ac.ir

- 1 Finite Difference Method
- 2 Finite Element Method
- 3 Spectral Finite Element Method
- 4 Meshless Methods

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمائید.



حل معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش تیر تیموشنکو تحت اثر بار متحرک، توسعه داده شده است. این روش، نخستین بار در سال ۲۰۱۹ برای حل مسائل انتشار موج اسکالر دو و سه بعدی پیشنهاد شده و ایده اصلی آن، استفاده از روابط پیش انتگرال گیری در کنار معادلات تعادل است. در این روش شرایط اولیه به صورت دقیق و معادله تعادل با استفاده از روش باقی مانده وزنی زمانی ارضاء می شود. شرایط مرزی نیز در دو انتهای تیر و در انتهای هر گام زمانی ارضاء می شوند. در روش پیشنهادی، ابتدا بازه زمانی مسئله به تعدادی زیر بازه افراز می شود. پس از آن میدان شتاب به صورت ترکیب یک تابع مجهول و یک سری نمایی با ضرایب ثابت تعریف می شود. برآورد تابع مجهول در میدان شتاب و در نهایت استخراج روابط بازگشتی اصلاح ضرایب سری پاسخ برای پیشروی حل در زمان به تفصیل در بخش سوم مقاله توضیح داده شده است. در بخش چهارم نیز کارایی و دقت روش پیشنهادی در حل چند مثال عددی متنوع شامل تیر با شرایط تکیه گاهی مختلف و همچنین در مقابل دو حالت بار متحرک با سرعت ثابت و شتابدار بررسی شده است. مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج از حاصل از روش اجزا محدود بیانگر سرعت و دقت مناسب روش پیشنهادی به ویژه در برآورد نیروهای داخلی تیر نظیر لنگر خمشی و نیروی برشی است.

## ۲- بیان مسئله

فرم کلی معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش تیر تیموشنکو با در نظر گرفتن تغییر شکل های برشی و اینرسی چرخشی، تحت اثر بار دلخواه  $q(x, t)$ ، در دستگاه معادله دیفرانسیل ۱ بیان شده است.

$$\begin{cases} \kappa GA \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \kappa GA \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q(x, t) \\ EI \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \kappa GA \frac{\partial w}{\partial x} - \kappa GA \varphi = \rho I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \end{cases} \quad (1)$$

در معادله ۱،  $w(x, t)$  و  $\varphi(x, t)$  به ترتیب بیانگر جابه جایی قائم محور خنثی تیر و دوران مقطع تیر بر حسب متغیر مکانی و زمانی،  $x$  و  $t$ ، هستند. همچنین  $A$  سطح مقطع تیر،  $\rho$  جرم واحد حجم،  $E$  مدول الاستیسیته،  $G$  مدول برشی و  $I$  نیز معرف گشتاور دوم سطح است. پارامتر  $\kappa$  نیز در واقع ضریب برش سطح

تحت اثر بار متحرک بر مبنای تئوری تیر تیموشنکو آغاز شد [۳-۴]. پس از آن، در مجموعه ای از تحقیقات با استفاده از روش مودال، پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو دو سر ساده و چند دهانه تحت اثر بار متحرک با سرعت ثابت، برآورد گردید [۵-۹]. از دیگر پژوهش های مرتبط با موضوع مورد نظر در این مقاله، تعیین پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو نامحدود متکی بر روی بستر ویسکوالاستیک توسط کارگرنوبین و یونسیان است. [۱۰] ایشان با استفاده از روش تبدیل فوریه مختلط و انتگرال کانولوشن پاسخ دینامیکی تیر تحت اثر بار متحرک هارمونیک را به دست آوردند. شفیععی و خاجی [۱۱] نیز با ارائه یک حل تحلیلی به ارزیابی پاسخ ارتعاش اجباری تیرهای تیموشنکو یکنواخت در حضور تعداد دلخواه ترک، که به علت عبور بار متحرک ایجاد شده بودند، پرداختند. همچنین ژیانگ و همکاران [۱۲] با استفاده از روش  $MRRM$  به بررسی پاسخ تیر نامیرای تیموشنکو در حضور جرم متحرک پرداختند. ایشان به این نتیجه رسیدند که اگرچه مقادیر تغییر شکل با این روش مقدار کمی بزرگ تر از نتایج آزمایشگاهی است ولی از دقت کافی برای مقاصد طراحی برخوردار است. لان دیانگ و همکاران [۱۳] نیز، اثرات نیروی محوری و میرایی سازه روی انتشار موج در تیر تیموشنکو متکی بر بستر الاستیک، تحت اثر بار متحرک را بررسی کردند.

دو نمونه از مطالعات تحلیل دینامیکی تیر تیموشنکو تحت اثر بار متحرک به روش اجزا محدود در مراجع [۱۴، ۱۵] ارائه شده است. نتایج حاصل بیانگر کاهش خطای زیاد تئوری برنولی در برآورد پاسخ دینامیکی تیرهای ضخیم، با در نظر گرفتن اثرات اینرسی چرخشی و تغییر شکل برشی است. سروستان و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۷ با استفاده از روش اجزا محدود طیفی، ارتعاش تیرهای بدون ترک و ترک دار تیموشنکو با شرایط مرزی دو سر مفصل و دو سر گیردار، تحت اثر بار متحرک در دو حالت حرکت با سرعت ثابت و حرکت شتابدار را بررسی کردند. از دیگر تحقیقات انجام شده در ارتباط با تحلیل تیرهای ترک دار تحت بارگذاری متحرک، می توان به [۱۷، ۱۸] اشاره کرد. ژانگ و همکاران [۱۹] با استفاده از یک روش حل اساسی و مقایسه نتایج این روش با روش های عددی اجزا محدود، پاسخ تیر میرای تیموشنکو در حضور بار ضربه و بار متحرک را ارائه کردند.

در پژوهش حاضر ایده به کار گرفته شده در مرجع [۱] برای

زیر برآورد می‌گردد.

$$\dot{w}_n(x, \tau) = \dot{w}_n(x, 0) + \int_0^\tau \ddot{w}_n(x, s) ds \quad (3)$$

$$0 \leq \tau \leq \Delta t$$

$$\tau = t - t_n$$

$$w_n(x, \tau) = w_n(x, 0) + \int_0^\tau \dot{w}_n(x, s) ds =$$

$$w_n(x, 0) + \dot{w}_n(x, 0) \times \tau + \quad (4)$$

$$\int_0^\tau \int_0^{s_2} \ddot{w}_n(x, s_1) ds_1 ds_2$$

در روابط ۵ و ۶ نیز روابط پیش انتگرال‌گیری، به منظور محاسبه  $\dot{\varphi}_n$  و  $\dot{\varphi}_n$  برحسب مؤلفه شتاب میدان دوران ارائه شده‌است.

$$\dot{\varphi}_n(x, \tau) = \dot{\varphi}_n(x, 0) + \int_0^\tau \ddot{\varphi}_n(x, s) ds \quad (5)$$

$$0 \leq \tau \leq \Delta t$$

$$\tau = t - t_n$$

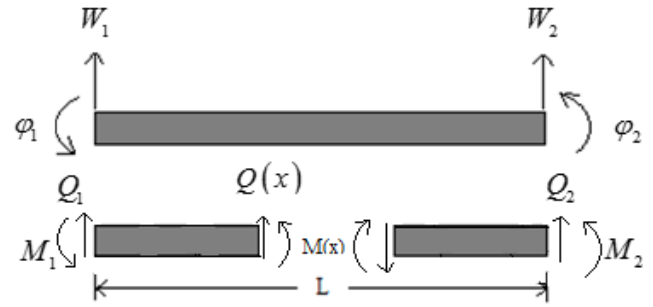
$$\varphi_n(x, \tau) = \varphi_n(x, 0) + \int_0^\tau \dot{\varphi}_n(x, s) ds =$$

$$\varphi_n(x, 0) + \dot{\varphi}_n(x, 0) \times \tau + \quad (6)$$

$$\int_0^\tau \int_0^{s_2} \ddot{\varphi}_n(x, s_1) ds_1 ds_2$$

در ادامه روند حل، میدان‌های شتاب  $\ddot{\varphi}_n(x, \tau)$  و  $\ddot{w}_n(x, \tau)$  به صورت ترکیبی از توابع مجهول  $f_n(x)$  و  $g_n(x)$  و دو سری متشکل از  $M$  پایه‌نمایی با ضرایب ثابت مجهول  $h_{j,i}$  و  $l_{j,i}$  که در بخش (۳-۳) معرفی خواهند شد، در نظر گرفته می‌شوند.

$$\dot{w}_n(x, \tau) = f_n(x) + \sum_{j=1}^2 C_{n,j} \times \left\{ \sum_{i=1}^M (h_{j,i} \times e^{\alpha_i x + \beta_{B,j} \tau}) + h_{j,0} \times \tau \right\} \quad (7)$$



شکل ۱. قرارداد علامت نیرو و تغییرشکل در تیر تیموشنکو

Fig. 1. Contract of Sign of force and deformation on Timoshenko beam

جدول ۱. پارامترهای مورد استفاده جهت ساده‌سازی دستگاه معادله دیفرانسیل حاکم

Table 1. Parameters used to simplify the governing differential equation system

|                       |                              |                       |                     |
|-----------------------|------------------------------|-----------------------|---------------------|
| $c_p = \sqrt{E/\rho}$ | $c_s = \sqrt{\kappa G/\rho}$ | $\eta = \kappa GA/EI$ | $c_f = 1/\kappa GA$ |
|-----------------------|------------------------------|-----------------------|---------------------|

مقطع تیر و برای مقاطع مستطیلی، برابر با  $\kappa = 0.85$  است. در شکل ۱ قرارداد علامت برای نیرو و تغییرشکل در تیر تیموشنکو نمایش داده شده‌است.

در ادامه به منظور ساده‌سازی روند حل عددی، دستگاه معادله دیفرانسیل (۱)، با استفاده از پارامترهای ارائه شده در جدول ۱ به فرم ساده شده در رابطه‌ی ۲ بازنویسی می‌گردد.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c_f q(x, t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \eta \varphi = -\eta \frac{\partial w}{\partial x}$$

در بخش بعدی فرمول‌بندی روش باقیمانده وزنی زمانی جهت حل دستگاه معادله (۲) توسعه داده شده‌است.

