



## Proposing an RC Fiber Frame Element Based on Local Stress Field Theory and Bar-Concrete Interaction

B. Yousefi, M. R. Esfahani\*, M. R. Tavakolizadeh

Department of Civil Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran.

**ABSTRACT:** This research presents an analytical model for developing a fiber frame element based on local stress field theory. The proposed formulation is developed through the Lagrangian kinematics assumption to derive the weak form of the equations in large strain conditions. In this regard, the effect of bond-slip has been considered by removing the perfect bond assumption. The governing equations for each element are developed by the directional stiffness matrix in weak form. The extracted formula is based on Timoshenko's beam theory, with axial, bending, and shear interaction effects in the domain of each element. The components of the stiffness matrix are defined through directional derivatives of the semi-linear form of the equations. Moreover, the suggested approach evolves from cubic Hermitian polynomials and the local stress field theory. The validation of the analytical method is provided by the available experimental tests. The implemented code could cover the overall behavior of reinforced concrete members, as well as, the maximum crack width, slip profile, and crack growth. The results show that such a modeling method is capable of simulating RC members.

### Review History:

Received: Jul. 04, 2019  
Revised: Aug. 04, 2019  
Accepted: Aug. 04, 2019  
Available Online: Aug. 09, 2019

### Keywords:

Fiber frame element  
Smearred crack approach  
Timoshenko's theory  
Bond-slip effect  
Lagrangian approach

### 1. Introduction

Fiber-based approaches are the most commonly used due to concurrently satisfying the accuracy, reliability, computational efficiency, and robust algorithmic performance, as well as the nonlinear flexural-shear interactions consideration [1, 2]. The state-of-the-art review on the existing frame models with the inclusion of shear responses was excellently presented in [3]. Although the literature presents plenty of other interesting formulation approaches based on force-based elements [4-8] or displacement-based elements [9-11], there is still a lack of methods that consider bond-slip behaviors based on a finite strain description. Consequently, this paper is extended the displacement-based frame element of Limkatany and Spacone [12] which is different from those published previously. In other words, an exact multi-directional stiffness matrix is analytically derived based on the post-cracking bond-slip interaction between concrete and steel bars, as well as the presentation of a Timoshenko fiber frame model for large displacement analysis by using Green-Lagrange finite strain tensor. The present model is a simple applicable approach that is almost accurate and time-saving, also it holds proper convergence compared to micro modeling methods.

### 2. Methodology

The approach can be applied to finite elements consisting of fiber beam-column elements which are prepared in the MATLAB framework. The model has been constructed by using the equilibrium conditions of an infinitesimal segment

with bond interfaces at bars and constant external forces.

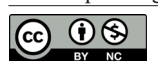
In this research, the weak formulation of updated Lagrangian (UL) kinematics is used to derive the finite element equations of a two-node Timoshenko plane beam element. The suggested approach evolves from cubic Hermitian polynomials, which has been well established by Bazoune et al. [13]. The main advantage of the developed expressions of shape functions over the classical shape functions is the shear deformation factors that can account for shear effects. Hence, the nonlinear strain vector ( $\epsilon$ -) including the axial strain ( $\epsilon_{xx}$ ) and the transverse shear strain ( $\epsilon_{yx}$ ) defined as:

$$\bar{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ 2\epsilon_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e - y\kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{Bmatrix} e \\ \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 + u'_x) \cos \theta + u'_y \sin \theta - 1 \\ -(1 + u'_x) \sin \theta + u'_y \cos \theta \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

in which, the three strain quantities ( $e$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ ) characterize axial strains, shear strains, and curvatures, respectively. The bond-slip between the surrounding concrete and the  $i$ th fiber of reinforcement ( $u_{slip}$ ) and the normal strain of the concrete ( $\epsilon_{xx}^{con}$ ) and steel bar strain of  $i$ th layer ( $\epsilon_{xx}^{bars}$ ) are defined. Regarding the aforementioned aspects, the derivation of the weak form of the governing differential equations and its numerical implementation is written. To make finite element relations, a stable discretization is presented. As the local assembly proceeds, continuous displacements field discretization is applied. Thus, the element stiffness matrix

\*Corresponding author's email: esfahani@um.ac.ir



for continuum finite elements from the governing differential equation can be derived. Considering an incremental formulation of equilibrium, the tangent stiffness matrix is obtained through the first variation of the internal force vector in each degree of freedom direction which named multi-directional stiffness matrix as:

$$\begin{aligned}
 & \{\widetilde{u}_N\}_i^T \int_L \underbrace{\lambda_N \left( \frac{\kappa}{B_w \{\widetilde{u}_w\}} \right) B_N dx}_{k_{u_N}^{u_N}} \{\Delta \widetilde{u}_N\}_i \\
 & \{\widetilde{u}_N\}_i^T \int_L \underbrace{-\lambda_N \frac{\kappa(1 + B_N \{\widetilde{u}_N\})}{\{B_w \widetilde{u}_w\}^2} B_w dx}_{k_{u_N}^{u_w}} \{\Delta \widetilde{u}_w\}_i \\
 & \{\widetilde{u}_N\}_i^T \int_L \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_N^s & 0 \\ 0 & \lambda_N^s \end{bmatrix} B_{slip} dx}_{k_{u_N}^{u_{slip}}} \{\Delta \widetilde{u}_{slip}\}_i \\
 & \{\widetilde{u}_w\}_i^T \int_L \underbrace{-\lambda_w \left( \frac{\kappa}{B_w \{\widetilde{u}_w\}} \right) B_N dx}_{k_{u_w}^{u_N}} \{\Delta \widetilde{u}_N\}_i \\
 & \{\widetilde{u}_w\}_i^T \int_L \underbrace{\lambda_w \frac{\kappa(1 + B_N \{\widetilde{u}_N\})}{\{B_w \widetilde{u}_w\}^2} B_w dx}_{k_{u_w}^{u_w}} \{\Delta \widetilde{u}_w\}_i \\
 & \{\widetilde{u}_w\}_i^T \int_L \underbrace{-\begin{bmatrix} \lambda_w^s & 0 \\ 0 & \lambda_w^s \end{bmatrix} B_{slip} dx}_{k_{u_w}^{u_{slip}}} \{\Delta \widetilde{u}_{slip}\}_i \\
 & \{\widetilde{u}_{slip}\}_i^T \int_L \underbrace{B_{slip}^T \lambda_{slip}^\sigma \left( \frac{\kappa}{B_w \{\widetilde{u}_w\}} \right) B_N dx}_{k_{u_{slip}}^{u_N}} \{\Delta \widetilde{u}_N\}_i \\
 & \{\widetilde{u}_{slip}\}_i^T \int_L \underbrace{-B_{slip}^T \lambda_{slip}^\sigma \left( \frac{\kappa(1 + B_N \{\widetilde{u}_N\})}{\{B_w \widetilde{u}_w\}^2} \right) B_w dx}_{k_{u_{slip}}^{u_w}} \{\Delta \widetilde{u}_w\}_i \\
 & \{\widetilde{u}_{slip}\}_i^T \left( \int_L B_{slip}^T \lambda_{slip}^\sigma B_{slip} dx + \int_L N_{slip}^T \lambda_{slip}^\tau N_{slip} dx \right) \{\Delta \widetilde{u}_{slip}\}_i \underbrace{\hspace{10em}}_{k_{u_{slip}}^{u_{slip}}}
 \end{aligned} \tag{2}$$

### 3. Constitutive models

Under the uniaxial tension-compression or biaxial compressive stress state of the material, nonlinear material characteristics are considered (see [14], [15], and [16]). In the RC structures, the constitutive relation in the uncracked state is restricted to linear elasticity. The constitutive shear model is adapted according to Li [17] which was developed for modeling the nonlinear behavior of concrete elements. In this paper, the local stress field theory, presented by Soltani and Maekawa [18], is considered.

### 4. Numerical Results and Solution

Some numerical examples are used to verify the accuracy and show the efficiency of the proposed material nonlinear frame element as well as the solution marching schemes. The iterative-incremental method (Arc-Length method) with a variable stiffness scheme was applied to analyze structures. Afterward, several numerical investigations were performed with the proposed model to study the effects of nonlinear shear deformations and flexural responses, simultaneously. The results of the nonlinear computer analyses are compared

with the observed data and analytical results. Some examples are considered as performed tests by Gilbert and Nejadi [19], Sasani, Werner, and Kazemi [20], and Pham, Tan, and Yu [21].

### 5. Conclusions

The main characteristics of the method are substantially the flexibility formulation and the constitutive relationship characterized by a fixed smeared crack model. The proposed model was calibrated and validated through a comparison with experimental results and various numerical analyses were performed to study the influence of nonlinear flexural-shear interaction. Thereafter, this method could yield accurate and convergent results in agreement with the problems.

### References

- [1] M. Petrangeli, P.E. Pinto, V. Ciampi, Fiber element for cyclic bending and shear of RC structures. I: Theory, *Journal of Engineering Mechanics*, 125(9) (1999) 994-1001.
- [2] A. Saritas, F.C. Filippou, Inelastic axial-flexure-shear coupling in a mixed formulation beam finite element, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 44(8) (2009) 913-922.
- [3] P. Ceresa, L. Petrini, R. Pinho, Flexure-shear fiber beam-column elements for modeling frame structures under seismic loading—state of the art, *Journal of Earthquake Engineering*, 11(S1) (2007) 46-88.
- [4] E. Brunesi, R. Nascimbene, Extreme response of reinforced concrete buildings through fiber force-based finite element analysis, *Engineering Structures*, 69 (2014) 206-215.
- [5] E. Brunesi, R. Nascimbene, F. Parisi, N. Augenti, Progressive collapse fragility of reinforced concrete framed structures through incremental dynamic analysis, *Engineering Structures*, 104 (2015) 65-79.
- [6] D. Feng, C. Kolay, J.M. Ricles, J. Li, Collapse simulation of reinforced concrete frame structures, *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 25(12) (2016) 578-601.
- [7] X.H. Yu, D.G. Lu, K. Qian, B. Li, Uncertainty and sensitivity analysis of reinforced concrete frame structures subjected to column loss, *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 31(1) (2016) 04016069.
- [8] E. Brunesi, F. Parisi, Progressive collapse fragility models of European reinforced concrete framed buildings based on pushdown analysis, *Engineering Structures*, 152 (2017) 579-596.
- [9] Z.-X. Li, Y. Gao, Q. Zhao, A 3D flexure-shear fiber element for modeling the seismic behavior of reinforced concrete columns, *Engineering Structures*, 117(Supplement C) (2016) 372-383.
- [10] R.S. Stramandinoli, H.L. La Rovere, FE model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams considering shear deformation, *Engineering structures*, 35 (2012) 244-253.
- [11] M. Lezgy-Nazargah, An efficient materially nonlinear finite element model for reinforced concrete beams based on layered global-local kinematics, *Acta Mechanica*, 229(3) (2018) 1429-1449.
- [12] S. Limkatanyu, E. Spacone, Reinforced concrete

- frame element with bond interfaces. I: Displacement-based, force-based, and mixed formulations, *Journal of Structural Engineering*, 128(3) (2002) 346-355.
- [13] A. Bazoune, Y. Khulief, N. Stephen, Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element, *Journal of Sound and Vibration*, 259(2) (2003) 473-480.
- [14] K. Maekawa, H. Okamura, A. Pimanmas, *Non-linear mechanics of reinforced concrete*, Spon Press, 2003.
- [15] F.J. Vecchio, M.P. Collins, The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, *Journal of the American Concrete Institute*, 83(2) (1986) 219-231.
- [16] Y. Zhuge, D. Thambiratnam, J. Corderoy, Nonlinear dynamic analysis of unreinforced masonry, *Journal of structural engineering*, 124(3) (1998) 270-277.
- [17] B. Li, Contact density model for stress transfer across cracks in concrete, *Journal of the Faculty of Engineering, the University of Tokyo*, (1) (1989) 9-52.
- [18] M. Soltani, X. An, K. Maekawa, Localized nonlinearity and size-dependent mechanics of in-plane RC element in shear, *Engineering structures*, 27(6) (2005) 891-908.
- [19] R.I. Gilbert, S. Nejadi, *An experimental study of flexural cracking in reinforced concrete members under short term loads*, University of New South Wales, School of Civil and Environmental Engineering, 2004.
- [20] M. Sasani, A. Werner, A. Kazemi, Bar fracture modeling in progressive collapse analysis of reinforced concrete structures, *Engineering Structures*, 33(2) (2011) 401-409.
- [21] A.T. Pham, K.H. Tan, J. Yu, Numerical investigations on static and dynamic responses of reinforced concrete sub-assemblages under progressive collapse, *Engineering Structures*, 149 (2017) 2-20.

#### HOW TO CITE THIS ARTICLE

B. Yousefi, M. R. Esfahani, M. R. Tavakolizadeh, *Proposing an RC Fiber Frame Element Based on Local Stress Field Theory and Bar-Concrete Interaction*. *Amirkabir J. Civil Eng.*, 53(3) (2021) 205-208.

DOI: [10.22060/ceej.2019.16688.6304](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.16688.6304)







## توسعه المان فیبری بتن مسلح مبتنی بر میدان تنش محلی و برهم کنش بتن و آرماتور

بهروز یوسفی، محمدرضا اصفهانی\*، محمدرضا توکلی زاده

گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران.

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸/۰۴/۱۳

بازنگری: ۱۳۹۸/۰۵/۱۳

پذیرش: ۱۳۹۸/۰۵/۱۳

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸/۰۵/۱۸

### کلمات کلیدی:

المان قابی فیبری

ترک پخشی

تیر تیموشنکو

اثرات لغزش-تنش پیوستگی

رویگرد لاگرانژی

**خلاصه:** در این پژوهش، مدلی تحلیلی جهت توسعه روش فیبری مبتنی بر تئوری میدان تنش محلی ارائه می شود. در این راستا، مبانی فرمول بندی مدل فیبری به همراه رویکرد لاگرانژی در کرنش های بزرگ ارائه شده و معادلات حاکم بر المان قابی پیشنهادی در فرم تضعیف شده اجزا محدودی بازنویسی می گردد. همچنین قید پیوستگی کامل بین فیبرهای بتنی و میلگردها برداشته شده و معادلات حاکم بر المان قابی بتن مسلح برای میلگردهای هر لایه به صورت مجزا توسعه می یابد. بازنویسی فرمولی این المان بر مبانی تئوری تیر تیموشنکو به همراه اثرات اندرکنشی محوری، خمشی و برشی در دامنه هر المان بتن مسلح انجام می گیرد. قابل ذکر است، در فرآیند پیاده سازی روش، برهم کنش های محوری و خمشی با کنش های برشی همراه با وارد شدن مستقیم عبارات های مربوطه در ماتریس سختی سویی مقطع المان فیبری در نظر گرفته می شود. بر همین اساس، با استفاده از فاکتور اصلاح برشی مبتنی بر تئوری میدان تنش محلی در توابع هرمیتی، حل غیرخطی مستقیم تکراری برای هر گام بارگذاری انجام می گیرد. صحت سنجی روش تحلیلی ارائه شده با مطالعات آزمایشگاهی موجود بر روی اعضای بتنی مسلح مورد آزمون و ارزیابی قرار گرفته که نتایج حاصل از تحلیل نشان از تقریب نسبتاً مناسب و همگرایی قابل قبول در مسائل را دارد.