### ۳- روش گام به گام زمانی در حل معادله حاکم بر تیر تیموشنکو

برای حل دستگاه معادله ۲ به روش باقیمانده وزنی زمانی، ابتدا لازم است دامنه زمانی مسئله به تعداد مناسب زیربازه با طول  $\Delta t$  افراز گردد. در ادامه با معرفی متغیر زمانی محلی  $0 \leq \tau \leq \Delta t$  در زیربازه زمانی  $\Delta t$  و استفاده از روابط پیش انتگرال‌گیری، میدان‌های سرعت و تغییر مکان، برحسب مؤلفه شتاب میدان جابه‌جایی به شکل

$$\varphi_n(x, \tau) = \varphi_n(x, 0) + \dot{\varphi}_n(x, 0) \times \tau + g_n(x) \times \frac{\tau^2}{2} + \sum_{j=1}^2 \bar{C}_{n,j} \times \sum_{i=1}^M l_{j,i} \times \frac{e^{\alpha_i x}}{\beta_{S,i}^2} (e^{\beta_{S,i} \tau} - \beta_{S,i} \tau - 1) \quad (14)$$

در گام بعدی روش حل، توابع مجهول  $f_n(x)$  و  $g_n(x)$ ، با ارضاء وزنی زمانی دستگاه معادله دیفرانسیل مقدار مرزی در زیربازه ام، تعیین می‌شود.

$$\int_0^{\Delta t} W(\tau) \left( \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} \right) d\tau = \int_0^{\Delta t} W(\tau) \left( \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - c_f q(x, t) \right) d\tau \quad (15)$$

$$\int_0^{\Delta t} W(\tau) \left( \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} - \frac{1}{c_p^2} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} - \eta \varphi_n \right) d\tau = \int_0^{\Delta t} W(\tau) \eta \frac{\partial w_n}{\partial x} d\tau \quad (16)$$

در روابط فوق  $W(\tau)$  تابع وزن مناسب برای تشکیل معادلات مقدار مرزی است که در این مقاله با استناد به نتایج مرجع [۱]، به صورت دلتای دیراک با ضابطه  $W(\tau) = \delta(\tau - \Delta t)$  انتخاب شده‌است. در ادامه روند حل به منظور جداسازی<sup>۱</sup> دستگاه معادله از تقریب زیر جهت بیان متغیرهای سمت راست روابط ۱۵ و ۱۶ استفاده شده‌است.

$$\begin{bmatrix} w_n(x, \tau) \\ \varphi_n(x, \tau) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} w_{n-1}(x, \Delta t) \\ \varphi_{n-1}(x, \Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{w}_{n-1}(x, \Delta t) \\ \dot{\varphi}_{n-1}(x, \Delta t) \end{bmatrix} \times \tau. \quad (17)$$

به این ترتیب در نهایت با جایگذاری متغیرهای شتاب و جابه‌جایی و استفاده از فرض معرفی شده در رابطه ۱۷، دستگاه معادله مقدار مرزی جهت تعیین توابع مجهول  $f_n(x)$  و  $g_n(x)$  به شکل زیر حاصل می‌شوند.

$$\ddot{\varphi}_n(x, \tau) = g_n(x) + \sum_{j=1}^2 \bar{C}_{n,j} \times \left\{ \sum_{i=1}^M (l_{j,i} \times e^{\alpha_i x + \beta_{S,i} \tau}) + l_{j,0} \times \tau \right\} \quad (8)$$

شیوه محاسبه ضرایب مجهول  $C_{n,j}$  و  $\bar{C}_{n,j}$  در روابط فوق نیز از طریق ارضاء شرایط مرزی در انتهای بازه زمانی در بخش (۳-۴) معرفی خواهد شد. با توجه به ایده مطرح شده در مرجع [۱] و با هدف استفاده از پایه‌های نمایی ارضاء‌کننده دستگاه معادله دیفرانسیل حاکم، لازم است رابطه میان ضرایب  $\alpha$ ،  $\beta_B$  و  $\beta_S$  با جایگذاری عبارات  $\varphi(x, t) = e^{\alpha x + \beta_S t}$  و  $w(x, t) = e^{\alpha x + \beta_B t}$  در فرم همگن معادله دیفرانسیل<sup>۲</sup>، رابطه میان ضرایب  $\alpha$ ،  $\beta_B$  و  $\beta_S$  به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\alpha_i^2 - \frac{1}{c_s^2} \beta_{B,i}^2 = 0 \rightarrow \beta_{B,i} = \pm c_s \alpha_i, \quad (9)$$

$$\alpha_i^2 - \frac{1}{c_p^2} \beta_{S,i}^2 - \eta = 0 \rightarrow \beta_{S,i} = \pm c_p \sqrt{\eta - \alpha_i^2}, \quad (10)$$

در گام بعدی با جایگذاری تعاریف ۷ و ۸ در روابط ۳ تا ۶ و انتگرال‌گیری از میدان‌های شتاب، میدان‌های سرعت و جابه‌جایی در گام زمانی ام برحسب توابع پایه نمایی به صورت روابط ۱۱ تا ۱۴ بیان می‌شوند.

$$\dot{w}_n(x, \tau) = \dot{w}_n(x, 0) + f_n(x) \times \tau + \sum_{j=1}^2 C_{n,j} \times \left\{ \sum_{i=1}^M h_{j,i} \times \frac{e^{\alpha_i x}}{\beta_{B,i}} (e^{\beta_{B,i} \tau} - 1) + h_{j,0} \times \frac{\tau^2}{2} \right\}, \quad (11)$$

$$w_n(x, \tau) = w_n(x, 0) + \dot{w}_n(x, 0) \times \tau + f_n(x) \times \frac{\tau^2}{2} + \sum_{j=1}^2 C_{n,j} \times \left\{ \sum_{i=1}^M h_{j,i} \times \frac{e^{\alpha_i x}}{\beta_{B,i}^2} (e^{\beta_{B,i} \tau} - \beta_{B,i} \tau - 1) + h_{j,0} \times \frac{\tau^3}{6} \right\}, \quad (12)$$

$$\dot{\varphi}_n(x, \tau) = \dot{\varphi}_n(x, 0) + g_n(x) \times \tau + \sum_{j=1}^2 \bar{C}_{n,j} \times \sum_{i=1}^M l_{j,i} \times \frac{e^{\alpha_i x}}{\beta_{S,i}} (e^{\beta_{S,i} \tau} - 1), \quad (13)$$



بعدی نیز با توجه به توضیحات ارائه شده در بخش ۳-۵، برای ایجاد پیوستگی بین بازه‌های زمانی، شرایط اولیه هر بازه از شرایط انتهایی بازه قبل، مجدداً بر حسب همین توابع پایه به دست می‌آید. بازنویسی میدان جابه‌جایی و سرعت گام زمانی  $\Delta t$  به شرح زیر است

$$w_n(x, 0) = \sum_{i=1}^M A_{n,i}^w e^{\alpha_i x} + \sum_{i=1}^{\bar{M}} \bar{A}_{n,i}^w e^{\alpha_{p_i} x} + A_0^w \quad (22)$$

$$\dot{w}_n(x, 0) = \sum_{i=1}^M B_{n,i}^w e^{\alpha_i x} + \sum_{i=1}^{\bar{M}} \bar{B}_{n,i}^w e^{\alpha_{p_i} x} + \bar{B}_0^w$$

$$\varphi_n(x, 0) = \sum_{i=1}^M A_{n,i}^\varphi e^{\alpha_i x} + \sum_{i=1}^{\bar{M}} \bar{A}_{n,i}^\varphi e^{\alpha_{p_i} x} \quad (23)$$

$$\dot{\varphi}_n(x, 0) = \sum_{i=1}^M B_{n,i}^\varphi e^{\alpha_i x} + \sum_{i=1}^{\bar{M}} \bar{B}_{n,i}^\varphi e^{\alpha_{p_i} x}$$

در سری اول و دوم روابط فوق، به ترتیب از پایه‌های مشابه پایه‌های تابع تحریک و پایه‌های نظیر تابع بارگذاری استفاده شده‌است. همچنین در روابط فوق،  $A_n^w$  و  $A_n^\varphi$  به ترتیب ضرایب مربوط به تغییر مکان قائم و دوران مقطع، و ضرایب  $B_n^w$  و  $B_n^\varphi$  نیز ضرایب سرعت نظیر میداین تغییر شکل هستند. در ادامه با جایگزینی روابط فوق در معادلات ۱۸ و ۱۹ و با فرض بیان جواب خصوصی ناشی از شرایط اولیه سرعت و جابه‌جایی بر حسب پایه‌های نمایشی، بخش اول جواب خصوصی مطابق روابط ۲۴ و ۲۵ تعیین می‌شود.

$$f_{n,p}^1(x) = -\sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i^2 (A_{n,i}^w + B_{n,i}^w \Delta t)}{\Delta t^2 \alpha_{p_i}^2 - 2/c_s^2} e^{\alpha_i x} - \sum_{i=1}^{\bar{M}} \frac{\alpha_{p_i}^2 (\bar{A}_{n,i}^\varphi + \bar{B}_{n,i}^\varphi \Delta t)}{\Delta t^2 \alpha_{p_i}^2 - 2/c_s^2} e^{\alpha_{p_i} x} \quad (24)$$

$$g_{n,p}^1(x) = \sum_{i=1}^M \frac{2(A_{n,i}^\varphi + B_{n,i}^\varphi \Delta t)(\eta - \alpha_i^2)}{\Delta t^2 (\alpha_i^2 - \eta) - 2/c_p^2} e^{\alpha_i x} + \sum_{i=1}^{\bar{M}} \frac{2(\bar{A}_{n,i}^\varphi + \bar{B}_{n,i}^\varphi \Delta t)(\eta - \alpha_{p_i}^2)}{\Delta t^2 (\alpha_{p_i}^2 - \eta) - 2/c_p^2} e^{\alpha_{p_i} x} \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 f_n(x)}{\partial x^2} \times \frac{\Delta t^2}{2} - \frac{1}{c_s^2} f_n(x) = -\frac{\partial^2 w_n(x, 0)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \dot{w}_n(x, 0)}{\partial x^2} \times \Delta t + \sum_{j=1}^2 C_{n,j} \times \left\{ \sum_{i=1}^M h_{j,i} \times \frac{e^{\alpha_i x}}{c_s^2} (\beta_{B,i} \Delta t + 1) + \frac{h_{j,0} \Delta t}{c_s^2} \right\} + \int_0^{\Delta t} W(\tau) \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x} d\tau - \int_0^{\Delta t} W(\tau) c_f q_{n-1}(x, t) d\tau \quad (18)$$

$$\left( \frac{\partial^2 g_n(x)}{\partial x^2} - \eta g_n(x) \right) \times \frac{\Delta t^2}{2} - \frac{1}{c_p^2} g_n(x) = \eta \varphi_n(x, 0) - \frac{\partial^2 \varphi_n(x, 0)}{\partial x^2} + \left( \eta \dot{\varphi}_n(x, 0) - \frac{\partial^2 \dot{\varphi}_n(x, 0)}{\partial x^2} \right) \times \Delta t + \sum_{j=1}^2 \bar{C}_{n,j} \times \sum_{i=1}^M l_{j,i} \times \frac{e^{\alpha_i x}}{c_p^2} (\beta_{S,i} \Delta t + 1) - \int_0^{\Delta t} W(\tau) \left[ \eta \frac{\partial w_{n-1}}{\partial x} \right] d\tau \quad (19)$$

به منظور حل معادلات (۱۸) و (۱۹)، توابع  $f_n(x)$  و  $g_n(x)$  به صورت ترکیب جواب خصوصی ناشی از شرایط اولیه، جواب خصوصی ناشی از دو سری با ضرایب ثابت  $C_{n,j}$  و  $\bar{C}_{n,j}$  و جواب خصوصی بارگذاری متحرک در نظر گرفته شده‌است.

$$f_n(x) = f_{n,p}^1(x) + f_{n,p}^2(x) + f_{n,p}^3(x) + f_{n,p}^4(x) \quad (20)$$

$$g_n(x) = g_{n,p}^1(x) + g_{n,p}^2(x) + g_{n,p}^3(x) \quad (21)$$

برای تعیین جواب خصوصی بخش ناشی از شرایط اولیه لازم است ابتدا مقدار سرعت و جابه‌جایی اولیه در زمان  $t = 0$  به صورت دو سری متشکل از توابع پایه نمایشی بازنویسی کرد. در زیر بازه‌های

$$q(x, t) = Q(t) \times \delta(x - x_p(t)) \quad (30)$$

$$0 \leq x_p(t) \leq L$$

در رابطه‌ی ۳۰، تابع  $x_p(t)$  در حقیقت مکان بار روی تیر در هر لحظه از زمان است که برای دو حالت حرکت با سرعت ثابت و حرکت شتابدار، به صورت  $x_p(t) = vt + x_0$  و  $x_p(t) = at^2/2 + v_0t + x_0$  بیان می‌شود. در این تعاریف ضرایب ثابت  $v_0$ ،  $x_0$ ،  $v_0$  و  $a$  به ترتیب شتاب، سرعت ثابت در حرکت بدون شتاب، موقعیت مکانی اولیه و سرعت اولیه در حرکت شتابدار است. عبارت  $\int_0^{\Delta t} W(\tau) c_f q_{n-1}(x, t) d\tau$  با جایگذاری ضابطه تابع بارگذاری مطابق رابطه‌ی ۳۰، به شکل زیر ساده می‌شود.

$$\int_0^{\Delta t} W(\tau) c_f q_{n-1}(x, t) d\tau = c_f \times Q(n\Delta t) \times \delta(x - x_p(n\Delta t)) \quad (31)$$

جواب خصوصی نظیر بار متحرک، پس از بازنویسی عبارت به دست آمده در رابطه فوق به صورت سری فوریه کامل متشکل از  $\bar{M}$  پایه‌نمایی، به صورت رابطه‌ی ۳۳ محاسبه می‌گردد.

$$c_f \times Q(n\Delta t) \times \delta(x - x_p(n\Delta t)) = \sum_{i=1}^{\bar{M}} P_{n,i} \times e^{\alpha_{p_i} x} \quad (32)$$

$$f_{n,p}^4(x) = \sum_{i=1}^{\bar{M}} \frac{-2P_{n,i}}{\Delta t^2 \alpha_{p_i}^2 - 2/c_s^2} e^{\alpha_{p_i} x} \quad (33)$$

### ۳-۲- بازنویسی میادین شتاب، سرعت و جابه‌جایی

بعد از محاسبه توابع مجهول  $f_n(x)$  و  $g_n(x)$ ، توابع شتاب، سرعت و جابه‌جایی تغییر مکان عرضی با استفاده از روابط پیش‌انتگرال‌گیری ۳-۶ به صورت،

$$\dot{w}_n(x, \tau) = f_{n,p}^1(x) + f_{n,p}^3(x) + f_{n,p}^4(x) + \sum_{j=1}^2 C_{n,j} \times \Delta \dot{w}_j(x, \tau) \quad (34)$$

بخش دوم جواب خصوصی مربوط به اثر تابع تحریک نیز در روندی مشابه با حل معادلات ۱۸ و ۱۹ به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f_{n,p}^2(x) = \sum_{j=1}^2 C_{n,j} \times \left\{ \sum_{i=1}^M h_{j,i} \times \frac{2\beta_{B,i} \Delta t + 2}{\beta_{B,i}^2 \Delta t^2 - 2} e^{\alpha_i x} - h_{j,0} \Delta t \right\} \quad (26)$$

$$g_{n,p}^2(x) = -\sum_{j=1}^2 \bar{C}_{n,j} \times \sum_{i=1}^M l_{j,i} \frac{2\beta_{s,i} \Delta t + 2}{\beta_{s,i}^2 \Delta t^2 + 2} e^{\alpha_i x} \quad (27)$$

برای تعیین جواب خصوصی ناشی از گام قبلی، در ابتدا تابع جابه‌جایی و دوران گام قبلی به فرم‌نمایی نوشته شده و سپس با جایگذاری در معادلات ۱۸ و ۱۹، جواب این بخش تعیین می‌شود.

$$f_{n,p}^3(x) = \sum_{i=1}^M \frac{2\alpha_i A_{n-1,i}^\varphi}{\alpha_i^2 \Delta t^2 - 2/c_s^2} \times e^{\alpha_i x} + \sum_{i=1}^{\bar{M}} \frac{2\alpha_{p_i} \bar{A}_{n-1,i}^\varphi}{\alpha_{p_i}^2 \Delta t^2 - 2/c_s^2} \times e^{\alpha_{p_i} x} \quad (28)$$

$$g_{n,p}^3(x) = \sum_{i=1}^M \frac{-2\eta \alpha_i A_{n-1,i}^w}{\Delta t^2 (\alpha_i^2 - \eta) - 2/c_p^2} \times e^{\alpha_i x} + \sum_{i=1}^{\bar{M}} \frac{-2\eta \alpha_{p_i} \bar{A}_{n-1,i}^w}{\Delta t^2 (\alpha_{p_i}^2 - \eta) - 2/c_p^2} \times e^{\alpha_{p_i} x} \quad (29)$$

در بخش بعدی شیوه محاسبه جواب خصوصی ناشی از بار متحرک معرفی خواهد شد.

### ۳-۱- تعیین جواب خصوصی ناشی از بارگذاری متحرک

در این قسمت، تعیین بخش چهارم جواب خصوصی،  $f_{n,p}^4(x)$ ، که مربوط به بارگذاری مسئله است، ارائه خواهد شد. همان‌طور که در رابطه (۱۸) دیده می‌شود، اثر بارگذاری بر روی تیر در قالب ترم  $\int_0^{\Delta t} W(\tau) c_f q_{n-1}(x, t) d\tau$  در معادله حاصل از روش باقیمانده وزنی، ظاهر شده‌است. ضابطه بار متحرک در طول زمان به شکل حاصل ضرب یک تابع زمانی در تابع دلتای دیراک در نظر گرفته شده‌است. تابع زمانی، معرف تغییرات بارگذاری در طول زمان و تابع مکانی دلتای دیراک، موقعیت بار در طول زمان را تعیین می‌کند

$$\Delta \dot{w}_j(x, \tau) = \sum_{i=1}^M h_{j,i} \times \left( \frac{2\beta_{B,i}\Delta t + 2}{\beta_{B,i}^2\Delta t^2 - 2} \times \tau + \frac{e^{\beta_{B,i}\tau} - 1}{\beta_{B,i}} \right) \times e^{\alpha_i x} + h_{j,0} \left( \frac{\tau^2}{2} - \tau \times \Delta t \right) \quad (۴۱)$$

$$\Delta w_j(x, \tau) = \sum_{i=1}^M h_{j,i} \times \left( \frac{\beta_{B,i}\Delta t + 1}{\beta_{B,i}^2\Delta t^2 - 2} \times \tau^2 + \frac{e^{\beta_{B,i}\tau} - \beta_{B,i}\tau - 1}{\beta_{B,i}^2} \right) \times e^{\alpha_i x} + h_{j,0} \left( \frac{\tau^3}{6} - \frac{\tau^2}{2} \times \Delta t \right) \quad (۴۲)$$

$$\Delta \ddot{\phi}_j(x, \tau) = \sum_{i=1}^M l_{j,i} \left( -\frac{2\beta_{s,i}\Delta t + 2}{\beta_{s,i}^2\Delta t^2 + 2} + e^{\beta_{s,i}\tau} \right) e^{\alpha_i x} \quad (۴۳)$$

$$\Delta \dot{\phi}_j(x, \tau) = \sum_{i=1}^M l_{j,i} \left( -\frac{2\beta_{s,i}\Delta t + 2}{-\beta_{s,i}^2\Delta t^2 + 2} \times \tau + \frac{e^{\beta_{s,i}\tau} - 1}{\beta_{s,i}} \right) e^{\alpha_i x} \quad (۴۴)$$

$$\Delta \phi_j(x, \tau) = \sum_{i=1}^M l_{j,i} \left( -\frac{\beta_{s,i}\Delta t + 1}{\beta_{s,i}^2\Delta t^2 + 2} \times \tau^2 + \frac{e^{\beta_{s,i}\tau} - \beta_{s,i}\tau - 1}{\beta_{s,i}^2} \right) e^{\alpha_i x} \quad (۴۵)$$

### ۳-۳- تعیین ضرایب ثابت $l_{j,i}, h_{j,i}$

گام بعدی پس از مشخص شدن فرم نهایی میدان‌های شتاب، سرعت و جابه‌جایی، تعیین ضرایب ثابت روابط ۴۵-۴۰ است. در این بخش، نحوه‌ی انتخاب ضرایب  $h_{j,i}$  و  $l_{j,i}$  توضیح داده شده‌است. بدین منظور لازم است مفهوم جدیدی با عنوان تابع تحریک شرح داده شود. تابع تحریک برای هدایت موج در جهت صحیح به سمت داخل دامنه از دو انتهای عضو، تعریف می‌شود. به این منظور مطابق پیشنهاد مرجع [۱] ضابطه تابع تحریک به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$I(x; x_j) = \begin{cases} 1 - Abs(x - x_j) / \varepsilon, & 0 \leq \sqrt{(x - x_j)^2} \leq \varepsilon \\ 0 & \varepsilon < \sqrt{(x - x_j)^2} \end{cases} \quad (۴۶)$$

$$\dot{w}_n(x, \tau) = \dot{w}_n(x, 0) + (f_{n,p}^1(x) + f_{n,p}^3(x) + f_{n,p}^4(x)) \times \tau + \sum_{j=1}^2 C_{n,j} \times \Delta \dot{w}_j(x, \tau) \quad (۳۵)$$

$$w_n(x, \tau) = w_n(x, 0) + \dot{w}_n(x, 0) \times \tau + (f_{n,p}^1(x) + f_{n,p}^3(x) + f_{n,p}^4(x)) \times \frac{\tau^2}{2} + \sum_{j=1}^2 C_{n,j} \times \Delta w_j(x, \tau) \quad (۳۶)$$