### ۱- مقدمه

در سازه های بتنی مفید واقع گردد. تحقیقات جامع گوناگونی برای تخمین رفتار غیرخطی سازه ها به روش درشت مدل سازی توسعه پیدا کرده است که المان های قابی فیبری بیشتر مورد توجه و توسعه قرار گرفته است ([۱]، [۲] و [۳]). بدین منظور روابط و مدل های متعددی جهت تبیین رفتار نیرو-تغییر شکل متناسب با نوع نیروی داخلی در چهار دهه اخیر توسط محققین ارائه شده است. در سازه های بتن مسلح این مدل ها متناسب با رفتارهای خمشی، برشی، اندرکنش نیروی محوری و خمشی، اندرکنش لغزش میلگرد و رفتار برشی، اندرکنش رفتار خمشی و عامل بیرون کشیدگی میلگرد در بتن مسلح تعریف شده اند که در قالب دو نوع فرمول بندی مبتنی بر کنترل نیرویی ([۴-۶]) و کنترل جابه جایی ([۷-۹]) قابل بیان است. اگرچه در برخی از این مدلها اثر اندرکنش نیروی محوری و خمش لحاظ شده است،

گام اساسی و ضروری در ارزیابی رفتاری سازه های بتن مسلح تعیین خصوصیات ذاتی اجزای سازه می باشد. این ویژگی ها شامل تخمین قابل قبولی از بیشینه ظرفیت، سختی اولیه سازه و شکل پذیری های محلی و کلی می باشد. به طور کلی مدل سازی سازه های بتنی به دو روش ریزمدل سازی و درشت مدل سازی تقسیم بندی می شود. در مدل سازی و تحلیل غیرخطی سازه ها به خصوص در ابعاد بزرگتر، روش ریزمدل سازی با وجود دقت مناسب در نمایش پاسخ ها و نشان دادن وضعیت خرابی و مسیر گسیختگی بصورت دقیق، بدلیل هزینه زمانی کاربرد کمتری دارد، به همین دلیل روش درشت مدل سازی، با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی ناهمسانگرد، می تواند برای تحلیل اجزای واقع

\* نویسنده عهده دار مکاتبات: esfahani@um.ac.ir

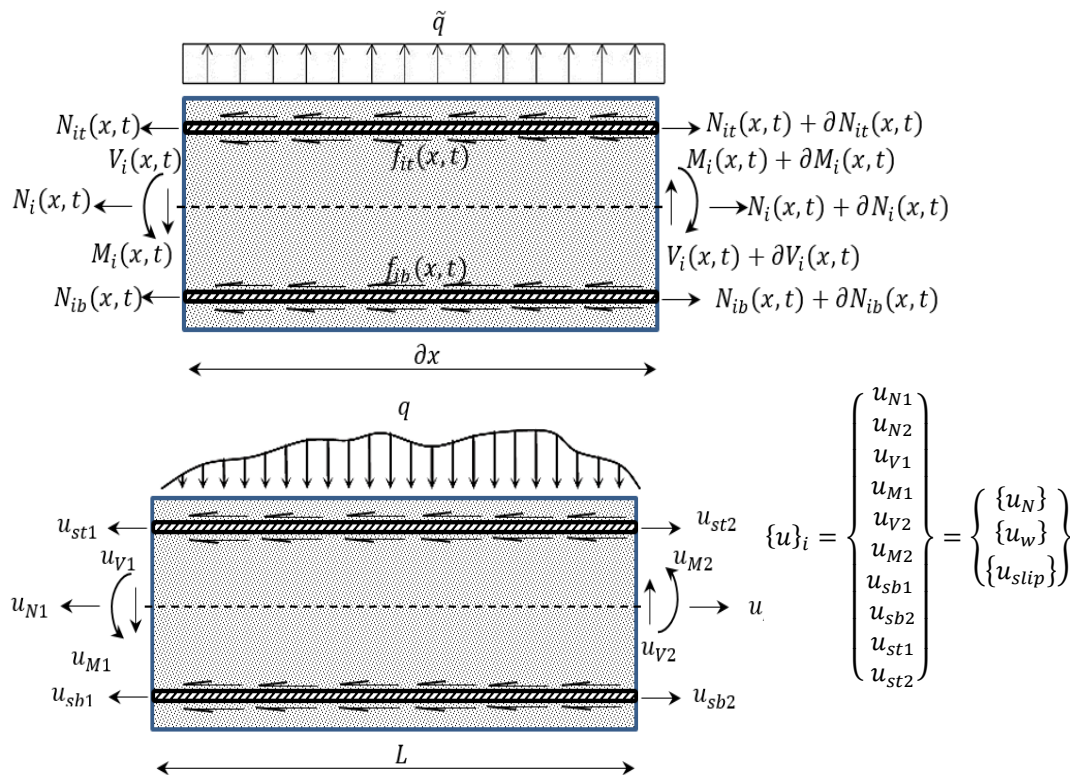


هر لایه به صورت مجزا تعریف شده و بازنویسی فرمولی این المان بر مبنای تئوری تیر تیموشنکو به همراه اثرات اندرکنشی محوری، خمشی و برشی در دامنه هر المان پیاده‌سازی گردیده است. قابل به ذکر است، در فرآیند پیاده‌سازی روش، با تعریف درجات آزادی مجزا برای مجموعه المان‌های بتنی و میله‌ای (آرماورها)، لغزش حاکم در رشته میله‌ای لحاظ می‌گردد و رویکرد ترک پخشی مبتنی بر میدان تنش محلی اجزا بتن مسلح جهت در نظرگیری رفتار برشی المان در نظر گرفته شده است.

## ۲- فرمول‌بندی المان تیرستونی غیرخطی ۱-۲- معادلات حاکم بر المان قابی

مطابق با تئوری حاکم بر این پژوهش، رفتار یک المان قابی در حالت دوبعدی کلی شامل اثرات نیروی محوری به همراه خمش تحت بار یکنواخت ( $q$ ) بوده که شامل نیروهای محوری مقطع و میله‌های مسلح‌کننده با درجات آزادی جداگانه می‌باشد. قابل به ذکر است توزیع بار اعمالی در طول یک المان به میزان  $XO$  با تقریب نسبی، یکنواخت در نظر گرفته شده است. بنابراین، دیاگرام آزاد یک جزء المان قابی بتن مسلح و میله‌ها در شکل ۱ نمایش داده شده و روابط

ولی به دلیل پیچیده شدن عوامل تأثیرگذار در رفتار آنها از جمله لحاظ نمودن اثرات لغزش-تنش پیوستگی محلی، امکان پیاده‌سازی یک مدل تحلیلی برای آن بسیار مشکل می‌شود. جهت اعمال اثر برهم کنش بتن و میلگردهای مسلح‌کننده در روش‌های تحلیلی دو روش عمده قابل بررسی است. یکی از این روش‌ها، اعمال این اثر به صورت معادل در رفتار مصالح بتن و میلگردها و اصلاح مدل‌های رفتاری آنها می‌باشد (روش ارائه شده توسط Hsu و Belarbi [۱۰] و Kwak و Kim [۱۱]). از تحقیقات دیگر نیز، پیاده‌سازی فرمول‌بندی‌های حاکم بر مسأله براساس مدل‌سازی اندرکنش بتن و میلگرد به صورت مجزا و تعریف یک مدل عددی برای اثر آنها روی یکدیگر است ([۱۲-۱۴]). اغلب پژوهش‌های مذکور دقیق بوده و در صورت بکارگیری آن‌ها در مدل تحلیلی، اندرکنش بتن و میلگرد در فرمول‌بندی وارد می‌شود. از این میان مدل تحلیلی Limkatanyu و Spacone [۱۳] جهت توسعه روش و تعمیم آن در فرمول‌بندی اجزا محدودی حاکم بر مسأله انتخاب شده است. در این پژوهش، ضمن توسعه این المان، مبانی فرمول‌بندی مدل رشته‌ای به همراه رویکرد لاگرانژی در فرم تضعیف شده مدل اجزا محدود در کرنش‌های بزرگ ارائه شده است. همچنین معادلات حاکم بر المان قابی بتن مسلح برای میلگردهای



شکل ۱. دیاگرام آزاد و درجات آزادی مفروضه جزء پیشنهادی المان قابی بتن مسلح

Fig. 1. Dynamic free body diagram and proposed degree of freedom of frame element

$$-\frac{\partial V_i(x,t)}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 V_i(x,t)}{\partial t^2} + q \quad \therefore \quad \frac{\partial N_i(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$-\frac{\partial^2 M_i(x,t)}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 V_i(x,t)}{\partial t^2} + q \quad \therefore \quad -\frac{\partial N_i^{bars}(x,t)}{\partial x} + f_i^{bars}(x,t) = 0$$

$$N_i(x,t) = \int_A \sigma_c dA + \sum_j (As_{jb} \sigma s_{jb} + As_{jt} \sigma s_{jt}) \quad \therefore \quad V_i(x,t) = \int_A \tau_{xy} dA = \kappa AG \gamma$$

$$M_i(x,t) = \int_A \sigma_c y dA + \sum_j (As_{jb} \sigma s_{jb} y_{jb} + As_{jt} \sigma s_{jt} y_{jt}) \quad (2)$$

$$N_{ib}^{bars}(x,t) = \sum_j (As_{jb} \times \sigma s_{jb}) \quad \therefore \quad N_{it}^{bars}(x,t) = \sum_j (As_{jt} \times \sigma s_{jt})$$

$$f_{ib}(x,t) = \sum_j (\pi \times ds_{jb} \times \tau_{jb}(x,t)) \quad \therefore \quad f_{it}(x,t) = \sum_j (\pi \times ds_{jt} \times \tau_{jt}(x,t))$$

به تعداد میلگرد در هر رشته می‌باشد. همچنین  $As \cdot ds \cdot \sigma s$  و  $\tau$  به ترتیب سطح مقطع مجموعه میله‌های هر لایه، محیط مقطع مجموعه میله‌های هر لایه، تنش متوسط محوری هر میلگرد و تنش پیوستگی طولی محلی در هر المان تعریف می‌گردد. علاوه بر آن، متغیر  $K_y$  ضریب اصلاح تنش برشی جهت احتساب توزیع غیریکنواخت این تنش در مقطع و متغیر  $G$  مدول برشی مقطع نسبت به پیکربندی پیشین تغییرشکل است که در ادامه تشریح می‌گردد.

در این پژوهش، با استفاده از توابع شکل المان مرجع، گسسته‌سازی متغیرها انجام شده است. روش‌های متعددی برای تعیین معادلات توابع شکل تاکنون معرفی گردیده است که از بارزترین آن‌ها می‌توان به روش مستقیم، چند جمله‌ای‌های لاگرانژ، روش آیرون، حاصل ضرب خطوط، توابع هرمیتی، برهم‌نهی و ... اشاره نمود. در این پژوهش تابع‌های شکل جزء تیر دو گرهی با چهار درجه آزادی درجه سوم ارائه شده توسط Bazoune و همکاران [۱۵] به صورت معادله‌های (۳) و (۴) در نظر گرفته شده است. شایان ذکر است با توجه به محدود بودن گسترش این توابع، از توابعی استفاده شده است که کارایی و سازگاری در اجزای مستوی محوری- خمشی را داشته باشند.

$$a_d(x) = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & 0 & 0 & \varphi_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_3(x) & \varphi_4(x) & 0 & \varphi_5(x) & \varphi_6(x) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad \therefore \quad \varphi_2(x) = \frac{x}{L}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{\Phi_z} \left( 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \Phi_z \right) \quad \therefore \quad \varphi_4(x) = \frac{1}{2\Phi_z} \left( 2L \left( \frac{x}{L} \right)^3 - (3 + \Phi_z)L \left( \frac{x}{L} \right)^2 + (1 + \Phi_z)(x) \right)$$

$$\varphi_5(x) = \frac{1}{\Phi_z} \left( -2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + (\Phi_z - 1) \left( \frac{x}{L} \right) \right) \quad (4)$$

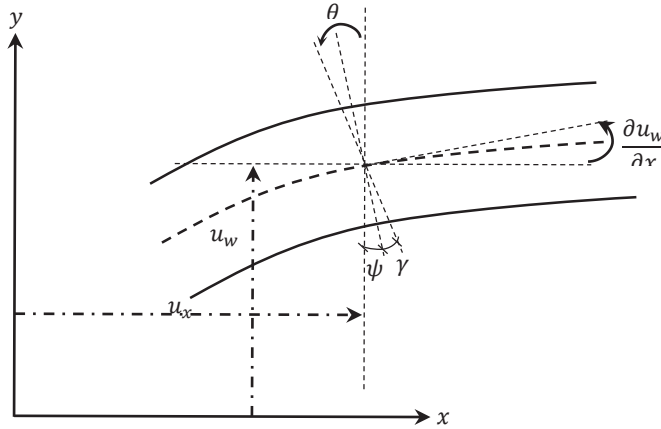
$$\varphi_6(x) = \frac{1}{2\Phi_z} \left( 2L \left( \frac{x}{L} \right)^3 + (\Phi_z - 3)L \left( \frac{x}{L} \right)^2 + (1 - \Phi_z)(x) \right)$$

حاکم تعادلی نیروهای داخلی بازنویسی می‌گردد. همچنین المان تیرستونی پیشنهادی به طول  $L$  دارای حداقل ۵ درجه آزادی در هر گره بوده که شامل درجات آزادی انتقالی افقی ( $u_N$ )، انتقالی قائم ( $u_V$ )، دوران حول محور ( $u_M$ ) و  $Z$  و دو درجه مربوط به رشته‌های میله‌ای فوقانی ( $u_{st}$ ) و تحتانی ( $u_{sb}$ ) مطابق شکل ۱ می‌باشد.

در ادامه، روابط تعادل در جهت قائم ( $Y$ )، لنگر حول محور ( $Z$ ) و تعادل محوری المان بتنی و میلگرد  $I_m$  در جهت  $X$  مطابق روابط (۱) قابل استخراج است.

در مقیاس المان، نیروهای مقاوم گرهی المان قابی بتن مسلح شامل نیروهای داخل محوری ( $N_i(x,t)$ )، خمشی ( $M_i(x,t)$ )، برشی ( $V_i(x,t)$ ) بخش بتنی، نیروهای داخلی محوری میلگردهای تحتانی ( $N_{ib}^{bars}(x,t)$ ) و فوقانی ( $N_{it}^{bars}(x,t)$ ) با تنش‌های پیوستگی محلی نظیر آن در مجموعه رشته‌های تحتانی ( $f_{ib}(x,t)$ ) و فوقانی ( $f_{it}(x,t)$ ) مطابق روابط (۲) قابل تعریف است. این روابط از جمع اثر بخش بتنی و میلگردها با فاصله مرکز سطح هر رشته تا تار خنثی مقطع ( $y_{nf}$ ) حاصل می‌گردد.

که در روابط فوق،  $I$  شمارنده مربوط به المان و  $J$  شمارنده مربوط



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_x^0 - y \sin \theta \\ u_y^0 + y \cos \theta - y \end{bmatrix} \\ \theta &= \frac{\partial V_i(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u_w}{\partial x} = \psi + \gamma \\ 1 + u'_x &= s' \cos \psi \quad \therefore \quad u'_y = s' \sin \psi \\ s' &= \frac{ds}{dX} = \sqrt{(1 + u'_x)^2 + u'^2_y} \\ s' &\approx \frac{L}{L_0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 + u'_x \approx \frac{L}{L_0} \cos \psi \\ u'_y \approx \frac{L}{L_0} \sin \psi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

شکل ۲. پیکربندی تیر و مختصات سیستم و روابط سینماتیکی حرکتی

Fig. 2. Beam description and coordinate system and kinematics relations

یک نقطه دلخواه از یک المان قابی مبتنی بر تیر تیموشنکو، با استفاده از میدان‌های جابه‌جایی محوری و جانبی تارخشی و دوران مقطع مطابق شکل ۲ قابل بیان است.

بر طبق تئوری تیموشنکو علاوه بر صفحه باقی‌ماندن سطح مقطع، میزان دوران با اثر تنش برشی تشدید می‌شود. همچنین روابط هندسی حاکم در پیکربندی جاری تحلیل و نمایه مشتق در روابط نسبت به متغیر  $X$  مطابق روابط واقع در شکل ۲ تعریف می‌شود.