و برای توابع شتاب، سرعت و جابه‌جایی دورانی به صورت زیر بیان می‌شود

$$\ddot{\phi}_n(x, \tau) = g_{n,p}^1(x) + g_{n,p}^3(x) + \sum_{j=1}^2 \bar{C}_{n,j} \times \Delta \ddot{\phi}_j(x, \tau) \quad (۳۷)$$

$$\dot{\phi}_n(x, \tau) = \dot{\phi}_n(x, 0) + (g_{n,p}^1(x) + g_{n,p}^3(x)) \times \tau + \sum_{j=1}^2 \bar{C}_{n,j} \times \Delta \dot{\phi}_j(x, \tau) \quad (۳۸)$$

$$\phi_n(x, \tau) = \phi_n(x, 0) + \dot{\phi}_n(x, 0) \times \tau + (g_{n,p}^1(x) + g_{n,p}^3(x)) \times \frac{\tau^2}{2} + \sum_{j=1}^2 \bar{C}_{n,j} \times \Delta \phi_j(x, \tau) \quad (۳۹)$$

در روابط اخیر  $\Delta \dot{w}_j(x, \tau)$ ،  $\Delta w_j(x, \tau)$ ،  $\Delta \ddot{\phi}_j(x, \tau)$ ،  $\Delta \dot{\phi}_j(x, \tau)$  و  $\Delta \phi_j(x, \tau)$  ام، توابع توابع نمو جابه‌جایی، سرعت و شتاب تابع تحریک جابه‌جایی  $I$  واقع توابع نمو جابه‌جایی، سرعت و شتاب تابع تحریک دوران، سرعت و شتاب تابع تحریک دوران  $I$  ام هستند که طبق روابط ۴۰ الی ۴۵) تعریف می‌شوند. توضیحات کامل در مورد تابع تحریک در مرجع [۱] و بخش ۳-۲ بیان شده‌است.

$$\Delta \ddot{w}_j(x, \tau) = \sum_{i=1}^M h_{j,i} \times \left( \frac{2\beta_{B,i}\Delta t + 2}{\beta_{B,i}^2\Delta t^2 - 2} + e^{\beta_{B,i}\tau} \right) \times e^{\alpha_i x} + h_{j,0} (\tau - \Delta t) \quad (۴۰)$$

نمایش داده شده است.

اولین مرحله در تعیین ضرایب  $h_{j,i}$  و  $l_{j,i}$ ، بازنویسی توابع تحریک پتانسیل موج خمشی و برشی به صورت سری فوریه کاهش یافته با ضرایب ثابت  $a_{j,i}$  و  $b_{j,i}$  است.

$$\hat{I}_B(x; x_j^B) = \sum_{i=1}^M a_{j,i} \times e^{\alpha_i x} \quad (47)$$

$$\hat{I}_S(x; x_j^S) = \sum_{i=1}^M b_{j,i} \times e^{\alpha_i x}$$

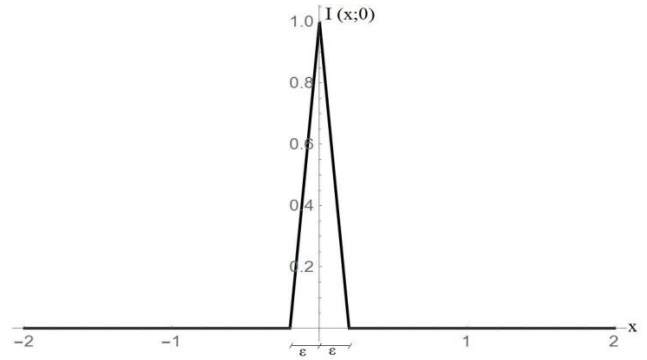
در ادامه برای تعیین ضرایب  $h_{j,i}$  و  $l_{j,i}$ ، توابع نموجابه جایی موج خمشی و برشی در زمان  $\tau = \Delta t$ ، با توابع تحریک موج خمشی و برشی برابر قرار داده می شوند.

$$\Delta w_j(x, \tau)|_{\tau=\Delta t} = \hat{I}_B(x; x_j^B) \Rightarrow \quad (48)$$

$$h_{j,i} = \frac{a_{j,i}}{\frac{\beta_{B,i} \Delta t + 1}{\beta_{B,i}^2 \Delta t^2 - 2} \Delta t^2 + \frac{e^{\beta_{B,i} \Delta t} - \beta_{B,i} \Delta t - 1}{\beta_{B,i}^2}}$$

$$\Delta \varphi_j(x, \tau)|_{\tau=\Delta t} = \hat{I}_S(x; x_j^S), \Rightarrow l_{j,i} = \quad (49)$$

$$\frac{b_{j,i}}{-\frac{\beta_{S,i} \Delta t + 1}{\beta_{S,i}^2 \Delta t^2 + 2} \Delta t^2 + \frac{e^{\beta_{S,i} \tau} - \beta_{S,i} \Delta t - 1}{\beta_{S,i}^2}}$$



شکل ۲. شکل تابع تحریک لازم برای هدایت موج به سمت داخل دامنه  
Fig. 2. The shape of the source function required to guide the wave inward to the domainz

در رابطه فوق  $x_j$  مختصات مرکز تحریک (نقطه منبع)  $j$  ام و  $\epsilon$  نیز پارامتر تعیین کننده شکل تابع تحریک است. شکل ۲ نمای کلی این توابع تحریک را نشان می دهد.

در حل مسئله انتشار موج خمشی در تیر، به دلیل وجود همزمان دو موج خمشی و برشی، باید دو نوع تابع تحریک برای هدایت هر دو موج خمشی و برشی در نظر گرفته شود. نکته مهم در انتخاب این دو تابع تحریک، توجه به تفاوت سرعت انتشار موج خمشی و برشی است. به عبارت دیگر، باید موقعیت نقاط منبع خمشی و برشی به گونه ای انتخاب شود که میزان نفوذ توابع تحریک خمشی و برشی درون دامنه به ترتیب برابر  $c_p \times \Delta t$  و  $c_s \times \Delta t$  باشد. البته با توجه به اینکه سرعت موج برشی از موج خمشی کمتر است باید نقاط منبع موج برشی در فاصله دورتری از مرز نسبت به موج خمشی قرار گیرد. در شکل ۳ نحوه انتخاب موقعیت صحیح نقاط منبع در حل مسئله



شکل ۳. موقعیت صحیح قرارگیری نقاط منبع در ابتدا و انتهای تیر تیموشنکو

Fig. 3. Appropriate location of source points at the beginning and end of Timoshenko beam

### ۳-۵- رابطه بازگشتی جهت تعیین ضرایب پایه‌های نمایی

در روش پیشنهادی گام به گام زمانی برای پیشروی حل در زمان، لازم است تا شرایط اولیه بازه زمانی  $n+1$  ام، با مقادیر جابه‌جایی و سرعت در انتهای بازه زمانی  $n$  ام، یکسان در نظر گرفته شوند. به این ترتیب رابطه بازگشتی اصلاح ضرایب  $\bar{A}^w, A^w, \bar{B}^w, B^w$  مربوط به میدان تغییر مکان قائم با فرض  $w_{n+1}(x, 0) = w_n(x, \Delta t)$  و  $\dot{w}_{n+1}(x, 0) = \dot{w}_n(x, \Delta t)$  به شکل زیر تعیین می‌شوند.

$$A_{n+1,i}^w = A_{n,i}^w + B_{n,i}^w \Delta t + \frac{2\alpha_i A_{n-1,i}^\varphi - \alpha_i^2 (A_{n,i}^w + B_{n,i}^w \Delta t) \Delta t^2}{\alpha_i^2 \Delta t^2 - 2/c_s^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \sum_{j=1}^2 C_{n,j} h_{j,i} \left[ \frac{2\beta_{B,i} \Delta t + 2 \Delta t^2}{\beta_{B,i}^2 \Delta t^2 - 2} \frac{e^{\beta_{B,i} \Delta t} - \beta_{B,i} \Delta t - 1}{2} + \frac{e^{\beta_{B,i} \Delta t} - \beta_{B,i} \Delta t - 1}{\beta_{B,i}^2} \right] \quad (55)$$

$$\bar{A}_{n+1,i}^w = \bar{A}_{n,i}^w + \bar{B}_{n,i}^w \Delta t + \frac{\alpha_{p_i}^2 (\bar{A}_{n,i}^\varphi + \bar{B}_{n,i}^\varphi \Delta t) + 2\alpha_{p_i} \bar{A}_{n-1,i}^\varphi - 2P_{n,i}}{\alpha_{p_i}^2 \Delta t^2 - 2/c_s^2} \frac{\Delta t^2}{2} \quad (56)$$

$$A_{n+1,0}^w = A_{n,0}^w + B_{n,0}^w \Delta t - \sum_{j=1}^2 C_{n,j} h_{j,0} \Delta t^3 / 3 \quad (57)$$

$$B_{n+1,i}^w = B_{n,i}^w + \frac{2\alpha_i A_{n-1,i}^\varphi - \alpha_i^2 (A_{n,i}^w + B_{n,i}^w \Delta t)}{\alpha_i^2 \Delta t^2 - 2/c_s^2} \Delta t + \sum_{j=1}^2 C_{n,j} h_{j,i} \left[ \frac{2\beta_{B,i} \Delta t + 2 \Delta t^2}{\beta_{B,i}^2 \Delta t^2 - 2} \Delta t + \frac{e^{\beta_{B,i} \Delta t} - 1}{\beta_{B,i}} \right] \quad (58)$$

$$\bar{B}_{n+1,i}^w = \bar{B}_{n,i}^w + \frac{\alpha_{p_i}^2 (\bar{A}_{n,i}^\varphi + \bar{B}_{n,i}^\varphi \Delta t) + 2\alpha_{p_i} \bar{A}_{n-1,i}^\varphi - 2P_{n,i}}{\alpha_{p_i}^2 \Delta t^2 - 2/c_s^2} \Delta t \quad (59)$$

$$B_{n+1,0}^w = B_{n,0}^w - \sum_{j=1}^2 C_{n,j} h_{j,0} \Delta t^2 / 2 \quad (60)$$

رابطه بازگشتی اصلاح ضرایب  $\bar{A}^\varphi, A^\varphi, \bar{B}^\varphi, B^\varphi$  مربوط به میدان دوران با فرض  $\varphi_{n+1}(x, 0) = \varphi_n(x, \Delta t)$  و  $\dot{\varphi}_{n+1}(x, 0) = \dot{\varphi}_n(x, \Delta t)$  به شکل زیر تعیین می‌شوند.