در ادامه، تغییرشکل سطح هر المان به جابه‌جایی گرهی ارتباط داده شده و تانسور کرنش گرین لاگرانژ<sup>۲</sup> ( $\bar{\epsilon}$ ) با استفاده از کرنش‌های غیر صفر محوری ( $\epsilon_{xx}$ ) و برشی ( $\epsilon_{yx}$ ) مطابق رابطه (۶) بیان می‌گردد: که در روابط فوق، بردار سه کمیتی معرفی شده، به ترتیب توصیف‌کننده کرنشی محوری ( $\epsilon$ )، برشی ( $\gamma$ ) و انحنا ( $\kappa$ ) می‌باشد. همچنین با توجه به میدان جابه‌جایی در پیکربندی کنونی تحلیل، کرنش گرین لاگرانژ با جمع اثر بخش بتنی و میلگردها حاصل می‌گردد:

که در روابط فوق،  $S$  شمارنده مربوط به فیبر میلگرد در مقطع المان، مقدار کل لغزش میلگرد  $S$  ام می‌باشد. قابل به ذکر است با استفاده از روابط (۸) و با استفاده از مدل‌های رفتاری المان بتن مسلح، روابط (۸) به صورت تابعی از روابط مذکور بیان می‌گردد:

$$\bar{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ 2\epsilon_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e - y\theta' \\ \gamma \end{Bmatrix} \therefore u_{slip} = u_{xi}^s - u_{xi} = u_{xi}^s - u_x^0 - y \sin \theta \quad (6)$$

$$\begin{Bmatrix} e \\ \gamma \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1 + u'_x) \cos \theta + u'_y \sin \theta - 1 \\ -(1 + u'_x) \sin \theta + u'_y \cos \theta \\ \theta' \end{Bmatrix} \therefore \sin \theta = \frac{\partial u_w}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2} = \kappa \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{\partial^2 u_w}{\kappa \partial x^2} \quad (7)$$

که متغیر  $\Phi_z$  پارامتر تغییرشکل برشی و یا لاغری برشی<sup>۱</sup> و  $EI_z$  صلیبیت المان فیبری قابی می‌باشد که به صورت رابطه (۵) تعریف می‌گردد:

$$\Phi_z = 1 + \frac{12EI_z}{\kappa_y G A L^2} \therefore EI_z = \sum_{n_f=1}^{n_{tf}(x)} E n_f \gamma n_f^2 \quad (5)$$

متغیر  $\kappa_y$  ضریب اصلاح تنش برشی جهت احتساب توزیع غیریکنواخت این تنش در مقطع تعریف می‌گردد. بحث تفصیلی ارزیابی این ضریب در پژوهش‌های متعددی عنوان گردیده است (Puchegger و همکاران [۱۶]، Yu و Hodges [۱۷]، Hutchinson [۱۸]، Dong و همکاران [۱۹]، Chan و همکاران [۲۰]). فصل مشترک این پژوهش‌ها بر مبنای مطالعات کلاسیک تیموشنکو [۲۱] برای مقاطع مستطیلی شکل با نسبت پواسون (۵) دلخواه،  $\kappa_y = 0.833$  در نظر گرفته شده است. همچنین، متغیر  $G$  مدول برشی مقطع نسبت به پیکربندی پیشین تغییرشکل می‌باشد که جهت محاسبه این پارامتر از روش تئوری میدان تنش محلی معرفی شده توسط سلطانی و همکاران [۲۲] بهره گرفته شده است. در ادامه، روابط سینماتیکی حرکتی المان تشریح می‌گردد. میدان جابه‌جایی

2 Green-Lagrange (GL)

1 shear slenderness



$$\varepsilon_{xx}^{concrete} = \left[ \left( \frac{L}{L_0} \cos \psi \right) \cos \theta + \left( \frac{L}{L_0} \sin \psi \right) \sin \theta - 1 \right] - y\kappa = \left[ \left( 1 + \frac{\partial u_N}{\partial x} \right) \left( \frac{\kappa}{\frac{\partial^2 u_w}{\partial x^2}} \right) - 1 \right] - Y\kappa \quad (8)$$

$$\varepsilon_{xx}^{bars} = \varepsilon_{xx}^{concrete} + \frac{\partial u_{slip}}{\partial x}$$

استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

با جایگزینی روابط (۲) و (۹) در روابط فوق، معادلات حاکم در

فرم تضعیف شده به ترتیب به صورت زیر بیان می‌گردد:

همان‌طور که پیش از این عنوان شد، گسسته‌سازی مقطع بر روی

المان‌های قابی مبتنی بر فرمول‌بندی تیموشنکو جهت لحاظ کردن

اثرات تغییرشکل‌های برشی انجام می‌گیرد. همچنین مطابق رویه

حاکم در تئوری فیبری، تقسیم‌بندی هر مقطع بتنی به چندین رشته،

برای فیبر بتنی آام مشخصه‌هایی از قبیل سطح مقطع، موقعیت مرکز

فیبر در مختصات مقطع محاسبه شده و به طور کلی هندسه سلول‌های

انتخابی در گروه‌های فیبری جمع می‌شود. جهت انتگرال گیری عددی

در مقیاس یک سطح مقطع از یک المان، روش‌های متعددی از جمله

$$\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon_{xx}^{concrete})$$

$$\sigma_s = \sigma_s(\varepsilon_{xx}^{bars}) \quad (9)$$

$$\tau = \tau(u_{slip})$$

## ۲-۲- فرم تضعیف شده روابط حاکم در محیط اجزا محدود

در این بخش، جهت استخراج معادلات حاکم بر سینماتیک

حرکتی المان، فرم روابط حاکم ذکر شده در بخش ۲-۱ در قالب

فرم تضعیف شده بیان می‌گردد. با بهره‌گیری از تابع آزمون دلخواه

وابسته به تغییرمکان‌های گرهی هر جهت و انتگرال گیری روی محیط

جزء محدود المان، شرایط تعادل ارضا خواهد شد. این تابع آزمون<sup>۱</sup> به

صورت  $\delta u_{slip}^t$  و  $\delta u_N$ ،  $\delta u_w$ ،  $\delta u_{slip}^b$  در روابط

حاکم ضرب می‌گردد. در ادامه جهت ساده‌سازی روابط مذکور، با

$$\int_L N_i(x, t) \frac{\partial \delta u_N}{\partial x} dx = [\delta u_N N_i(x, t)]_0^L \quad (10)$$

$$- \int_L M_i(x, t) \frac{\partial^2 \delta u_w}{\partial x^2} dx = \int_L \delta u_w \left( \rho A \frac{\partial^2 V_i(x, t)}{\partial t^2} + q \right) dx - \left[ \frac{\partial \delta u_w}{\partial x} M_i(x, t) \right]_0^L + [\delta u_w V_i(x, t)]_0^L \quad (11)$$

$$\int_L N_{ib}^{bars}(x, t) \frac{\partial \delta u_{slip}^b}{\partial x} dx - \int_L \delta u_{slip}^b f_{ib}^{bars}(x, t) dx = [\delta u_s^b N_{ib}^{bars}(x, t)]_0^L \quad (12)$$

$$\int_L N_{it}^{bars}(x, t) \frac{\partial \delta u_{slip}^t}{\partial x} dx + \int_L \delta u_{slip}^t f_{it}^{bars}(x, t) dx = [\delta u_s^t N_{it}^{bars}(x, t)]_0^L \quad (13)$$

$$\int_L \frac{\partial \delta u_N}{\partial x} \left[ \int_A \sigma_c dA + \sum_j (A_{s_{jb}} \sigma_{s_{jb}} + A_{s_{jt}} \sigma_{s_{jt}}) \right] dx = [\delta u_N N_i(x, t)]_0^L \quad (14)$$

$$- \int_L \frac{\partial^2 \delta u_w}{\partial x^2} \left[ \int_A \sigma_c y dA + \sum_j (A_{s_{jb}} \sigma_{s_{jb}} y_{jb} + A_{s_{jt}} \sigma_{s_{jt}} y_{jt}) \right] dx \\ = \int_L \delta u_w \left( \rho A \frac{\partial^2 V_i(x, t)}{\partial t^2} + q \right) dx - \left[ \frac{\partial \delta u_w}{\partial x} M_i(x, t) \right]_0^L + [\delta u_w V_i(x, t)]_0^L \quad (15)$$

$$\int_L \frac{\partial \delta u_{slip}^b}{\partial x} \left[ \sum_j (A_{s_{jb}} \times \sigma_{s_{jb}}) \right] dx + \int_L \delta u_{slip}^b \left[ \sum_j (\pi \times ds_{jb} \times \tau_{jb}(x, t)) \right] dx = [\delta u_{slip}^b N_{ib}^{bars}(x, t)]_0^L \quad (16)$$

$$\int_L \frac{\partial \delta u_{slip}^t}{\partial x} \left[ \sum_j (A_{s_{jt}} \times \sigma_{s_{jt}}) \right] dx + \int_L \delta u_{slip}^t \left[ \sum_j (\pi \times ds_{jt} \times \tau_{jt}(x, t)) \right] dx = [\delta u_{slip}^t N_{it}^{bars}(x, t)]_0^L \quad (17)$$

1 Test function

$$\begin{aligned} \{\bar{u}_N\} &\approx N_N \begin{Bmatrix} u_{N1} \\ u_{N2} \end{Bmatrix}_i \quad \therefore N_N = [\varphi_1(x) \quad \varphi_2(x)] \\ \{\bar{u}_w\} &\approx N_w \begin{Bmatrix} u_{V1} \\ u_{M1} \\ u_{V2} \\ u_{M2} \end{Bmatrix}_i \quad \therefore N_w = [\varphi_3(x) \quad \varphi_4(x) \quad \varphi_5(x) \quad \varphi_6(x)] \\ \{\bar{u}_{slip}\} &\approx N_{slip} \begin{Bmatrix} u_{sb1} \\ u_{sb2} \\ u_{st1} \\ u_{st2} \end{Bmatrix}_i \quad \therefore N_{slip} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \{\bar{u}_w\} &\approx N_w \{u_w\} \rightarrow \frac{\partial \bar{u}_w}{\partial x} = \dot{N}_w \{u_w\} \\ \frac{\partial^2 \bar{u}_w}{\partial x^2} &= B_w \{u_w\} \end{aligned} \quad (19)$$

همچنین در راستای ساده‌سازی روابط، معادلات حاکم در فرم تضعیف شده اجزا محدودی با استفاده از توابع آزمون دلخواه قابل بازنویسی است. این توابع به صورت توابع وزنی  $\delta u_N$ ،  $\delta u_w$ ،  $\delta u_{slip}$  و  $\delta u_{slip}$  در نظر گرفته شده که به ترتیب نمایانگر میزان جابه‌جایی مجازی سیستم در جهت  $u_N$ ،  $u_w$ ،  $u_{slip}$  و  $u_{slip}$  می‌باشد. روش‌های متعددی جهت انتخاب توابع وزنی موجود است که از جمله می‌توان به روش گالرکین<sup>۶</sup>، روش هم‌محلی نقطه‌ای<sup>۷</sup>، روش هم‌محلی زیردامنه<sup>۸</sup> و روش حداقل مربعات<sup>۹</sup> اشاره کرد. در این پژوهش با توجه به کاربردی بودن روش و همچنین سازگاری با فرمول‌بندی سیستم، روش گالرکین انتخاب می‌شود. مزیت اصلی این روش، انتخاب توابع وزنی مشابه توابع شکل سیستم است. بنابراین خواهیم داشت (روابط ۲۰):

که در روابط فوق،  $\{u_N\}_i$ ،  $\{u_w\}_i$  و  $\{u_{slip}\}_i$  میزان جابه‌جایی مجازی سویی به صورت اسکالر در المان  $\bar{\Omega}$  می‌باشند. در ادامه با توجه به آنچه عنوان شد، روابط حاکم بر سیستم با استفاده از توابع وزنی انتخابی بازنویسی می‌گردد. بدین منظور معادلات (۱۴) تا (۱۷) به صورت زیر جهت استخراج بردار نیروهای داخلی المان بتن مسلح ساده‌سازی می‌گردد:

بنابراین بردار نیروهای داخلی المان مطابق رابطه (۲۴) خلاصه می‌گردد:

$$\{f_{int}\} = \{f_{ext}\} \rightarrow \begin{Bmatrix} \{f_{int}^N\} \\ \{f_{int}^w\} \\ \{f_{int}^{slip}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_{ext}^N\} \\ \{f_{ext}^w\} \\ \{f_{ext}^{slip}\} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

مجموعه روش‌های مربعات گاوسی<sup>۱</sup>، دوزنقه‌ای مرکب<sup>۲</sup> و سیمپسون<sup>۳</sup> وجود دارد. روش‌های گاوسی در دو دسته روش گاوس لوباتو<sup>۴</sup> و گاوس لوژاندر<sup>۵</sup> قابل تقسیم‌بندی است. در این مقاله، از رویکرد مربعات گاوسی مبتنی بر روش گاوس لوباتو بهره گرفته شده است. مزیت روش گاوس لوباتو نسبت به دیگر روش‌ها، در قابلیت انتخاب نقاط انتگرال‌گیری در رشته‌های مجاورت سطح در خارجی‌ترین موقعیت نسبت به سطح مقطع گسسته شده است. از طرف دیگر، برای  $n$  نقاط انتگرال‌گیری عددی، از مجموعه چندجمله‌ای‌های با مرتبه پایین‌تر از درجه  $2n-3$  در قیاس با دیگر روش‌های گاوسی که دارای درجه  $2n-1$  هستند، استفاده می‌شود. قابل به ذکر است در محدوده عنوان شده رفتار غیرخطی مواد با توجه به توزیع خطی کرنش بیشینه بوده و روش انتخابی بایستی قابلیت لحاظ این رفتار را داشته باشد. همچنین نقاط انتگرال‌گیری با مرتبه پایین‌تر منجر به کارآمدی بهتر روش در الگوریتم تحلیلی غیرخطی خواهد شد. با توجه به پیوسته بودن معادلات حاکم در حوزه المان، روابط (۱۴) تا (۱۷) بایستی تغییرمکان‌ها به صورت درون‌یابی از تغییرمکان‌های گرهی توسط توابع شکل در نظر گرفته شود. با حصول میدان‌های برداری جابه‌جایی و کرنش‌ها، بردار تنش با در نظر گرفتن مدل‌های رفتاری اختصاصی مصالح به هر فیبر بدست می‌آید. سپس با استفاده از توابع شکل المان مرجع، گسسته‌سازی متغیرها انجام شده است. روش‌های متعددی برای تعیین معادلات توابع شکل تاکنون معرفی گردیده است که در ادامه مطابق با شرایط مرزی حاکم بر المان پیشنهادی، توابع شکل به صورت روابط (۱۸) تعریف می‌گردد.

که در روابط فوق،  $S$  شمارنده مربوط به فیبر میلگرد در مقطع المان،  $u_{x_i}^s$  مقدار کل لغزش میلگرد  $S$  ام می‌باشد.

- 1 Gaussian quadrature
- 2 Composite trapezoidal method
- 3 Simpson rule
- 4 Gauss-Lobatto
- 5 Gauss-Legendre

- 6 Galerkin's method
- 7 Point collocation method
- 8 Subdomain collocation method
- 9 Least-squares method

$$\begin{aligned} \delta u_N &\approx N_N \left\{ \begin{matrix} \widetilde{u}_{N1} \\ \widetilde{u}_{N2} \end{matrix} \right\}_i \rightarrow \left\{ \frac{\partial \delta u_N}{\partial x} \right\} \approx \frac{\partial N_N}{\partial x} \left\{ \begin{matrix} \widetilde{u}_{N1} \\ \widetilde{u}_{N2} \end{matrix} \right\}_i = B_N \{ \widetilde{u}_N \}_i \\ \delta u_w &\approx N_w \left\{ \begin{matrix} \widetilde{u}_{V1} \\ \widetilde{u}_{M1} \\ \widetilde{u}_{V2} \\ \widetilde{u}_{M2} \end{matrix} \right\}_i \rightarrow \left\{ \frac{\partial^2 \delta u_w}{\partial x^2} \right\} \approx \frac{\partial^2 N_w}{\partial x^2} \left\{ \begin{matrix} \widetilde{u}_{V1} \\ \widetilde{u}_{M1} \\ \widetilde{u}_{V2} \\ \widetilde{u}_{M2} \end{matrix} \right\}_i = B_w \{ \widetilde{u}_w \}_i \\ \delta u_{slip} &\approx N_{slip} \left\{ \begin{matrix} \widetilde{u}_{sb1} \\ \widetilde{u}_{sb2} \\ \widetilde{u}_{st1} \\ \widetilde{u}_{st2} \end{matrix} \right\}_i \rightarrow \left\{ \frac{\partial \delta u_{slip}}{\partial x} \right\} \approx \frac{\partial N_{slip}}{\partial x} \left\{ \begin{matrix} \widetilde{u}_{sb1} \\ \widetilde{u}_{sb2} \\ \widetilde{u}_{st1} \\ \widetilde{u}_{st2} \end{matrix} \right\}_i = B_{slip} \{ \widetilde{u}_{slip} \}_i \end{aligned} \quad (20)$$

$$\{ \widetilde{u}_N \}_i^T \int_L B_N^T \left[ \int_A \sigma_c dA + \sum_j (A_{S_{jb}} \sigma_{S_{jb}} + A_{S_{jt}} \sigma_{S_{jt}}) \right] dx = \left\{ \begin{matrix} u_{N1} \\ u_{N2} \end{matrix} \right\}_i [N_N^T N_i(x, t)]_0^L \quad (21)$$

$$\begin{aligned} -\{ \widetilde{u}_w \}_i^T \int_L B_w^T \left[ \int_A \sigma_c y dA + \sum_j (A_{S_{jb}} \sigma_{S_{jb}} y_{jb} + A_{S_{jt}} \sigma_{S_{jt}} y_{jt}) \right] dx \\ = \{ \widetilde{u}_w \}_i^T \int_L N_w^T \left( \rho A \frac{\partial^2 V_i(x, t)}{\partial t^2} + q \right) dx - [B_w^T M_i(x, t)]_0^L + [N_w^T V_i(x, t)]_0^L \end{aligned} \quad (22)$$

$$\{ \widetilde{u}_{slip} \}_i^T \int_L B_{slip}^T \left[ \begin{matrix} \sum_j (A_{S_{jb}} \times \sigma_{S_{jb}}) \\ \sum_j (A_{S_{jt}} \times \sigma_{S_{jt}}) \end{matrix} \right] + N_{slip}^T \left[ \begin{matrix} \sum_j (\pi \times ds_{jb} \times \tau_{jb}(x, t)) \\ \sum_j (\pi \times ds_{jt} \times \tau_{jt}(x, t)) \end{matrix} \right] dx \quad (23)$$

عبارت دیگر مشتق سویی درجه نخست روابط (۱۴) تا (۱۷) منجر به تعریفی برای ماتریس سختی سویی خواهد شد. بنابراین سطر نخست ماتریس سختی سویی با استفاده از مشتق سویی رابطه (۱۴) در جهت‌های مختلف به صورت زیر حاصل می‌شود:

در ادامه، ماتریس سختی المان قابی بتن مسلح با استفاده از روابط حاکم در فرم تضعیف شده قابل محاسبه است. بدین منظور با بهره‌گیری از تغییرات مرتبه اول بردار نیروهای داخلی نسبت به کرنش در هر جهت درجه آزادی المان، ماتریس سختی حاصل می‌گردد. به

$$\{ \widetilde{u}_N \}_i^T \int_L \underbrace{\lambda_N \left( \frac{\kappa}{B_w \{ \widetilde{u}_w \}} \right) B_N dx}_{k_{\widetilde{u}_N}^{\widetilde{u}_N}} \{ \Delta \widetilde{u}_N \}_i \therefore \lambda_N = B_N^T \left[ \int_A \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} dA + \sum_j \left( A_{S_{jb}} \frac{\partial \sigma_{S_{jb}}}{\partial \varepsilon} + A_{S_{jt}} \frac{\partial \sigma_{S_{jt}}}{\partial \varepsilon} \right) \right] \quad (25)$$

$$\{ \widetilde{u}_w \}_i^T \int_L \underbrace{-\lambda_N \frac{\kappa(1 + B_N \{ \widetilde{u}_N \})}{\{ B_w \widetilde{u}_w \}^2} B_w dx}_{k_{\widetilde{u}_w}^{\widetilde{u}_w}} \{ \Delta \widetilde{u}_w \}_i \quad (26)$$

$$\{ \widetilde{u}_N \}_i^T \int_L \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_N^s & 0 \\ 0 & \lambda_N^s \end{bmatrix} B_{slip} dx}_{k_{\widetilde{u}_N}^{\widetilde{u}_{slip}}} \{ \Delta \widetilde{u}_{slip} \}_i \therefore \lambda_N^s = B_N^T \left[ \sum_j \left( A_{S_{jb}} \frac{\partial \sigma_{S_{jb}}}{\partial \varepsilon} + A_{S_{jt}} \frac{\partial \sigma_{S_{jt}}}{\partial \varepsilon} \right) \right] \quad (27)$$

همچنین مشتق سویی رابطه (۱۵) در جهت‌های مختلف به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\{ \widetilde{u}_w \}_i^T \int_L \underbrace{-\lambda_w \left( \frac{\kappa}{B_w \{ \widetilde{u}_w \}} \right) B_w dx}_{k_{\widetilde{u}_w}^{\widetilde{u}_w}} \{ \Delta \widetilde{u}_w \}_i \therefore \lambda_w = B_w^T \left[ \int_A \sigma_c y dA + \sum_j (A_{S_{jb}} \sigma_{S_{jb}} y_{jb} + A_{S_{jt}} \sigma_{S_{jt}} y_{jt}) \right] \quad (28)$$

$$\{ \widetilde{u}_w \}_i^T \int_L \underbrace{\lambda_w \frac{\kappa(1 + B_N \{ \widetilde{u}_N \})}{\{ B_w \widetilde{u}_w \}^2} B_w dx}_{k_{\widetilde{u}_w}^{\widetilde{u}_w}} \{ \Delta \widetilde{u}_w \}_i \quad (29)$$

$$\{\widetilde{u}_w\}_i^T \int_L \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_w^s & 0 \\ 0 & \lambda_w^s \end{bmatrix} B_{slip} dx}_{k_{\widetilde{u}_w}^{u_{slip}}} \{\Delta \widetilde{u}_{slip}\}_i \therefore \lambda_w^s = B_w^T \left[ \sum_j (AS_{jb} \sigma S_{jb} \gamma_{jb} + AS_{jt} \sigma S_{jt} \gamma_{jt}) \right] \quad (30)$$

در ادامه محاسبه سطر سوم ماتریس سختی سویی با استفاده از مشتق سویی روابط (۱۶) و (۱۷) صورت می‌پذیرد:

$$\lambda_{slip}^\sigma = \begin{bmatrix} \sum_j \left( AS_{jb} \frac{\partial \sigma S_{jb}}{\partial x} \right) & 0 \\ 0 & \sum_j \left( AS_{jt} \frac{\partial \sigma S_{jt}}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \therefore \lambda_{slip}^\tau = \begin{bmatrix} \sum_j \left( \pi \times ds_{jb} \times \frac{\partial \tau_{jb}}{\partial x} \right) & 0 \\ 0 & \sum_j \left( \pi \times ds_{jt} \times \frac{\partial \tau_{jt}}{\partial x} \right) \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\{\widetilde{u}_{slip}\}_i^T \int_L \underbrace{B_{slip}^T \lambda_{slip}^\sigma \left( \frac{\kappa}{B_w \{\widetilde{u}_w\}} \right) B_N dx}_{k_{\widetilde{u}_{slip}}^{u_N}} \{\Delta \widetilde{u}_N\}_i$$

$$\{\widetilde{u}_{slip}\}_i^T \int_L \underbrace{-B_{slip}^T \lambda_{slip}^\sigma \left( \frac{\kappa(1 + B_N \{\widetilde{u}_N\})}{\{B_w \widetilde{u}_w\}^2} \right) B_w dx}_{k_{\widetilde{u}_{slip}}^{u_w}} \{\Delta \widetilde{u}_w\}_i \quad (32)$$

$$\{\widetilde{u}_{slip}\}_i^T \left( \int_L B_{slip}^T \lambda_{slip}^\sigma B_{slip} dx + \int_L N_{slip}^T \lambda_{slip}^\tau N_{slip} dx \right) \{\Delta \widetilde{u}_{slip}\}_i \quad (33)$$

مدل تحلیلی اتخاذ شده در اینجا برای بتن تحت تنش فشاری، بر اساس مدل الاستوپلاستیک و شکست (EPF) پیشنهاد شده توسط Okamura و Maekawa [۲۳] مطابق شکل ۳ است. قبل از ترک‌خوردگی، بتن به عنوان یک ماده الاستوپلاستیکی مدل‌سازی شده و رفتار مکانیکی آن به عنوان ترکیب پلاستیک و مکانیک شکست پیوسته شناخته شده است. نسبت سختی دو محوری و نسبت پواسون دو محوری یک المان بتن مسلح، بستگی زیادی به شرایط بارگذاری و مسیر رفتاری تنش-کرنش دارد [۲۴]. پس از ترک‌خوردگی بتن، سختی و مقاومت بتن در جهت تنش فشاری در مقایسه با بتن ترک نخورده کاهش می‌یابد و رفتار به سمت تک محوره سوق پیدا می‌کند. بنابراین برای حالت بارگذاری یکنوا تنش فشاری تک محوری به صورت روابط (۳۵) تعریف می‌گردد.

که در این روابط،  $E$  پارامتر مدل که برابر ۲ در نظر گرفته می‌شود،

$$\sigma_{cc} = \omega K_0 E_{c0} (\varepsilon - \varepsilon_p)$$

$$K_0 = \exp \left( -0.73 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \left( 1 - \exp \left( -1.25 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right) \right) \right) \therefore \varepsilon_p = \beta \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} - \frac{20}{7} \left( 1 - \exp \left( -0.35 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} \right) \right) \right) \varepsilon_c \therefore E_{c0} = E_0 \frac{f'_c}{\varepsilon_c} \quad (35)$$

بنابراین ماتریس سختی سویی در هر المان در مختصات محلی

حاصل می‌شود:

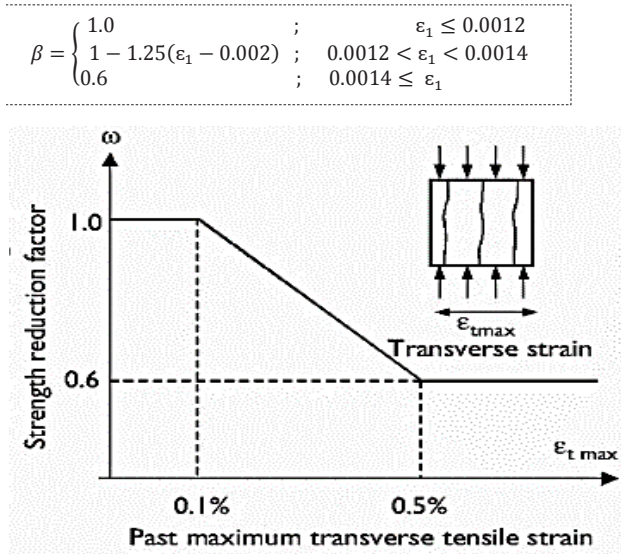
$$\widetilde{K}_{local} = \begin{bmatrix} k_{\widetilde{u}_N}^{u_N} & k_{\widetilde{u}_w}^{u_w} & k_{\widetilde{u}_{slip}}^{u_{slip}} \\ k_{\widetilde{u}_w}^{u_N} & k_{\widetilde{u}_w}^{u_w} & k_{\widetilde{u}_w}^{u_{slip}} \\ k_{\widetilde{u}_{slip}}^{u_N} & k_{\widetilde{u}_{slip}}^{u_w} & k_{\widetilde{u}_{slip}}^{u_{slip}} \end{bmatrix} \quad (34)$$

ماتریس فوق در هر المان سرهم‌بندی شده و پس از انتقال به

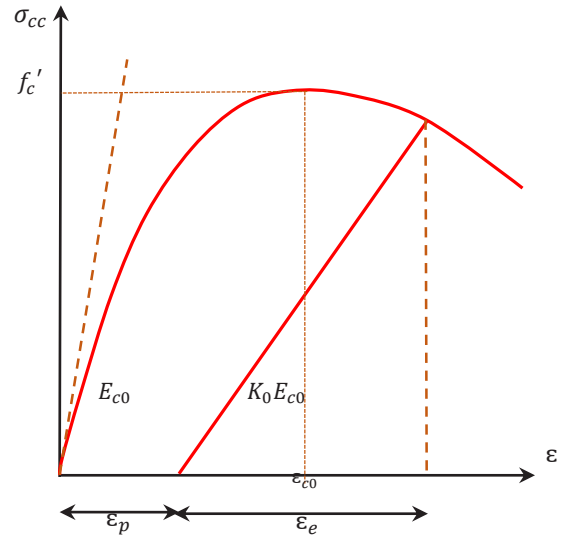
مختصات اصلی، ماتریس سختی سویی کل پیاده‌سازی می‌گردد.

## ۲-۳- خواص مواد و مدل‌های رفتاری بتن مسلح

### ۲-۳-۱- مدل رفتاری المان بتن مسلح تحت تنش فشاری



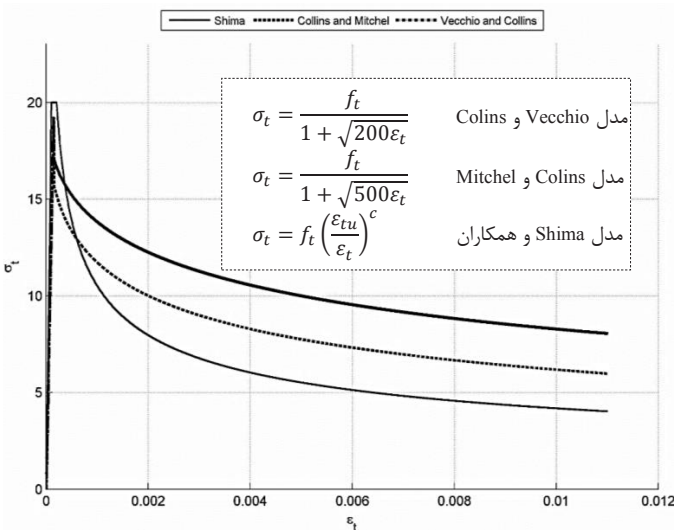
شکل ۴. متغیر نرم‌شدگی فشاری ناشی از ترک‌خوردگی جانبی [۲۳]  
**Fig. 4. Strength reduction factor**



شکل ۳. مدل رفتاری فشاری بتن مسلح  
**Fig. 3. Compressive model of reinforced concrete**

### ۲-۳-۳-۲- مدل رفتاری المان بتن مسلح تحت تنش برشی

ساختار تحلیلی زیربرنامه مدل رفتاری برشی المان بر اساس تابع چگالی تماس ارائه شده توسط Li [۲۸] انجام می‌گیرد. این مدل توانایی شبیه‌سازی رفتاری مکانیزم انتقال تنش از جمله اصطکاک میکروسکوپی سنگدانه‌های بتن، رفتار الاستوپلاستیک سطوح تماس و شکست واحد تماس جهت کنترل مسیر انتقال تنش در طول ترک را دارد. این مدل به طور گسترده در مدل‌سازی رفتارهای برشی بتن مسلح مورد استفاده قرار می‌گیرد که جزئیات آن در [۲۹] بیان گردیده است. برای بتن مسلح با نسبت آرماتور نرمال که ترک‌های بسیاری در حوزه المان بتن مسلح رخ دهد، مدل رفتاری برشی به

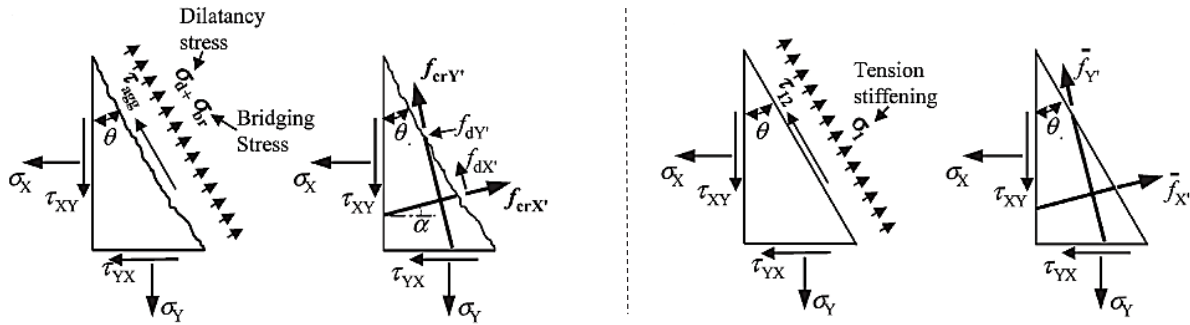


شکل ۵. مدل‌های رفتاری سخت‌شدگی کششی بتن مسلح  
**Fig. 5. Tension stiffening model**

متغیر  $\beta$  برای بارگذاری با نرخ کرنش کم برابر با یک اختیار می‌شود،  $f'_c$  مقاومت فشاری استوانه‌ای،  $\varepsilon_c$  کرنش متناظر با مقاومت نهایی بتن و  $\omega$  ضریب نرم‌شدگی بتن ناشی از ترک‌خوردگی جانبی مطابق شکل ۴ است که در حالت فشار تک‌محوری برابر با یک می‌باشد.