### ۳-۴- ارضاء شرایط مرزی و محاسبه ضرایب ثابت $C_{n,j}$ و $\bar{C}_{n,j}$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد در روش پیشنهادی، شرایط مرزی دو انتهای عضو در انتهای هر بازه زمانی ارضا می‌شوند. به این منظور با تعریف توابع زیر

$$P_n^w(x, \tau) = w_n(x, 0) + \dot{w}_n(x, 0) \times \tau + (f_{n,p}^1(x) + f_{n,p}^3(x) + f_{n,p}^4(x)) \times \frac{\tau^2}{2} \quad (50)$$

$$P_n^\varphi(x, \tau) = \varphi_n(x, 0) + \dot{\varphi}_n(x, 0) \times \tau + (g_{n,p}^1(x) + g_{n,p}^3(x)) \times \frac{\tau^2}{2} \quad (51)$$

روابط تابع جابه‌جایی و دوران به صورت زیر بیان می‌شود

$$w_n(x, \tau) = P_n^w(x, \tau) + \sum_{j=1}^2 C_{n,j} \times \Delta w_j(x, \tau) \quad (52)$$

$$\varphi_n(x, \tau) = P_n^\varphi(x, \tau) + \sum_{j=1}^2 \bar{C}_{n,j} \times \Delta \varphi_j(x, \tau) \quad (53)$$

در ادامه با تشکیل معادلات تعادل در نقاط مرزی ضرایب ثابت  $C_{n,j}, \bar{C}_{n,j}$  محاسبه می‌شوند. به طور نمونه، در المان تیر با شرایط مرزی گیردار در دو انتهای عضو، ضرایب ثابت از حل دستگاه معادله جبری  $4 \times 4$  زیر برآورد خواهند شد.

$$\begin{bmatrix} \Delta w_1(0, \Delta t) & \Delta w_2(0, \Delta t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \varphi_1(0, \Delta t) & \Delta \varphi_2(0, \Delta t) \\ \Delta w_1(L, \Delta t) & \Delta w_2(L, \Delta t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \varphi_1(L, \Delta t) & \Delta \varphi_2(L, \Delta t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{n,1} \\ C_{n,2} \\ \bar{C}_{n,1} \\ \bar{C}_{n,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_n(0, n \Delta t) \\ \varphi_n(0, n \Delta t) \\ w_n(L, n \Delta t) \\ \varphi_n(L, n \Delta t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_n^w(0, \Delta t) \\ P_n^\varphi(0, \Delta t) \\ P_n^w(L, \Delta t) \\ P_n^\varphi(L, \Delta t) \end{bmatrix} \quad (54)$$

جدول ۲. مشخصات مکانیکی و هندسی مقطع تیر مورد استفاده در مثال ۱  
**Table 2. Mechanical and geometrical properties of the cross section used in Example 1**

|                               |                      |                 |
|-------------------------------|----------------------|-----------------|
| $E = 0.334 \times 10^{11} Pa$ | $\rho = 2400 kg/m^3$ | $\nu = 0.2$     |
| $I = 2.25 m^4$                | $A = 3 m^2$          | $\kappa = 0.85$ |

### مثال ۱

به عنوان اولین مثال، یک تیر دو سر مفصل به طول ۳ متر تحت اثر یک بار متحرک با مقدار ۱۰۰ کیلو نیوتن و سرعت ثابت برابر ۱۵ متر بر ثانیه در نظر گرفته شده است. مشخصات مکانیکی و هندسی مقطع تیر مورد استفاده نیز در جدول ۲ ارائه شده است.

در حل این مثال،  $\Delta t = 1.6 \times 10^{-5} s$  و همچنین ۲۵ پایه نمایی برای بازسازی تابع تحریک و تابع بارگذاری در نظر گرفته شده است. با توجه به سرعت حرکت بار و همچنین طول تیر مدت زمان ماند بار بر روی تیر برابر ۰/۲ ثانیه است. از این رو در نمودارهای شکل ۴ به ترتیب تغییرات جابجایی، دوران لنگر خمشی و نیروی برشی در محدوده  $0 \leq t \leq 0.2 s$  برای نقطه میانی تیر، نظیر روش پیشنهادی و روش اجزا محدود به ازای دو الگوی گسسته سازی، نمایش داده شده است.

با توجه به نتایج نمایش داده شده در شکل ۴، دقت بالای روش پیشنهادی نسبت به روش المان محدود به ویژه در برآورد تغییرات لنگر خمشی و نیروی برشی مشخص می گردد. افزایش دقت روش اجزا محدود در محاسبه نیروهای داخلی نیازمند افزایش تعداد المان و به تبع افزایش درجات آزادی حل است. در حالی که در روش پیشنهادی بدون نیاز به گسسته سازی دامنه و با حداقل درجات آزادی پاسخ تغییر مکانی و نیرویی تیر را محاسبه شده است. لازم به ذکر است دقت بالای روش پیشنهادی در این مثال در حالی است زمان محاسبه روش باقیمانده وزنی زمانی در حدود ۱۳۳ ثانیه و در روش اجزا محدود با ۸۰ المان حدود ۱۵۵ ثانیه است.

### مثال ۲

در مثال دوم، یک تیر طره به طول ۳ متر که تحت اثر بار متحرکی با شدت ۱۰ کیلو نیوتن قرار داشته و با سرعت ۴۰ متر بر ثانیه طول تیر را می پیماید، در نظر گرفته شده است. مشخصات مکانیکی و هندسی مقطع تیر، مشابه مثال ۱ انتخاب شده است. نمای شماتیک این تیر در شکل ۵ نشان داده شده است.

$$A_{n+1,i}^\varphi = A_{n,i}^\varphi + B_{n,i}^\varphi \Delta t + \frac{2(A_{n,i}^\varphi + B_{n,i}^\varphi \Delta t)(\eta - \alpha_i^2) - 2\eta\alpha_i A_{n-1,i}^w \Delta t^2}{\Delta t^2(\alpha_i^2 - \eta) - 2/c_p^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \sum_{j=1}^2 \bar{C}_{n,j} l_{j,i} \left[ -\frac{2\beta_{s,i} \Delta t + 2}{\beta_{s,i}^2 \Delta t^2 + 2} \Delta t + \frac{e^{\beta_{s,i} \Delta t} - 1}{\beta_{s,i}} \right] \quad (61)$$

$$\bar{A}_{n+1,i}^\varphi = \bar{A}_{n,i}^\varphi + \bar{B}_{n,i}^\varphi \Delta t + \frac{2(\bar{A}_{n,i}^\varphi + \bar{B}_{n,i}^\varphi \Delta t)(\eta - \alpha_{p_i}^2) - 2\eta\alpha_{p_i} \bar{A}_{n-1,i}^w \Delta t^2}{\Delta t^2(\alpha_{p_i}^2 - \eta) - 2/c_p^2} \frac{\Delta t^2}{2} \quad (62)$$

$$B_{n+1,i}^\varphi = B_{n,i}^\varphi + \frac{2(A_{n,i}^\varphi + B_{n,i}^\varphi \Delta t)(\eta - \alpha_i^2) - 2\eta\alpha_i A_{n-1,i}^w \Delta t}{\Delta t^2(\alpha_i^2 - \eta) - 2/c_p^2} \Delta t + \sum_{j=1}^2 \bar{C}_{n,j} l_{j,i} \left[ -\frac{2\beta_{s,i} \Delta t + 2}{\beta_{s,i}^2 \Delta t^2 + 2} \Delta t + \frac{e^{\beta_{s,i} \Delta t} - 1}{\beta_{s,i}} \right] \quad (63)$$

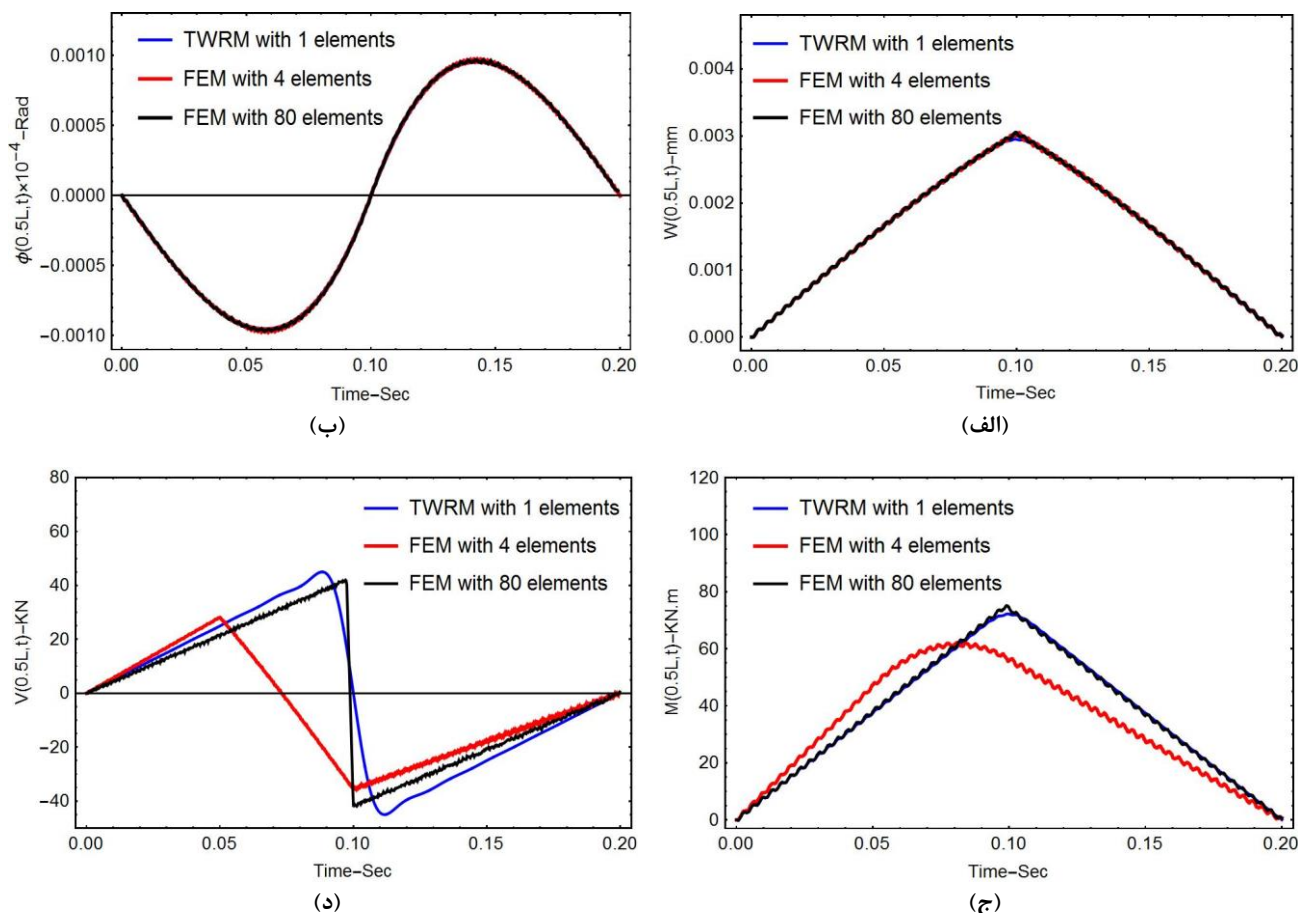
$$\bar{B}_{n+1,i}^\varphi = \bar{B}_{n,i}^\varphi + \frac{2(\bar{A}_{n,i}^\varphi + \bar{B}_{n,i}^\varphi \Delta t)(\eta - \alpha_{p_i}^2) - 2\eta\alpha_{p_i} \bar{A}_{n-1,i}^w \Delta t}{\Delta t^2(\alpha_{p_i}^2 - \eta) - 2/c_p^2} \Delta t \quad (64)$$