### ۲-۳-۲- مدل رفتاری المان بتن مسلح تحت تنش کششی

در این مدل برای اعضای بتن مسلح، تنش انتقال یافته در بتن ترک خورده همراه با مشارکت کامل تنش پیوستگی آرماتور با رویکرد ترک پخشی در نظر گرفته شده است. با توجه به تحمل نیروی کششی در فاصله‌ی میان ترک‌ها، همواره انتقال این نیرو به واسطه‌ی چسبندگی میان بتن و میلگردها وجود دارد. این امر سختی کششی بعد از ترک‌خوردگی را از سختی کششی میلگرد تنها بیشتر کرده و افزایش ظرفیت کششی بتن را حاصل می‌نماید. بر این اساس رابطه میان تنش متوسط و کرنش متوسط در حالت تک محوری و تست کشش در مطالعات متعدد گذشته مورد توجه قرار گرفته است (Colins و Vecchio [۲۵]، Mitchel و Colins [۲۶] و Shima و همکاران [۲۷]). در ادامه سه مدل سخت‌شدگی کششی در زیربرنامه اصلی برنامه تحلیلی مطابق شکل ۵ پیاده‌سازی شده است که فرایند حل روی یک مدل انتخابی انجام می‌پذیرد:



شکل ۶. دیاگرام تنش واقعی (سمت چپ) و متوسط (سمت راست) المان بتن مسلح [۲۹]  
**Fig. 6. Stress diagram of (Left) real state, (Right) average state of RC element**

فولاد می‌گردد. تسلیم‌شدن یک المان صفحه‌ای بتن مسلح، نقطه‌ای تعریف می‌شود که سختی کششی المان به طور کامل شروع به کاهش کرده و متناظر با آن تنش فولاد در صفحه ترک به مقاومت تسلیم برسد. مفاهیم اصلی این بخش در مرجع [۲۳] مورد توجه قرار گرفته است. در این پژوهش، مدل رفتاری مورد استفاده در تنش‌های کشش، از مدل متوسط تنش-کرنش متوسط چهار خطی ارائه شده توسط Salem [۳۰] (شکل ۷) و در تنش‌های فشاری از مدل سه خطی Shima [۳۱] (شکل ۸) بهره گرفته شده است.

صورت روابط (۳۶) تعریف می‌گردد:

$$\tau_{agg} = 3.83 f_c^{1/3} \left( \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right) \therefore \beta = \frac{\gamma}{\varepsilon_1} \quad (36)$$

$$\sigma_d = 3.83 f'_c{}^{1/3} \left( \frac{\pi}{2} - \cot^{-1} \beta - \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \right)$$

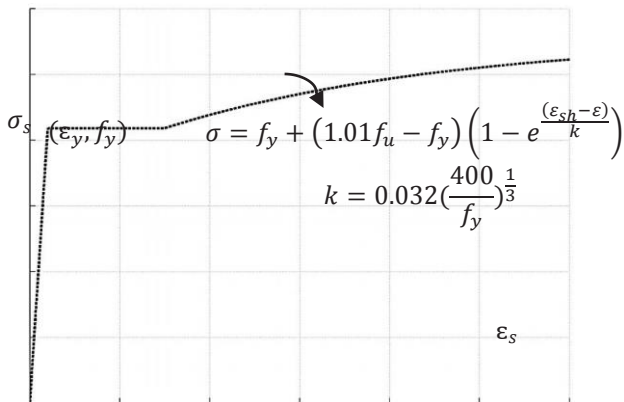
که در این روابط،  $\gamma$  کرنش برشی،  $\varepsilon_1$  کرنش کششی عمود بر سطح ترک،  $\tau_{agg}$  مقاومت برشی و  $\sigma_d$  تنش نرمال عمود بر ترک می‌باشد.

### ۲-۳-۵- مدل رفتاری لغزش-تنش پیوستگی بین بتن و میلگرد

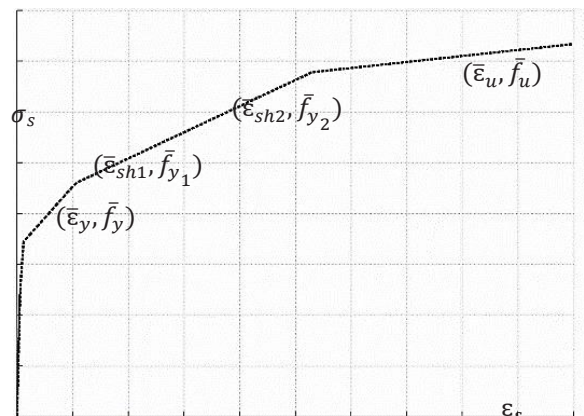
همان‌طور که پیش از این مطرح شد، شبیه‌سازی رفتاری بتن و میلگردها و سطوح تماس آن‌ها در توصیف مناسب رفتار سازه‌های بتن مسلح از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اثرات این مدل بیشتر در مقیاس تنش‌های محلی المان نظیر انرژی شکست بتن در نظر

### ۲-۳-۴- مدل رفتاری میلگردهای مسلح‌کننده در بتن

با توجه به اثرات سخت‌شدگی کششی بتن، رفتار آرماتورهای هر فیبر در محل وقوع ترک تغییر کرده و رفتار غیرخطی تنش متوسط-کرنش متوسط فولاد تنها از بین رفته و جاری‌شدگی آرماتور مجاور ترک منجر به کمتر شدن مقاومت تسلیم نسبت به تنش متوسط



شکل ۸. مدل رفتاری فولاد تنها، منحنی سه خطی Shima  
**Fig. 8. Bare-bar model proposed by Shima**



شکل ۷. مدل متوسط آرماتور در بتن منحنی چهار خطی Salem  
**Fig. 7. Average steel bar model proposed by Salem**

$$\tau_{b1} = \tau_{b2} = \left(20 - \frac{d_s}{4}\right) \left(\frac{f'_c}{30}\right)^{0.5} \quad (MPa)$$

$$\tau_{bf} = \left(5.5 - 0.07 \frac{S_s}{H_s}\right) \left(\frac{f'_c}{27.6}\right)^{0.5} \quad (MPa) \quad (38)$$

$$d_{b1} = \left(\frac{f'_c}{30}\right)^{0.5} \quad (mm)$$

در این روابط،  $S_s$  و  $H_s$  به ترتیب ارتفاع و فاصله دندان‌های میلگردها به واحد میلی‌متر تعریف شده که با توجه به قطرهای مختلف میلگرد تعیین می‌شود [۲۳]. جزئیات این منحنی مدل رفتاری برای شرایط بارگذاری یکنوا و چرخه‌ای در شکل ۹ آورده شده است. لازم به ذکر است روابط فوق‌الذکر در شرایطی که فشار محصورشوندگی در اطراف میلگردها به مقدار کافی وجود داشته باشد، اعتبار دارند.

در ادامه، جهت راستی‌آزمایی مدل لغزش-تنش پیوستگی بین بتن و میلگرد و اصلاح مدل رفتاری میلگرد و بر هم کنش آن با بتن، دو تست آزمایشگاهی انجام شده توسط Noghabei [۳۴] و Deluce [۳۵] مورد آزمون واقع می‌گردد:

#### ۴-۲- تحلیل برشی المان بتن مسلح

همان‌طور که پیش از این بیان گردید در تحلیل زیربرنامه اصلی جهت محاسبه مدول برشی ( $G$ )، روش تئوری میدان تنش محلی معرفی شده توسط سلطانی و همکاران [۲۲] استفاده شده است.

گرفته می‌شود. در این رساله از مدل Eligehausen و همکاران [۳۲] همراه با اصلاحات معرفی شده توسط Gan [۳۳] بهره گرفته می‌شود. بر مبنای مدل ارائه شده، منحنی غیرخطی برای رابطه تنش پیوستگی-لغزش ناشی از حالت بیرون کشیدگی میلگرد مطابق روابط (۲۴) در نظر گرفته می‌شود.

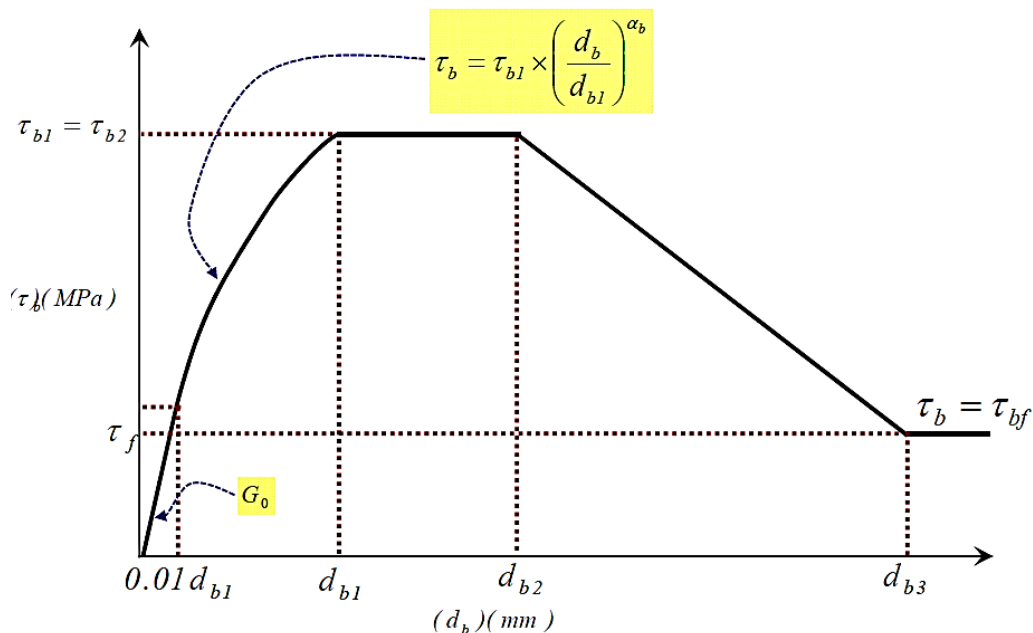
$$\tau_b = \tau_{b1} \left(\frac{d_b}{d_{b1}}\right)^{\alpha_b} \quad d_b < d_{b1}$$

$$\tau_b = \tau_{b1} = \tau_{b2} \quad d_{b1} \leq d_b \leq d_{b2} \quad (37)$$

$$\tau_b = \tau_{b2} - (\tau_{b2} - \tau_{bf}) \left(\frac{d_b - d_{b2}}{d_{b3} - d_{b2}}\right) \quad d_{b2} \leq d_b \leq d_{b3}$$

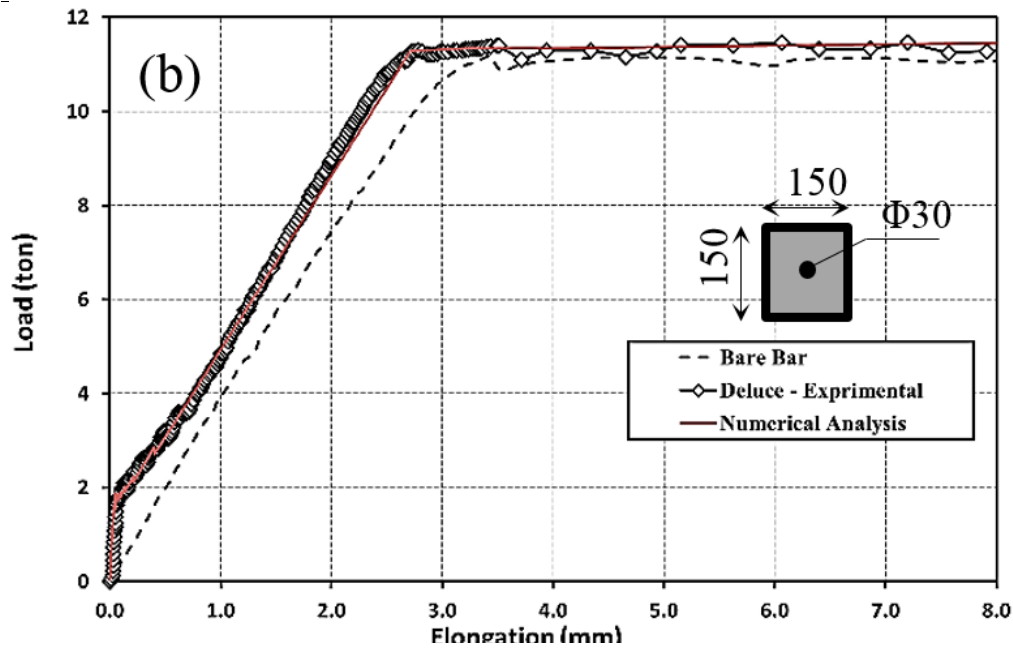
$$\tau_b = \tau_{bf} \quad d_b > d_{b3}$$

که در روابط فوق،  $d_{b3} = S_s$ ،  $d_{b2} = 3 \text{ mm}$  و  $\alpha_b = 0.4$  تعریف می‌شود. با افزایش میزان لغزش ( $d_b > d_{b3}$ ) مقدار مقاومت پیوستگی همان مقدار تنش پیوستگی اصطکاکی نهایی ( $\tau_{bf}$ ) تعریف می‌شود. همچنین  $\tau_{b1}$ ،  $\tau_{b2}$ ،  $\tau_{bf}$  و  $d_{b1}$  به صورت زیر تعیین می‌گردند. کلیه واحدهای از نوع تنش و جابه‌جایی به ترتیب مگاپاسکال و میلی‌متر می‌باشد.



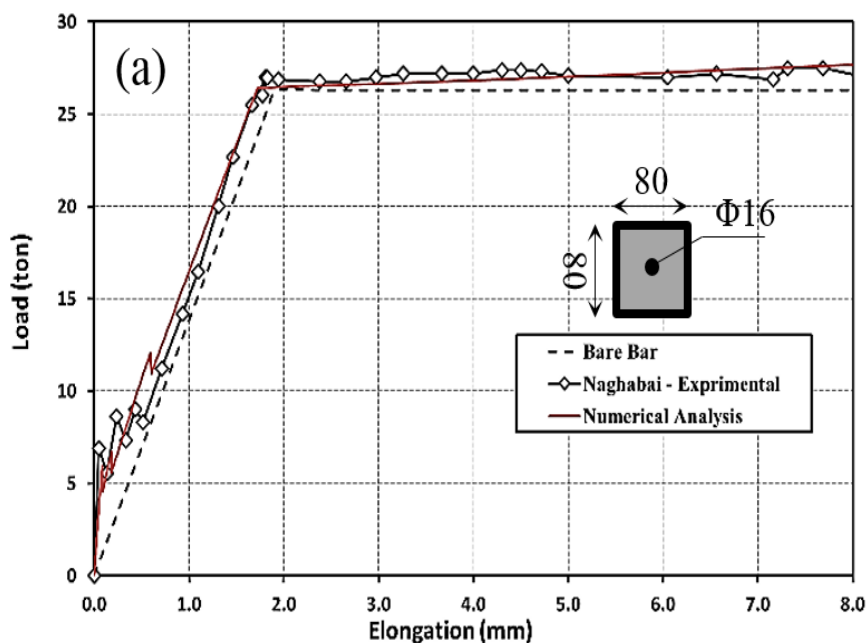
شکل ۹. منحنی غیرخطی تنش پیوستگی-لغزش ارائه شده توسط Eligehausen و همکاران [۳۲]

Fig. 9. Bond-slip model proposed by Eligehausen et al. [32]



شکل ۱۰. مقایسه تحلیلی منحنی بار - تغییر محوری طول تست شده توسط [۳۵] Deluce

Fig. 10. Comparison between analytical approach predictions and Deluce's experiments



شکل ۱۱. مقایسه تحلیلی منحنی بار - تغییر محوری طول تست شده توسط [۳۴] Noghabai

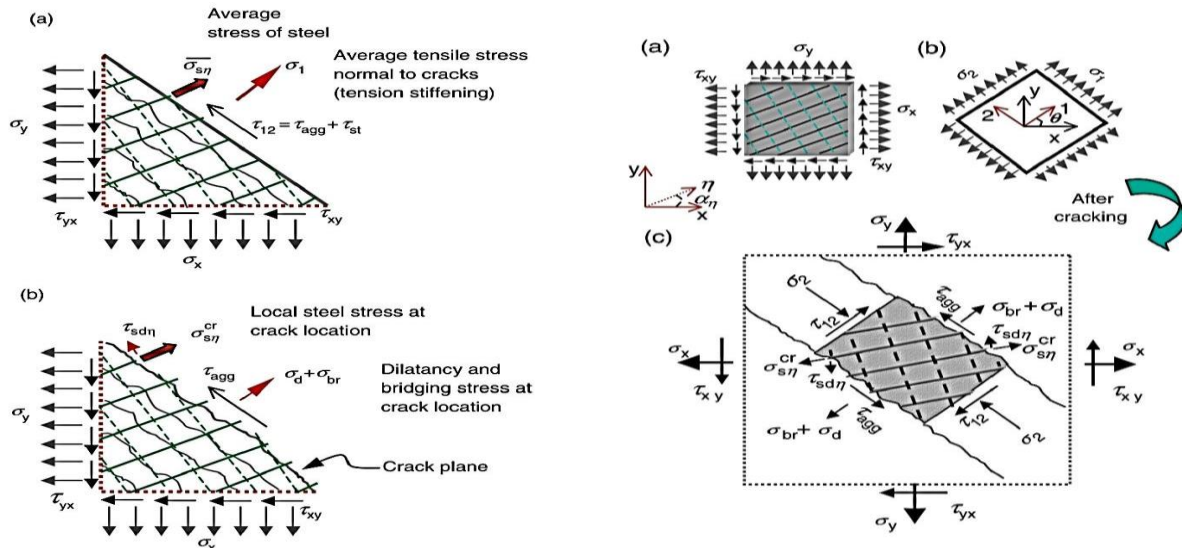
Fig. 11. Comparison between analytical approach predictions and Noghabai's experiments

و همچنین عرض و جهت گسترش ترک در طول بارگذاری، حالت شکست این المان می‌تواند تعیین شود.