### ۴- مثال های عددی

در این بخش قابلیت و کارایی روش پیشنهادی در حل چند مثال نمونه از عبور بار متحرک، در دو حالت سرعت ثابت و شتابدار بر روی تیر با شرایط تکیه گاهی متفاوت، بررسی شده است. به منظور صحت سنجی نتایج از روش المان محدود با دو الگوی گسسته سازی درشت و ریز (درجات آزادی کم و زیاد) و همچنین نتایج مراجع [۱۲، ۱۶]، استفاده شده است. در همه ی مثال ها از تابع وزن دلتای دیراک استفاده شده و در مورد حرکت بار متحرک فرض شده که بار از ابتدای تیر شروع به حرکت می کند. لازم به ذکر است در محاسبه نیروهای داخلی تیر شامل لنگر خمشی و نیروی برشی از روابط زیر استفاده شده است.

$$M(x,t) = EI \frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x} \quad (65)$$

$$V(x,t) = \kappa GA \left( \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \varphi(x,t) \right) \quad (66)$$



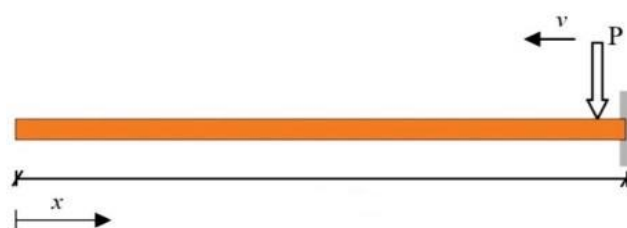
شکل ۴. تغییرات (الف) - تغییر مکان (ب) دوران (ج) - لنگر خمشی (د) نیروی برشی وسط دهانه در طول مدت قرارگیری بار بر روی تیر  
**Fig. 4. Variation of (A) Deflection, (B) Rotation, (C) Bending Moment and (D) Shear force in the middle of the Span during load placement on the beam**

همانگونه که مشاهده می‌شود نتایج روش باقیمانده وزنی زمانی با روش المان محدود مطابقت دارد.

در ادامه تغییرات لنگر خمشی و نیروی برشی در نقطه میانی تیر در امتداد زمان در شکل ۷ نمایش داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود روش المان محدود در حالت گسسته‌سازی تیر با دو المان، برآورد قابل قبولی از تغییرات نیروهای داخلی ارائه نمی‌دهد. با افزایش تعداد المان، مطابقت روش المان محدود با نتایج روش پیشنهادی همزمان با افزایش هزینه محاسبات، بیشتر خواهد شد. این مطابقت همچنین در تغییرات لنگر خمشی و نیروی برشی در طول تیر در در شکل ۸ نمایش داده شده است.

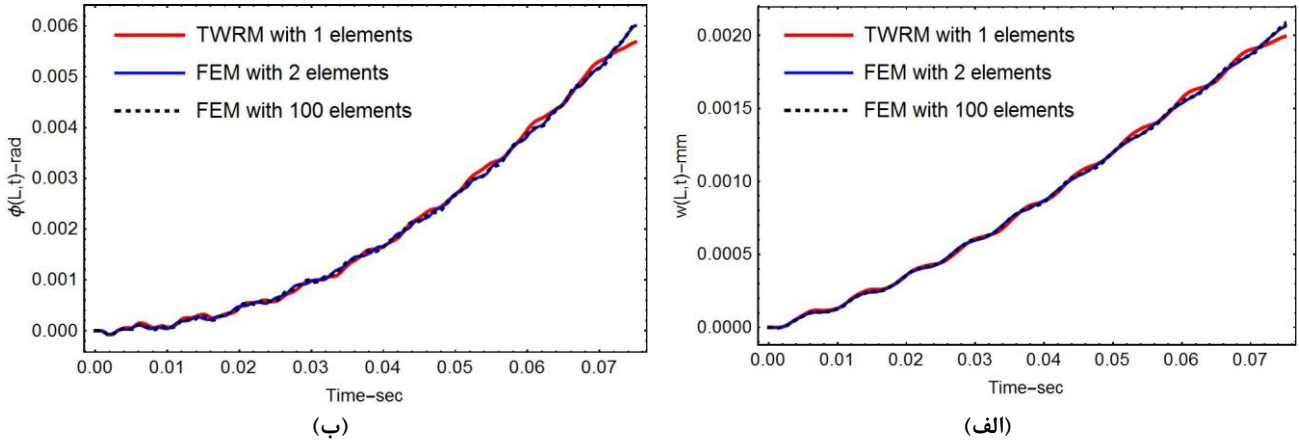
### مثال ۳

به عنوان سومین مثال، اثر عبور یک بار متحرک شتابدار با مقدار ثابت ۱ کیلو نیوتن با شتاب ۱۰ متر بر مجذور ثانیه و بدون سرعت

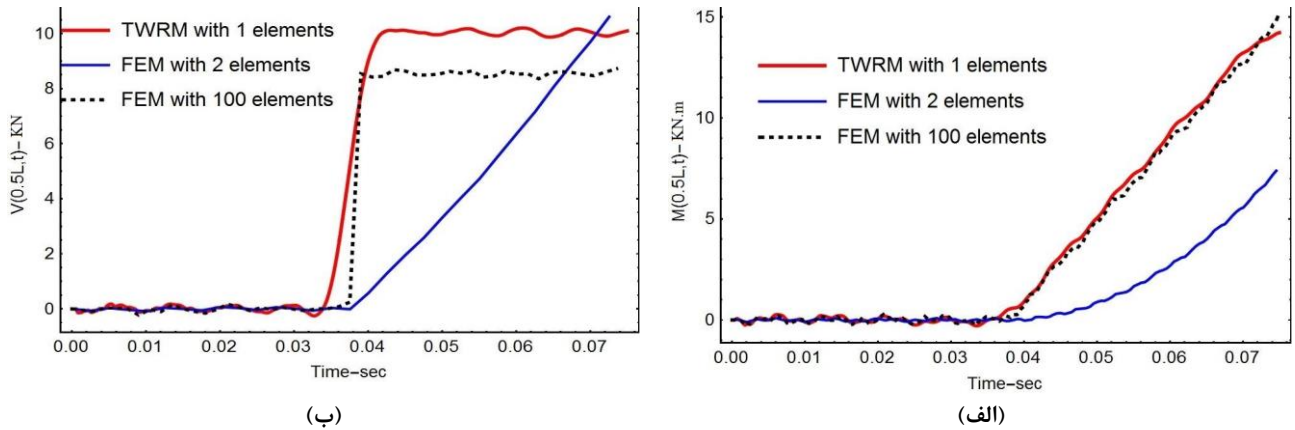


شکل ۵. مدل شماتیک تیر تیموشنکو با شرایط کنسولی در مثال دوم  
**Fig. 5. Schematic model of Timoshenko beam with con-sular conditions in the second example**

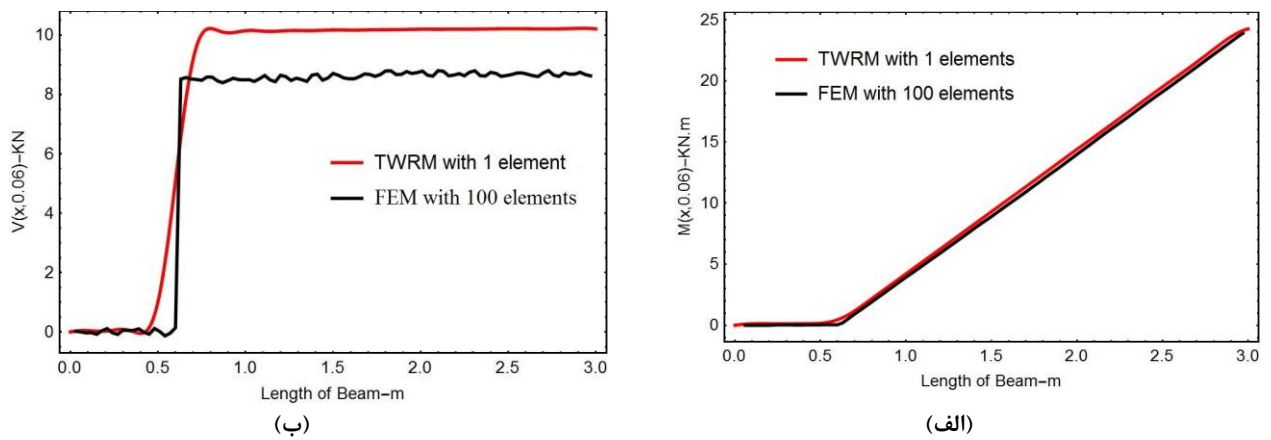
در این مثال، پارامترهای ثابت روش باقیمانده وزنی زمانی به صورت  $\Delta t = 1.21 \times 10^{-5} s$ ، تعداد پایه نمایی تابع تحریک  $M = 25$ ، تعداد پایه‌های نمایی بارگذاری  $M' = 25$  لحاظ شده است. در شکل ۶ تغییرات پاسخ تیر حاصل از روش پیشنهادی به ازای بار متحرک در بازه زمانی  $0 \leq t \leq 0.075 s$  با نتایج حاصل از روش المان محدود به ازای دو حالت گسسته‌سازی ۲ و ۱۰۰ المانی، مقایسه شده است.