در این روش با این فرض که ترک‌ها در المان به طور یکسان توزیع شده است (روش ترک پخشی)، روابط ساختاری ماده بر اساس تنش متوسط- کرنش متوسط به کار گرفته می‌شود و تا پایان تحلیل، محیط

روش مذکور یک مدل تحلیلی برای نشان دادن رفتار سازه‌های بتنی دوبعدی است که توسط عناصر غشایی تحت تأثیر تنش‌های نرمال و برشی قرار می‌گیرد، همان‌طور که در شکل ۱۲ نشان داده شده است. بر مبنای این فرمولاسیون، با استفاده از تنش‌ها و کرنش‌های متوسط (در منطقه بین ترک‌ها) و تنش‌های محلی المان بتنی و میلگردها





شکل ۱۲. المان بتن مسلح در روش ترک پخشی ثابت [۲۳]  
 Fig. 12. Fixed smeared crack approach in RC element

## ۲-۵- الگوریتم حل غیر خطی

جهت انجام تحلیل غیرخطی اصلی برنامه، یکی از فرایندهای پرکاربرد برای تحلیل غیرخطی سازه‌ها نظیر فن طول قوس بهره گرفته شده است. این روش نیز نظیر روش‌های تغییرمکانی به دو روش تانژانتی و سکانتی پیاده‌سازی شده است. روش حل طول قوس با استفاده افزودن یک معادله اضافی به مجموعه معادلات حاکم، یک قید اضافی مطابق رابطه (۳۹) ایجاد می‌نماید.

$$r(s) = q_i(d(s)) - \lambda(s)q_e = 0 \quad \therefore s = \int ds \quad (39)$$

$$\therefore ds = \sqrt{dd^T dd + d\lambda^2 \psi^2 q_e^T q_e}$$

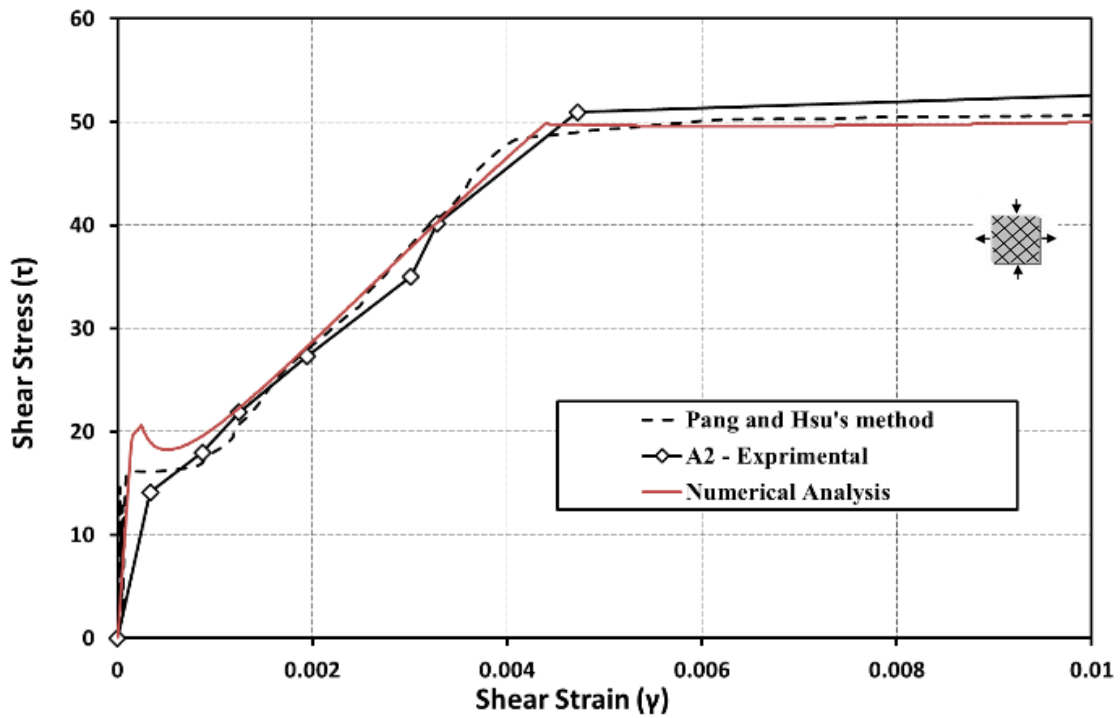
که در این روابط،  $ds$  شعاع قوس،  $\psi$  پارامتر مقیاس‌کننده مشخصه میزان درصد مشارکت بار و جابه‌جایی بین صفر و یک می‌باشد که برای تحلیل بر مبنای کنترل جابه‌جایی این متغیر به سمت صفر میل می‌کند. با در نظر گرفتن فرم دیفرانسیلی کلی با استفاده از رابطه (۴۰) و در نظر گرفتن شعاع ثابت دلخواه برای تقاطع قوس و معادله تعادلی  $\Delta l$  خواهیم داشت:

$$a^i = (\Delta d^i)^T \Delta d^i + (\Delta \lambda^i)^2 \psi^2 q_e^T q_e - \Delta l^2 = 0 \quad (40)$$

سپس همزمان دستگاه معادلات به روش نیوتن رافسون به روش تکراری صورت می‌پذیرد. ایده حل ابتدا توسط Riks [۳۸] و سپس توسط Wempner [۳۸] با احتساب معادله اضافی متفاوتی ارائه گردید. با استفاده از بسط سری تیلور مطابق رابطه (۴۱) و ساختار

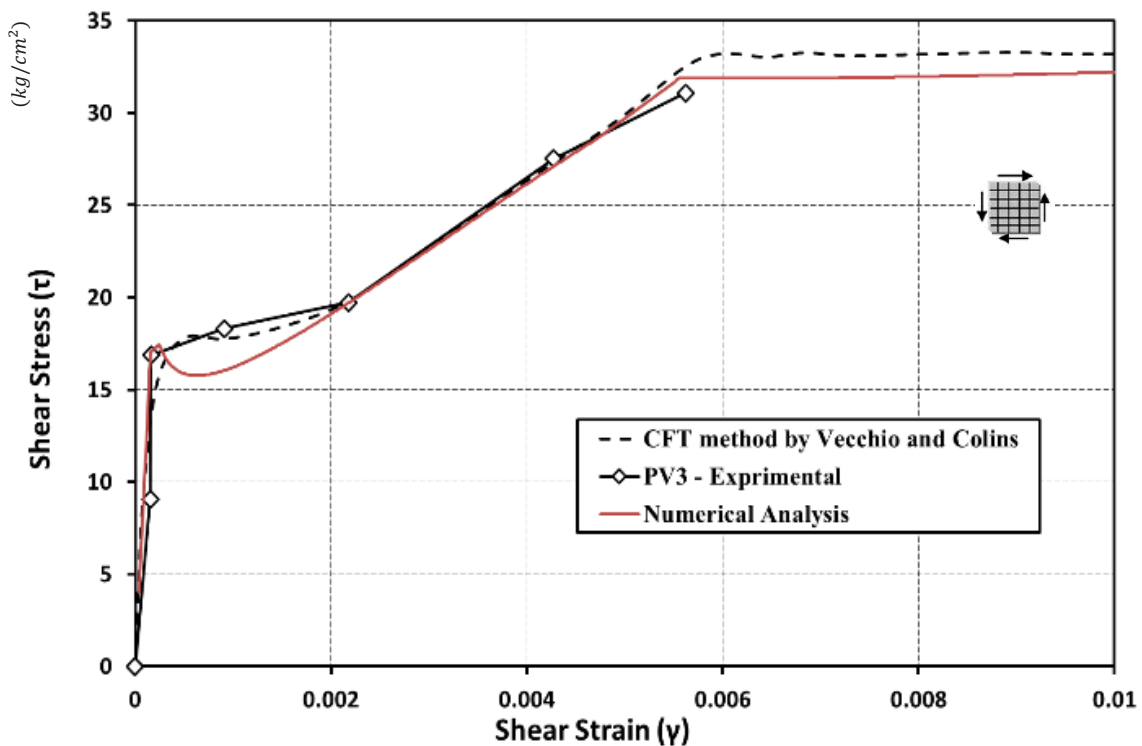
پیوسته همچنان پیوسته باقی می‌ماند و اثرات ترک‌خوردگی در مدل رفتاری نمونه اعمال می‌شود. همچنین یکی از فرضیات اساسی این روش بدین صورت تعریف می‌شود که بعد از ترک‌خوردگی، تأثیر کرنش عمود بر ترک بر رفتار راستاهای دیگر به صورت صریح وارد محاسبات نمی‌شود و اثرات آن با اصلاح مدل‌های رفتاری انجام می‌پذیرد. بنابراین لازم است ترک‌خوردگی با معیارهای مناسبی کنترل گردد. فرمول‌بندی کامل ترک پخشی ثابت توسط Maekawa و همکاران [۲۳] برای ترک پخشی دوجبهته و چهارجبهته ارائه شده است. تحلیل غیرخطی زیربرنامه نیز با استفاده از معادلات تعادل و سازگاری، آنالیز موضعی عضو بتن مسلح ترک‌خورده و سپس انتخاب روش کنترل تغییرمکان مستقیم Jirásek و Bazant [۳۶] و در نهایت استخراج مدول برشی المان (G) با استفاده از شیب نمودار تنش برشی-کرنش برشی متوسط انجام می‌شود.

جهت بررسی صحت زیربرنامه انجام شده در سطح المان، مجموعه‌ای از پانل‌های تست شده توسط Vecchio و Colins [۲۳] و Pang و Hsu [۳۷]، تحت تنش‌های یکنواخت داخل صفحه مورد آنالیز قرار گرفته است. تشریح مشخصات پانل‌های آزمایشگاهی بکار گرفته شده در تحلیل المان بتن مسلح در [۲۳] و [۳۷] آورده شده است. نتایج تحلیل سکانتی و انطباق آن‌ها با داده‌های آزمایشگاهی دو نمونه انتخابی در شکل ۱۳ و شکل ۱۴ نشان داده شده است.



شکل ۱۳. مقایسه تحلیل پانل برشی و آزمایشگاهی A2

Fig. 13. A2 panel analysis



شکل ۱۴. مقایسه تحلیل پانل برشی و آزمایشگاهی PV3

Fig. 14. PV3 panel analysis

### ۳- ارزیابی روش تحلیلی و اعتبارسنجی نتایج عددی

در این بخش براساس تئوری‌های حاکم بر مسائل و فرمول‌بندی‌های پیشنهادی در این پژوهش، نتایج عددی برنامه تحلیلی با نمونه‌های مختلف آزمایشگاهی تست شده موجود مورد آزمون و قیاس واقع شده است. در تمامی تحلیل‌ها از تحلیل‌های غیرخطی استاتیکی با استفاده از المان کامل تیرستونی فیبری بهره گرفته شده است. جهت تهیه برنامه کامپیوتری بر اساس روش پیشنهادی، زیربرنامه‌های موردنیاز در قالب فضاهای اشاره شده در بخش‌های پیشین این پژوهش در محیط نرم‌افزار MATLAB تهیه شده است.

جهت صحت‌سنجی و راستی‌آزمایی روش پیشنهادی، چندین دسته متفاوت از نمونه‌های آزمایشی تجربی جهت شبیه‌سازی انتخاب شده است. بدین منظور نمونه تیر دو سر ساده با دو بار متمرکز تست شده توسط Gilbert و Nejadi [۴۱] با رویکرد حاضر تحلیل شده است. هندسه مدل و جزییات مربوط به آن در شکل ۱۵ تشریح شده است. مطابق با مدل آزمایش شده، ۶ تپ نمونه برای مقاطع تیر و دال با آرماتور تک لایه تعریف شده است. قابل به ذکر است نمونه‌های تست شده از نظر مقاومتی و یا مقادیر تسلیح آرماتور متفاوت بوده که مشخصات مدل‌های رفتاری و جزییات بارگذاری در [۴۱] آورده شده است.

در ادامه منحنی رفتاری بدست آمده از تحلیل با بهره‌گیری از المان قابی پیشنهادی، با نتایج آزمایشگاهی موجود برای دو حالت تیر (B1b و B2b) مطابق شکل ۱۶ و دو حالت (S1b و S3b) مطابق شکل ۱۷ مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

در ادامه روند رشد ترک در گام زمانی انتهایی یک نمونه B1b و توالی تشکیل ترک مطابق با شکل ۱۸ و شکل ۱۹ در برنامه تحلیلی نمایش داده می‌شود:

همچنین مطابق با مدل رفتاری لغزش-تنش پیوستگی مقادیر

ماتریسی نمایش داده شده توسط Fellipa [۳۹]، رابطه (۴۲) حاصل شده است.

$$a^{i+1} = a^i + \frac{\partial a}{\partial d} \delta d^i + \frac{\partial a}{\partial \lambda} \delta \lambda^i = a^i + 2(\Delta d^i)^T \delta d^i + 2\Delta \lambda^i \delta \lambda^i \psi^2 q_e^T q_e = 0 \quad (41)$$

$$\begin{pmatrix} \delta d^i \\ \delta \lambda^i \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} K_t & -q_e \\ 2(\Delta d^i)^T & 2\Delta \lambda^i \delta \lambda^i \psi^2 q_e^T q_e \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r^i \\ a^i \end{pmatrix} \quad (42)$$

در ادبیات پژوهشی روش‌های متعددی جهت حل رابطه (۴۲) ارائه شده است که در این تحقیق، الگوریتم طول قوس خطی هم مرتبه ارائه شده توسط Schweizerhof و Wriggers [۴۰] مورد استفاده قرار می‌گیرد (روابط (۴۳)، (۴۴) و (۴۵)):

$$\delta d^i = -K_t^{-1} r^i + \delta \lambda^i \delta d_t^i \quad (43)$$

$$\delta d^i = \delta \bar{d}^i + \delta \lambda^i \delta d_t^i \quad (44)$$

$$\delta \bar{d}^i = -K_t^{-1} r^i \quad \therefore \delta d_t^i = K_t^{-1} q_e \quad (45)$$

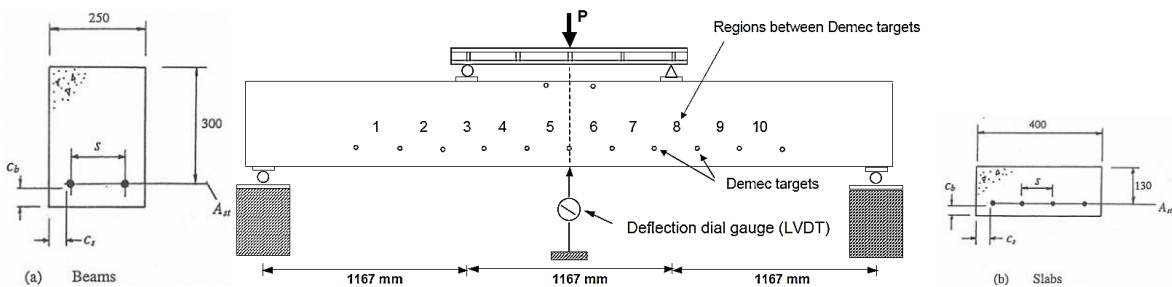
با جایگزینی روابط ارائه شده در فوق در رابطه (۴۱)، میزان افزایش طول قوس هر گام در هر تکرار  $\delta \lambda^i$  مطابق رابطه (۴۶) در نظر گرفته می‌شود.

$$\delta \lambda^i = \frac{-\left(\frac{a^i}{2}\right) - (\Delta d^i)^T (\delta \bar{d}^i)}{(\Delta d^i)^T (\delta d_t^i) + \Delta \lambda^i \psi^2 q_e^T q_e} \quad (46)$$

سپس بردار تغییر مکان  $\delta d$  و سطح بار متناظر با آن  $\delta \lambda$  در گام  $i$  ام مطابق رابطه (۴۷) و (۴۸) بروز می‌گردد:

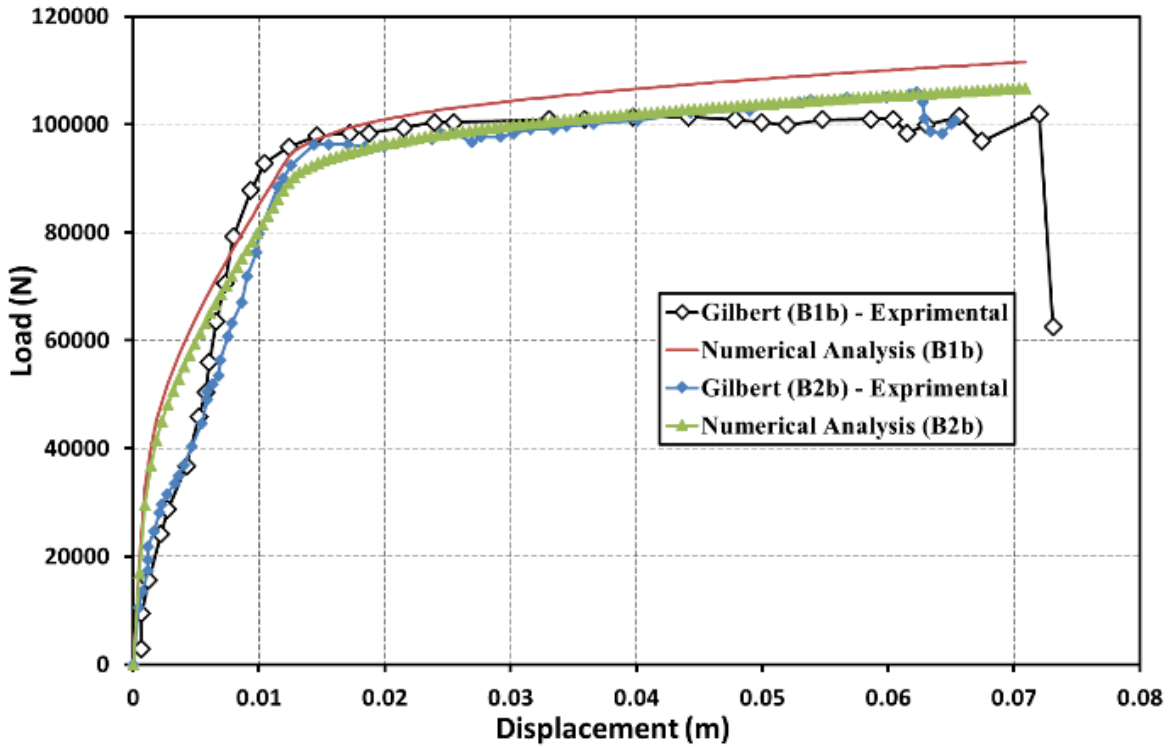
$$\Delta d^{i+1} = \Delta d^i + \delta d^i \quad (47)$$

$$\Delta \lambda^{i+1} = \Delta \lambda^i + \delta \lambda^i \quad (48)$$

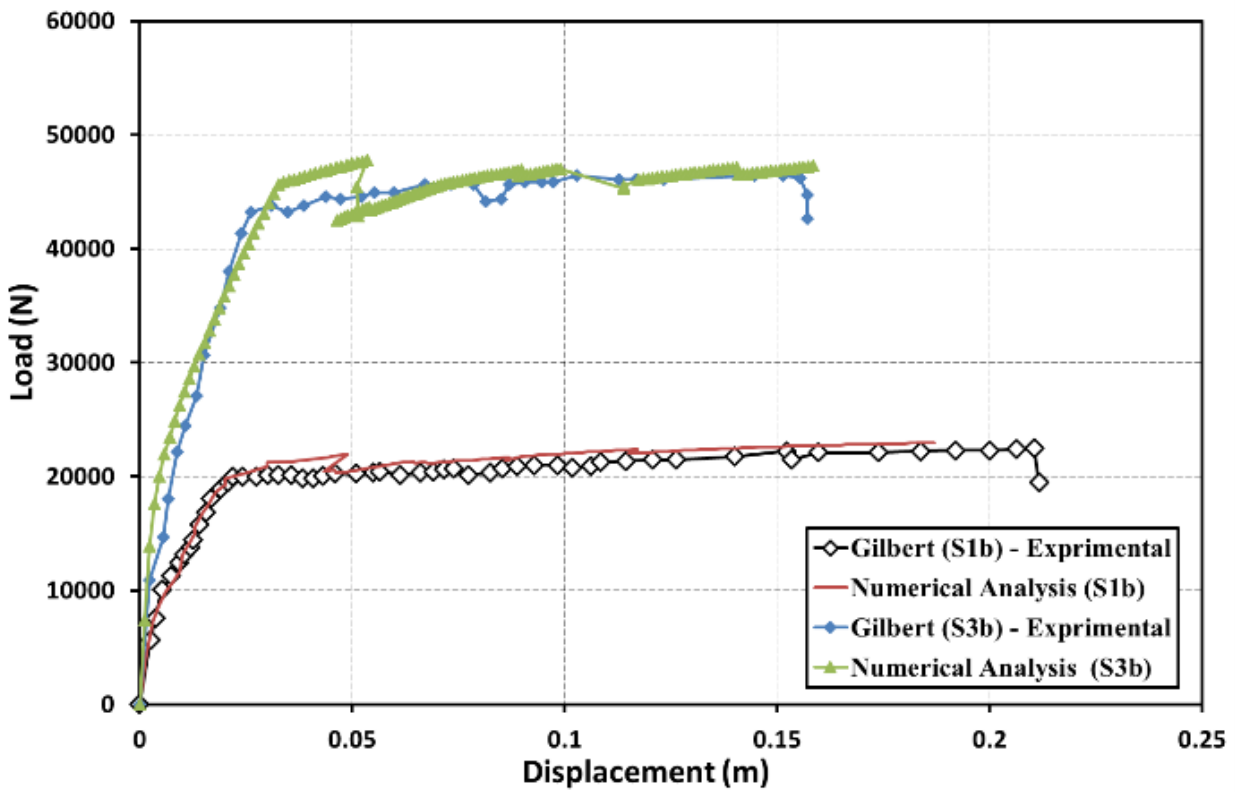


شکل ۱۵. نمونه تست شده توسط Gilbert و Nejadi [۴۱]

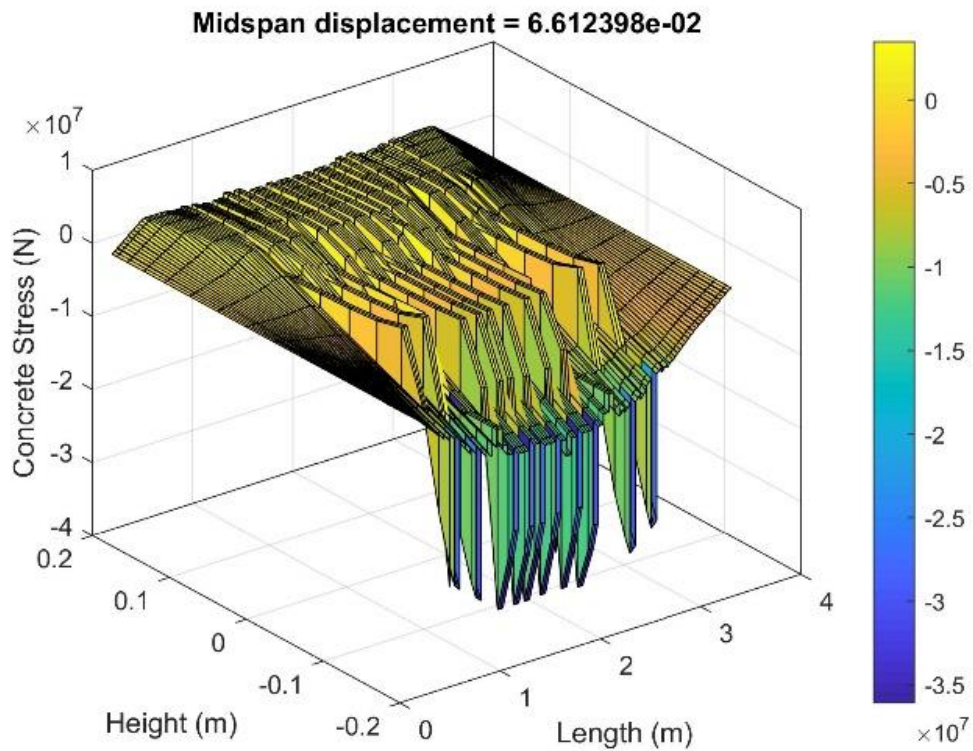
Fig. 15. PV22 panel analysis



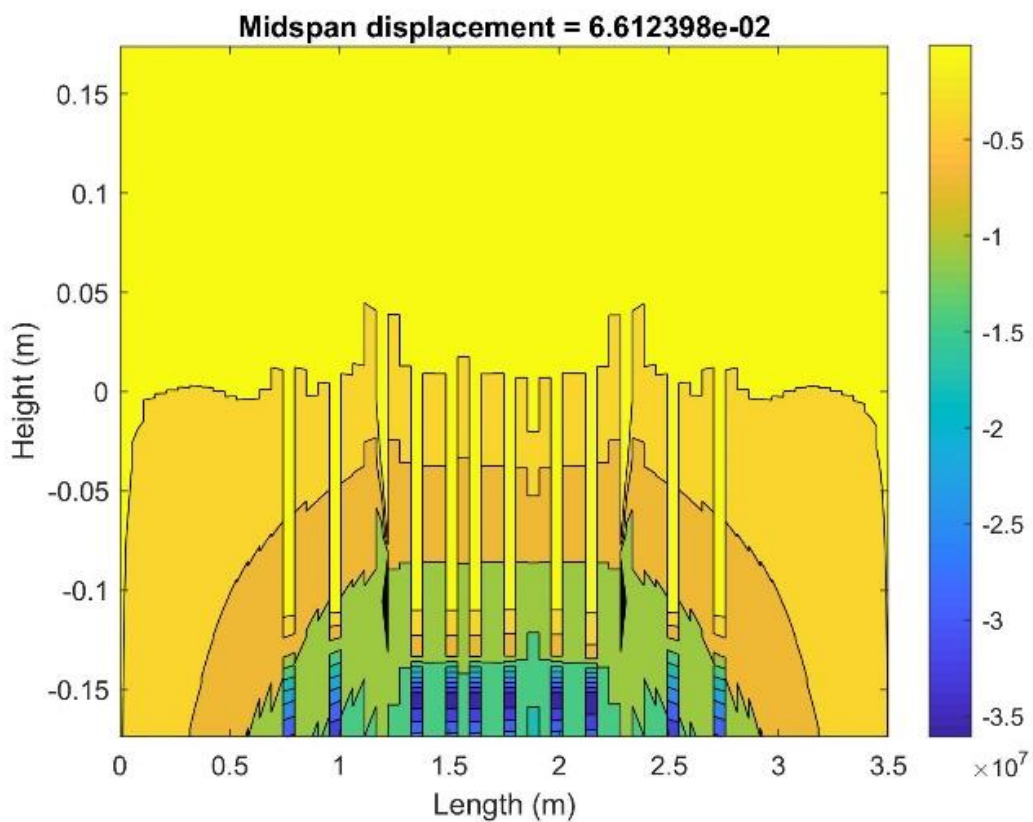
شکل ۱۶. منحنی رفتاری تحلیلی نمونه تیر B3b و B1b  
Fig. 16. Load-displacement of specimen B1b and B3b



شکل ۱۷. منحنی رفتاری تحلیلی نمونه دال S3b و S1b  
Fig. 17. Load-displacement of specimen S1b and S3b



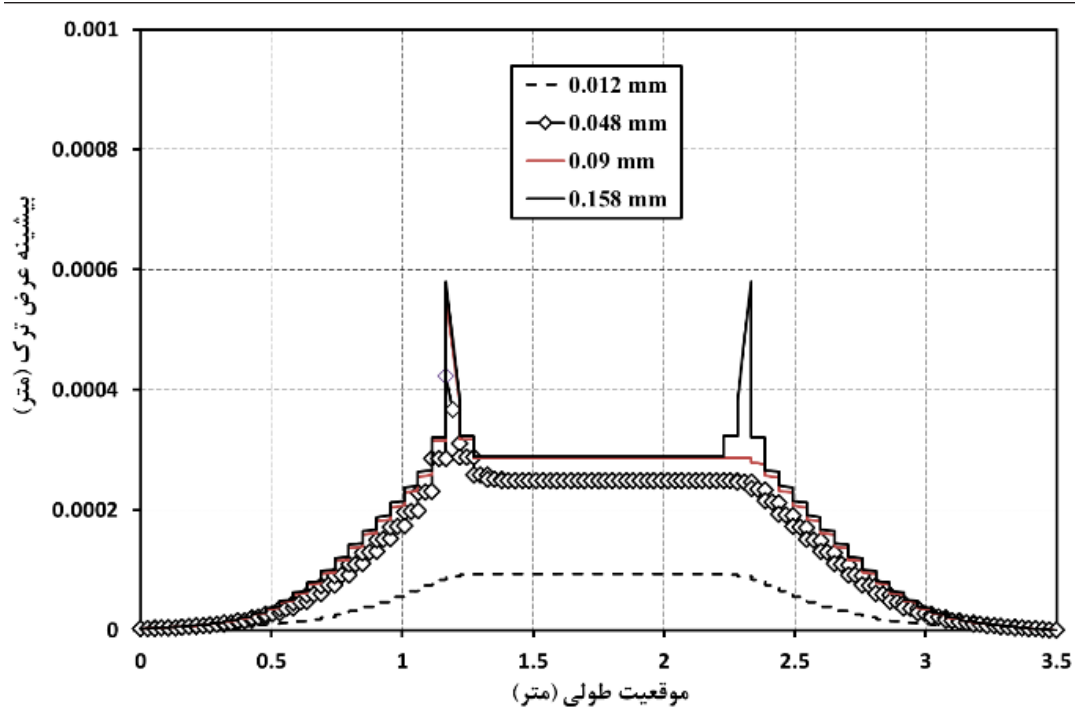
شکل ۱۸. رویه تنش سه‌بعدی در نمونه B2b  
 Fig. 18. 3D contour of stress distribution



شکل ۱۹. کانتور تنش دوبعدی در نمونه B1b  
 Fig. 19. The extracted stress of crack patterns occurred in the specimen B1b

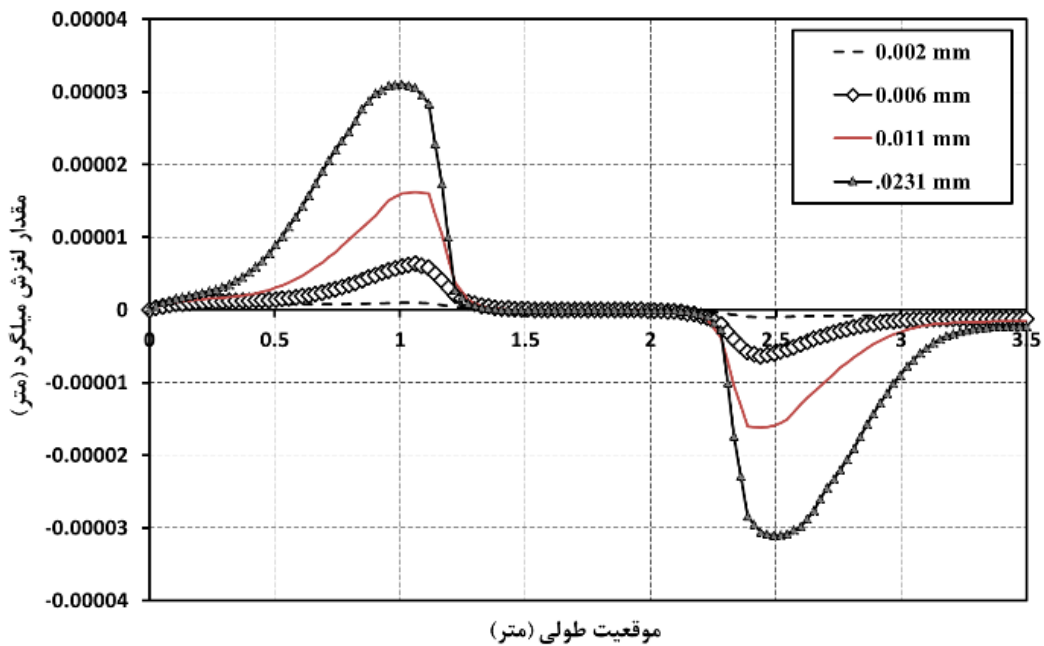
در ادامه نمونه‌ای جهت آزمون مدل پیشنهادی در جابه‌جایی‌های بزرگ در گام‌های بارگذاری مختلف واری می‌شود. بدین منظور مدل Sasaki و همکاران [۵] جهت تخمین رفتار غشایی تیر در حالت قوس فشاری و کشش انتخاب شده است. مشخصات هندسی (شکل