شکل ۶. تغییرات (الف) جابه‌جایی و (ب) دوران در انتهای آزاد تیر  
**Fig. 6. Variation of (A) Deflection and (B) Rotation at the free end of Beam**



شکل ۷. تغییرات (الف) جابه‌جایی و (ب) دوران در نقطه وسط دهانه تیر  
**Fig. 7. Variation of (A) Deflection and (B) Rotation at mid-span of Beam**



شکل ۸. تغییرات (الف) لنگر خمشی و (ب) نیروی برشی در طول تیر در  $t = 0.06$  s  
**Fig. 8. Variation of (A) Bending Moment and (B) Shear Force along the Beam at  $t=0.06$  Sec**



جدول ۳. مشخصات مکانیکی و هندسی مقطع تیر مورد استفاده در مثال ۳  
**Table 3. Mechanical and geometrical properties of the cross section used in Example 3**

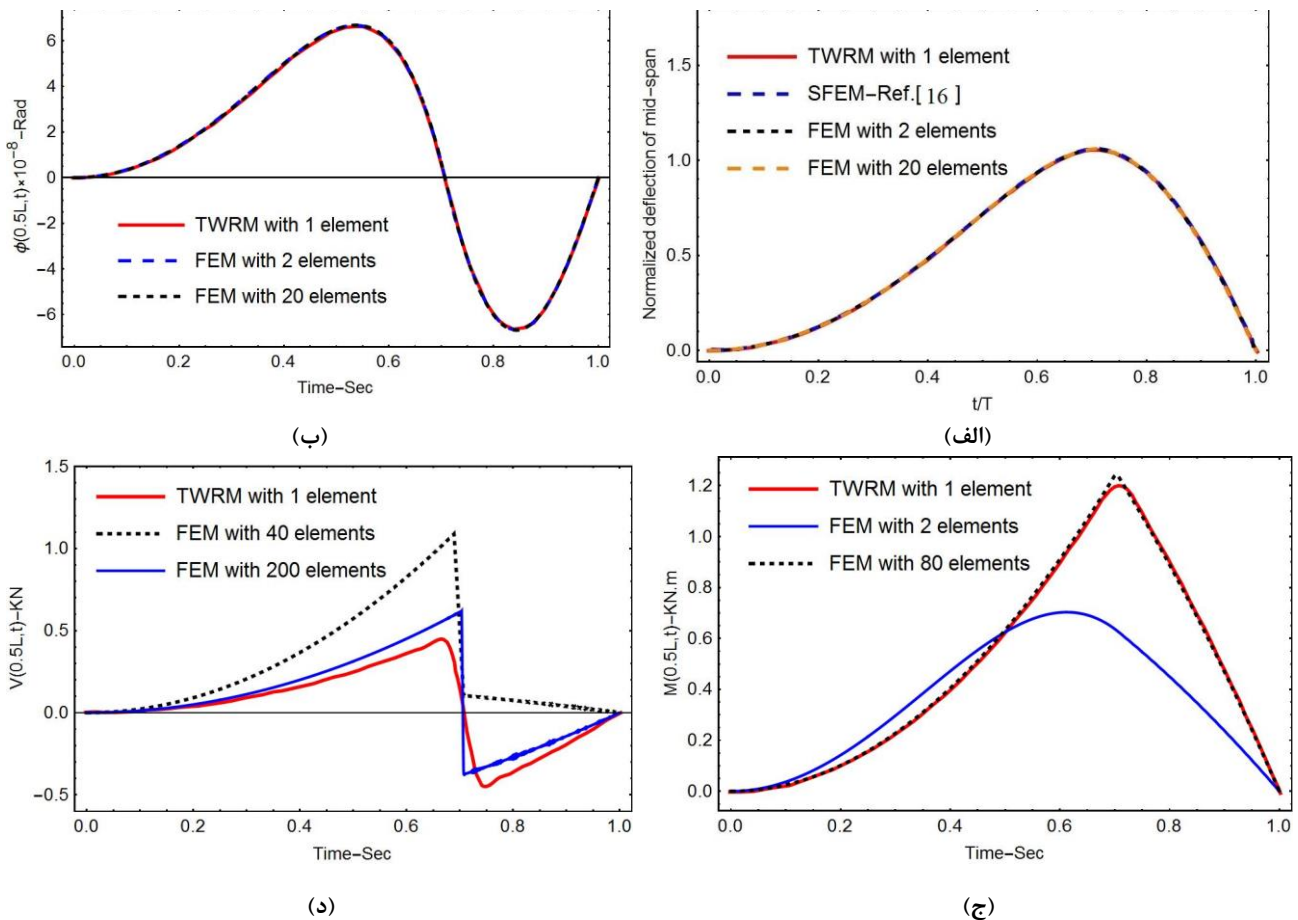
|                             |                      |                 |
|-----------------------------|----------------------|-----------------|
| $E = 2.1 \times 10^{11} Pa$ | $\rho = 7850 kg/m^3$ | $\nu = 0.3$     |
| $I = 0.0143 m^4$            | $A = 0.35 m^2$       | $\kappa = 0.85$ |

اولیه بر روی یک تیر دو سر مفصل به طول ۵ متر بررسی شده است. مقطع تیر مشابه مرجع [۱۶] مستطیلی با عرض ۵۰ و ارتفاع ۷۰ سانتی متر که مشخصات مکانیکی و هندسی آن در جدول ۳ ارائه شده است.

پارامترهای مورد استفاده در روش باقیمانده وزنی زمانی برای حل این مثال شامل گام زمانی، تعداد پایه نمایی تابع تحریک و تعداد پایه‌های نمایی بارگذاری به ترتیب  $\Delta t = 9.67 \times 10^{-6} s$ ،  $M = 35$  و  $M' = 30$  انتخاب شده‌اند. مدت زمان عبور بار متحرک از ابتدا تا انتهای تیر برابر  $T = \sqrt{2L/a} = \sqrt{2 \times 5/10} = 1s$  است. در شکل ۹- الف تغییرات مقادیر نرمال شده جابجایی قائم

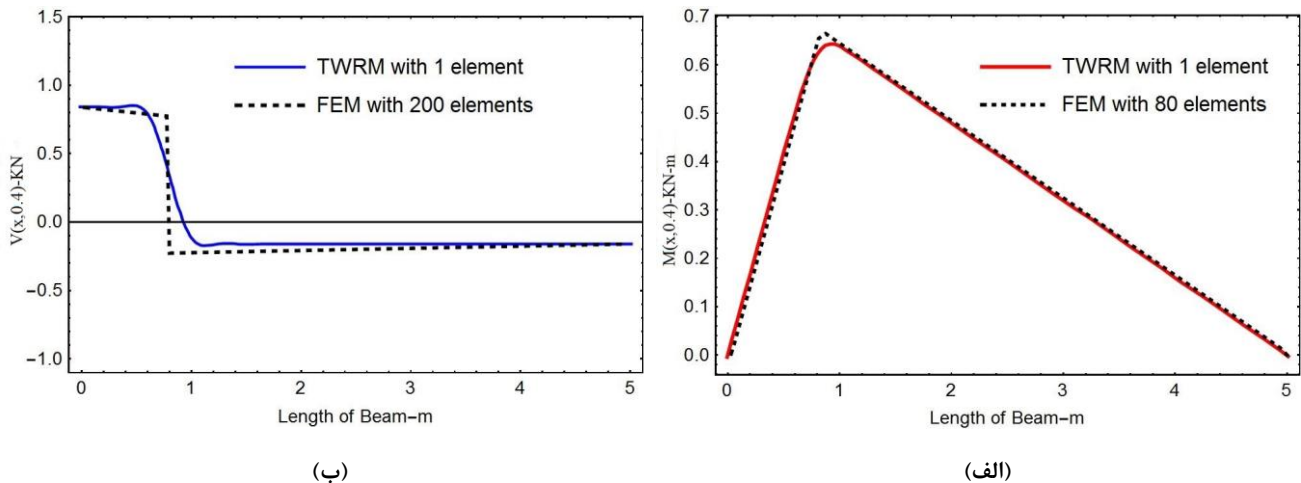
دینامیکی میانه تیر حاصل از روش پیشنهادی با نتایج روش اجزا محدود و نتایج [۱۶] نمایش داده شده است (محور قائم در این نمودار معرف نسبت جابه‌جایی دینامیکی به مقدار تغییر شکل استاتیکی،  $PL^3/48EI$  است). در اشکال ۹-ب الی ۹-د نیز به ترتیب تغییرات دوران مقطع، لنگر خمشی و نیروی برشی میانه تیر در طول زمان نمایش داده شده است. تغییرات لنگر خمشی و نیروی برشی در طول تیر نیز در زمان  $t = 0.4s$  در شکل ۱۰ ارائه شده است.

بررسی نتایج مجدداً حاکی از دقت مناسب روش باقیمانده وزنی زمانی در حل مسأله پیچیده بار متحرک شتاب‌دار در مقایسه با روش المان محدود است. همچنین مشاهده می‌شود محاسبه نیروهای داخلی تیر در روش المان محدود به دلیل نیاز به محاسبه مشتقات توابع جابه‌جایی و دوران، با خطای زیادی همراه است. کاهش این خطا نیازمند و افزایش تعداد المان‌ها را افزایش داد که این مورد سبب پایین آمدن سرعت حل مسئله و افزایش هزینه محاسبات می‌شود. در حالی که در روش پیشنهادی به دلیل بیان تابع پاسخ بر حسب توابع



شکل ۹. تغییرات جابه‌جایی قائم، (ب) دوران مقطع، (ج) لنگر خمشی و (د) نیروی برشی در نقطه  $x = 0.5L$

Fig. 9. Variation of (A) Deflection, (B) Rotation, (C) Bending Moment and (D) Shear force at  $x=0.5L$



(ب)

(الف)

شکل ۱۰. تغییرات لنگر خمشی و نیروی برشی در طول تیر  $t = 0.4s$

Fig. 10. Variation of (A) Bending Moment and (B) Shear Force along the Beam at  $t=0.4$  Sec

دقت روش اجزا محدود در محاسبه نیروهای داخلی نیازمند افزایش تعداد المان و به تبع افزایش درجات آزادی حل است. در حالی که در روش پیشنهادی بدون نیاز به گسسته سازی دامنه و با حداقل درجات آزادی پاسخ تغییر مکانی و نیرویی تیر محاسبه شده است.

#### ۵- نتیجه گیری

در این مقاله، فرمول بندی روش باقیمانده وزنی زمانی، برای حل مسئله تیر تیموشنکو تحت اثر بار متحرک با سرعت ثابت و متغیر توسعه داده شده است. این روش جدید به دلیل عدم نیاز به گسسته سازی تیر امکان مدل سازی بار متحرک را به سادگی فراهم ساخته است. به این ترتیب مشکل رایج دنبال کردن بار در المان های مختلف عضو، در روش های عددی موجود نظیر اجزا محدود، برطرف می شود. امتیاز دیگر روش باقیمانده وزنی زمانی در حل معادله حاکم بر ارتعاشی تیر تیموشنکو تحت بار متحرک، ذخیره سازی اطلاعات شتاب، سرعت و جابه جایی هر گام زمانی بر روی ضرایب توابع پایه نمایشی است، به گونه ای که پیشروی حل در زمان تنها با به روزرسانی این ضرایب امکان پذیر خواهد بود. همچنین استفاده از پایه های نمایشی با مرتبه پیوستگی نامحدود برای بیان جواب، دقت محاسبه تغییرات نیروی برشی و لنگر خمشی درون تیر را بدون نیاز به افزایش درجات آزادی فراهم می سازد. دقت و کارایی روش پیشنهادی نسبت به روش المان محدود به خوبی در حل چند مثال عددی نمایش داده شد.

نمایی با مرتبه پیوستگی نامحدود، دقت پاسخ در برآورد نیروهای داخلی تغییر محسوسی ندارد.

#### مثال ۴

به عنوان آخرین مثال، یک تیر دو سر مفصل به طول ۲ متر تحت اثر یک بار متحرک با مقدار ۱۴۷ نیوتن و سرعت ثابت برابر ۶ متر بر ثانیه در نظر گرفته شده است. مقطع تیر مشابه مرجع [۱۲] مستطیلی با عرض ۱۰ و ارتفاع ۲/۵ سانتی متر که مشخصات مکانیکی و هندسی آن در جدول ۴ ارائه شده است.

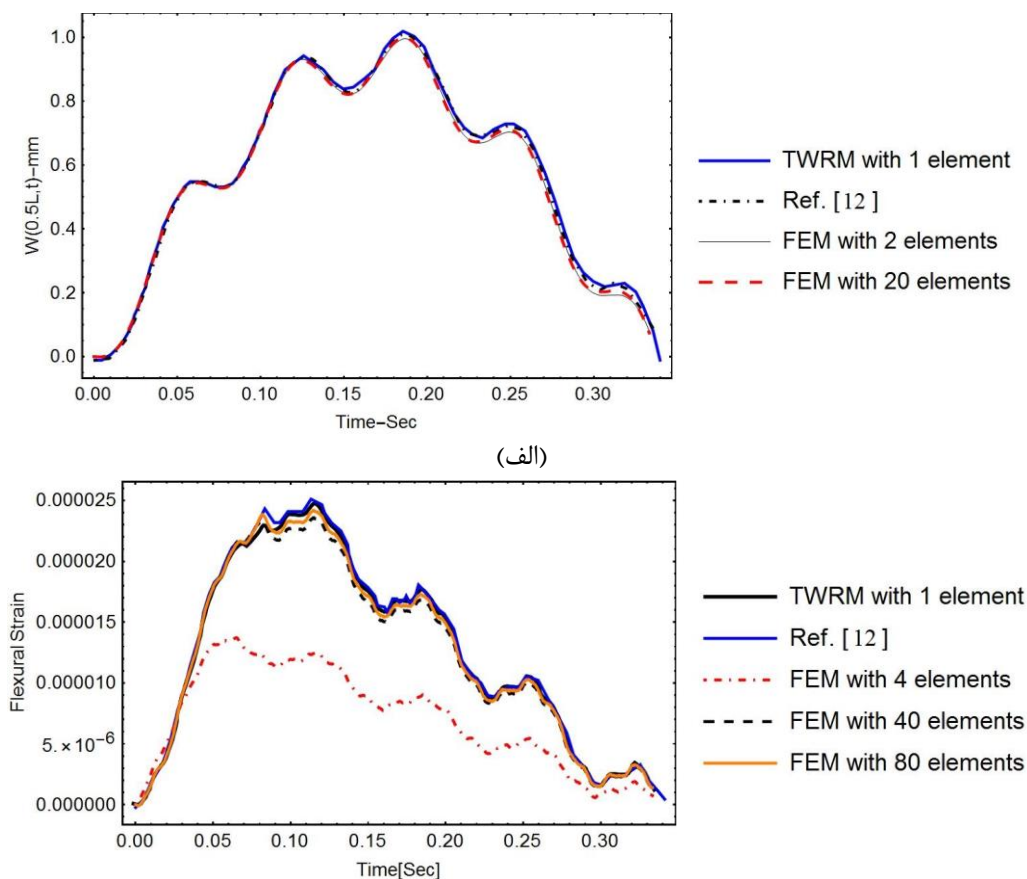
در حل این مثال،  $\Delta t = 1.6 \times 10^{-6} s$  و همچنین ۲۵ پایه نمایشی برای بازسازی تابع تحریک و تابع بارگذاری در نظر گرفته شده است. با توجه به سرعت حرکت بار و همچنین طول تیر مدت زمان ماند بار بر روی تیر برابر ۰/۳۳ ثانیه است. از این رو در نمودارهای شکل ۱۱ به ترتیب تغییرات جابه جایی و کرنش خمشی در محدوده  $0 \leq t \leq 0.33s$ ، نظیر روش پیشنهادی، روش اجزا محدود و حل مرجع [۱۲]، نمایش داده شده است.

با توجه به نتایج نمایش داده شده در شکل ۱۱، دقت بالای روش پیشنهادی نسبت به روش المان محدود مشخص می گردد. افزایش

جدول ۴. مشخصات مکانیکی و هندسی مقطع تیر مورد استفاده در مثال ۴

Table 4. Mechanical and geometrical properties of the cross section used in Example 4

|                                |                      |                 |
|--------------------------------|----------------------|-----------------|
| $E = 2.06 \times 10^{11} Pa$   | $\rho = 7850 kg/m^3$ | $\nu = 0.3$     |
| $I = 1.302 \times 10^{-7} m^4$ | $A = 0.0025 m^2$     | $\kappa = 0.85$ |



شکل ۱۱. تغییرات (الف) - تغییر مکان در  $x = 0.5L$  (ب) کرنش خمشی در نقطه  $x = 0.25L$  در طول مدت قرارگیری بار بر روی تیر  
**Fig. 11. Variation of (A) Deflection at  $x=0.5L$  and (B) Flexural Strain at  $x=0.25L$  during load placement on the beam**

$\varphi$  دوران تیر، Rad

بالانویس

\* شرایط مرجع

مراجع

- [1] B. Movahedian, B. Boroomand, S. Mansouri, A robust time-space formulation for large-scale scalar wave problems using exponential basis functions, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 114(7) (2018) 719-748.
- [2] J L. Frýba, Vibration of solids and structures under moving loads, Springer Science & Business Media, 2013.
- [3] A. Florence, Traveling force on a Timoshenko beam, Journal of Applied Mechanics, 32(2) (1965) 351-358.
- [4] C.R. Steele, The Timoshenko beam with a moving load,

علائم انگلیسی

A مساحت،  $m^2$

E مدول الاستیسیته،  $N/m^2$

I ممان اینرسی،  $m^4$

G مدول برشی،  $N/m^2$

L طول تیر، m

w جابه‌جایی قائم تیر، m

V سرعت، m/s

q نیرو، N

F نیرو، N

علائم یونانی

$\rho$  چگالی،  $kg/m^3$

$\nu$  ضریب پواسون

$\kappa$  ضریب برش مقطع تیر تیموشنکو

- structural damping on wave propagation in periodic Timoshenko beams on elastic foundations under moving loads, *Physics Letters A*, 380(31-32) (2016) 2335-2341.
- [14] Y.-H. Lin, Vibration analysis of Timoshenko beams traversed by moving loads, *Journal of Marine Science and Technology*, 2(4) (1994) 25-35.
- [15] P. Lou, G.-I. Dai, Q.-y. Zeng, Dynamic analysis of a Timoshenko beam subjected to moving concentrated forces using the finite element method, *Shock and Vibration*, 14(6) (2007) 459-468.
- [16] V. Sarvestan, H.R. Mirdamadi, M. Ghayour, Vibration analysis of cracked Timoshenko beam under moving load with constant velocity and acceleration by spectral finite element method, *International Journal of Mechanical Sciences*, 122 (2017) 318-330.
- [17] S.S. Kourehli, S. Ghadimi, R. Ghadimi, Crack identification in Timoshenko beam under moving mass using RELM, *Steel and Composite Structures*, 28(3) (2018) 279-288.
- [18] S.S. Kourehli, S. Ghadimi, R. Ghadimi, Vibration analysis and identification of breathing cracks in beams subjected to single or multiple moving mass using online sequential extreme learning machine, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 27(8) (2019) 1057-1080.
- [19] X. Zhang, H. Liang, M. Zhao, Fundamental solution and its validation by numerical inverse Laplace transformation and FEM for a damped Timoshenko beam subjected to impact and moving loads, *Journal of Vibration and Control*, 25(3) (2019) 593-611.
- Journal of Applied Mechanics*, 35(3) (1968) 481-488.
- [5] S. Mackertich, Moving load on a Timoshenko beam, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 88(2) (1990) 1175-1178.
- [6] H. Lee, Dynamic response of a rotating Timoshenko shaft subject to axial forces and moving loads, *Journal of Sound and Vibration*, 181(1) (1995) 169-177.
- [7] R.-T. Wang, Vibration of multi-span Timoshenko beams to a moving force, *Journal of sound and vibration*, 207(5) (1997) 731-742.
- [8] S.E. Azam, M. Mofid, R.A. Khoraskani, Dynamic response of Timoshenko beam under moving mass, *Scientia Iranica*, 20(1) (2013) 50-56.
- [9] D. Roshandel, M. Mofid, A. Ghannadiasl, Modal analysis of the dynamic response of Timoshenko beam under moving mass, *Scientia Iranica. Transaction A, Civil Engineering*, 22(2) (2015) 331.
- [10] M. Kargarnovin, D. Younesian, Dynamics of Timoshenko beams on Pasternak foundation under moving load, *Mechanics research communications*, 31(6) (2004) 713-723.
- [11] M. Shafiei, N. Khaji, Analytical solutions for free and forced vibrations of a multiple cracked Timoshenko beam subject to a concentrated moving load, *Acta Mechanica*, 221(1-2) (2011) 79.
- [12] J.Q. Jiang, W.-Q. Chen, Y.-H. Pao, Reverberation-ray analysis of continuous Timoshenko beams subject to moving loads, *Journal of Vibration and Control*, 18(6) (2012) 774-784.
- [13] L. Ding, H.-P. Zhu, L. Wu, Effects of axial load and

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

A. Borji, B. Movahedian Attar, B. Boroomand, *Using the Time-Weighted Residual Method in Forced Vibration Analysis of Timoshenko Beam under Moving Load*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 53(4) (2021): 1339-1354.

DOI: [10.22060/ceej.2019.16867.6381](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.16867.6381)