بیشینه عرض ترک و لغزش حاصل از گام بار در شکل ۲۰ و شکل ۲۱ حاصل می‌گردد. در ادامه انحنای خمشی مقطع و عرض ترک نمونه (S1b) و مقایسه آن با نتایج تجربی در شکل ۲۲ و شکل ۲۳ نشان داده می‌شود:



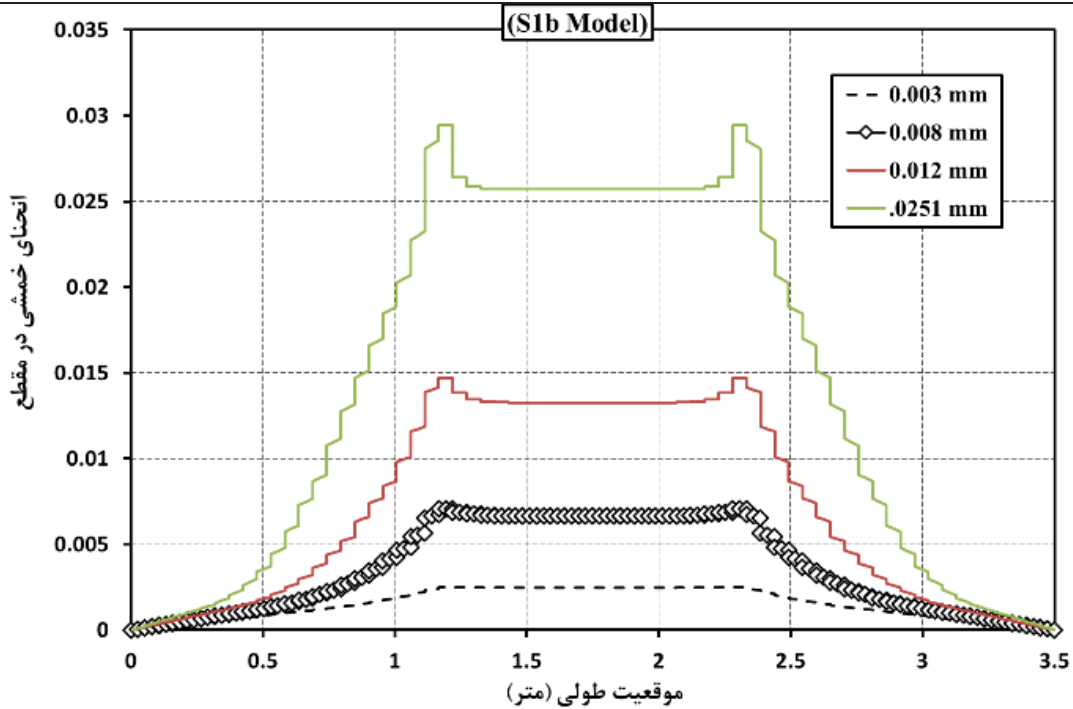
شکل ۲۰. منحنی بیشینه عرض ترک در طول دال S3b

Fig. 20. Maximum crack width along slab length in specimen S3b versus different mid-span deflection



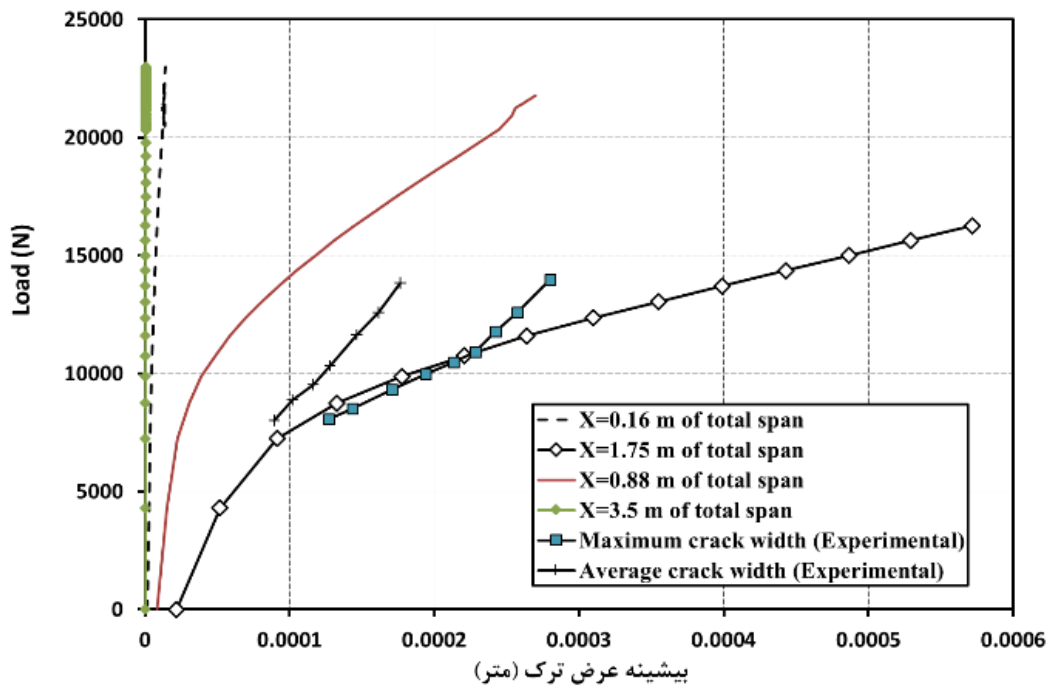
شکل ۲۱. منحنی لغزش میلگرد در طول دال S3b در گام‌های ابتدایی تحلیل

Fig. 21. Bond-slip effects along slab length in specimen S3b



شکل ۲۲. منحنی انحنای خمشی مقطع در طول نمونه S1b

Fig. 22. Curvature variation in specimen S1b versus different mid-span deflection



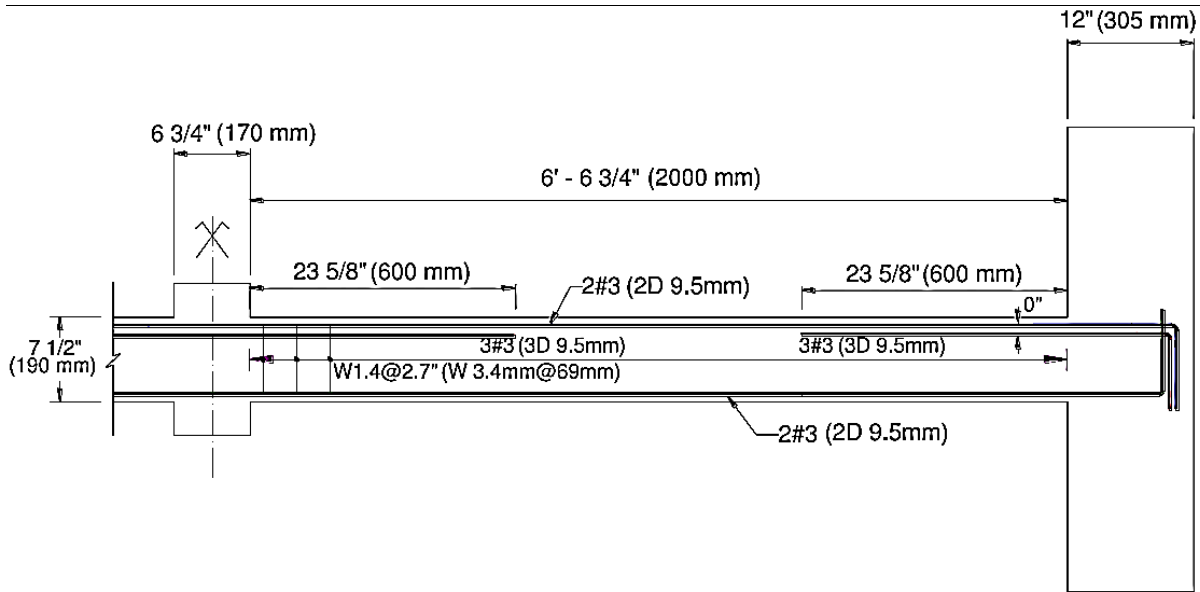
شکل ۲۳. منحنی رفتاری نمونه S1b نسبت به بیشینه عرض ترک

Fig. 23. Crack model and experimental results in specimen S1b

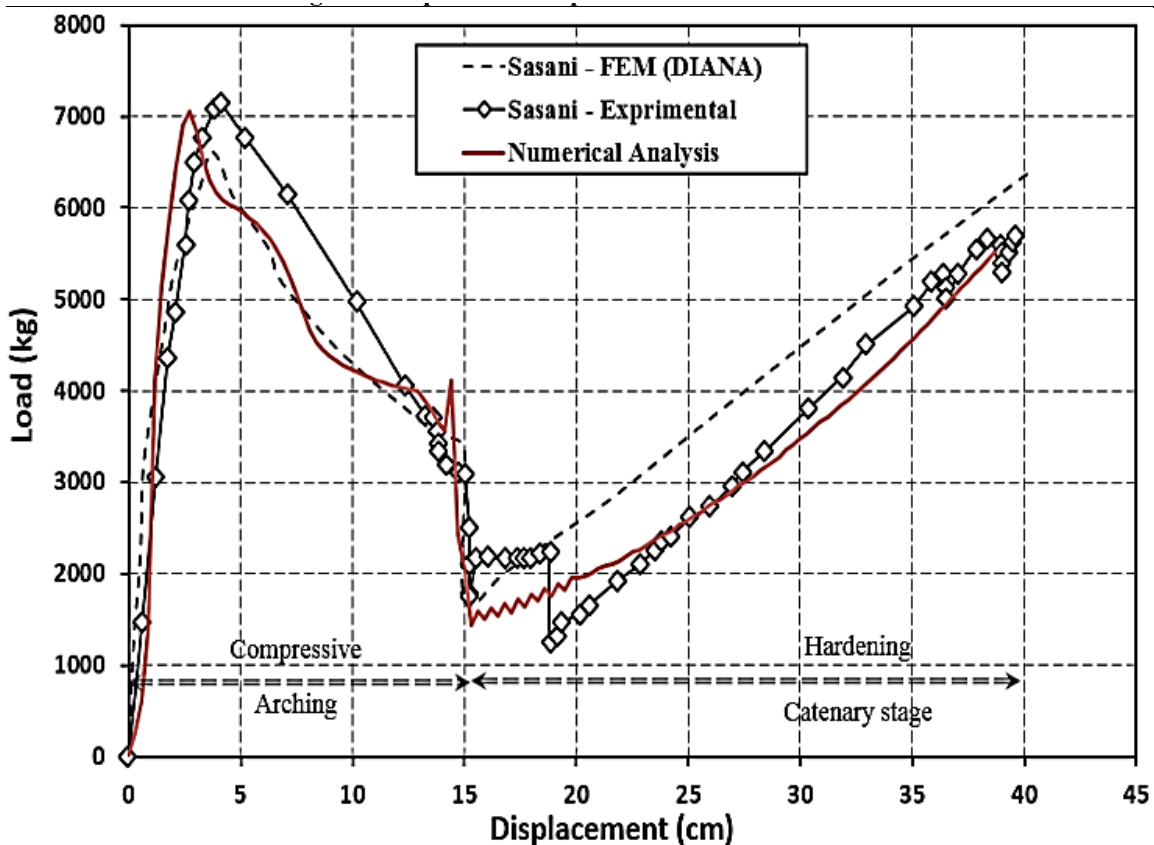
#### ۴- نتیجه گیری

روش پیشنهاد شده در این تحقیق بر مبنای فرمول بندی مدل فیزیکی به همراه رویکرد لاگرانژی است که معادلات حاکم بر المان

(۲۴) و جزییات مصالح در [۵] عنوان شده است. منحنی رفتاری حاصل با مقادیر آزمایشگاهی مطابق شکل ۲۵ مورد قیاس واقع می گردد.



شکل ۲۴. مشخصات هندسی نمونه  
**Fig 24. Specimen setup and reinforcement detail**



شکل ۲۵. منحنی رفتاری بار-تغییر مکان نمونه Sasani و همکاران [۵]  
**Fig. 25. Load-displacement responses for Sasani et al.'s frame**

فرمولی این المان بر مبنای تئوری تیر تیموشنکو به همراه اثرات اندرکنشی محوری، خمشی و برشی در دامنه هر المان انجام شده است. در فرمول‌بندی پیشنهادی، ترم‌های مربوط به برش و خمش در

قابی پیشنهادی در فرم تضعیف شده اجزا محدودی بازنویسی گردیده است. همچنین معادلات حاکم بر المان قابی بتن مسلح برای میلگردهای هر لایه به صورت مجزا توسعه داده شده و بازنویسی



models of European reinforced concrete framed buildings based on pushdown analysis, *Engineering Structures*, 152 (2017) 579-596.

- [8] P. Ceresa, L. Petrini, R. Pinho, R. Sousa, A fibre flexure–shear model for seismic analysis of RC-framed structures, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 38(5) (2009) 565-586.
- [9] Z.-X. Li, Y. Gao, Q. Zhao, A 3D flexure–shear fiber element for modeling the seismic behavior of reinforced concrete columns, *Engineering Structures*, 117(Supplement C) (2016) 372-383.
- [10] R.S. Stramandinoli, H.L. La Rovere, FE model for nonlinear analysis of reinforced concrete beams considering shear deformation, *Engineering structures*, 35 (2012) 244-253.
- [11] M. Lezgy-Nazargah, An efficient materially nonlinear finite element model for reinforced concrete beams based on layered global-local kinematics, *Acta Mechanica*, 229(3) (2018) 1429-1449.
- [12] A. Belarbi, T.T. Hsu, Constitutive laws of concrete in tension and reinforcing bars stiffened by concrete, *Structural Journal*, 91(4) (1994) 465-474.
- [13] H.-G. Kwak, J.-K. Kim, Implementation of bond-slip effect in analyses of RC frames under cyclic loads using layered section method, *Engineering structures*, 28(12) (2006) 1715-1727.
- [14] S. Limkatanyu, W. Prachasaree, G. Kaewkulchai, E. Spacone, Unification of Mixed Euler-Bernoulli-Von Karman Planar Frame Model and Corotational Approach, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 42(4) (2014) 419-441.
- [15] S. Limkatanyu, E. Spacone, Reinforced concrete frame element with bond interfaces. I: Displacement-based, force-based, and mixed formulations, *Journal of Structural Engineering*, 128(3) (2002) 346-355.
- [16] G. Monti, E. Spacone, Reinforced concrete fiber beam element with bond-slip, *Journal of Structural Engineering*, 126(6) (2000) 654-661.
- [17] W.-H. Pan, M.-X. Tao, J.-G. Nie, Fiber beam–column element model considering reinforcement

ماتریس سختی سویی المان با ارائه یک تابع شکل هرمیتی فیبری و ترکیب آن با روش میدان تنش محلی، ارائه شده است. ارزیابی روش تحلیلی ارائه شده با آزمون‌های متعددی مورد قیاس قرار داده شده است. صحت‌سنجی روش تحلیلی ارائه شده با مطالعات آزمایشگاهی موجود بر روی سازه‌های بتنی مسلح بوده که علاوه بر منحنی پاسخ کلی نمونه، عرض بیشینه ترک، پروفیل لغزش میلگردها، روند رشد ترک و کانتور تنش‌های بخش بتنی نیز استخراج شده است. مطابق نتایج حاصل از تحلیل، ارزیابی دو عامل سختی و ظرفیت همراه با برهم کنش لغزش آرماتور–تنش پیوستگی بتن، تقریب نسبتاً مناسب و همگرایی قابل قبولی را در مسائل می‌تواند نتیجه دهد.

## مراجع

- [1] F. Taucer, E. Spacone, F.C. Filippou, A fiber beam–column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures, *Earthquake Engineering Research Center, College of Engineering, University of California Berkeley, California*, 1991.
- [2] E. Spacone, F.C. Filippou, F.F. Taucer, *Fibre Beam–Column Model for Non-Linear Analysis of R/C Frames: Part II. Applications*, *Earthquake engineering & structural dynamics*, 25(7) (1996) 727-742.
- [3] M.H. Scott, G.L. Fenves, Plastic hinge integration methods for force-based beam–column elements, *Journal of Structural Engineering*, 132(2) (2006) 244-252.
- [4] T. Mullapudi, A. Ayoub, Analysis of reinforced concrete columns subjected to combined axial, flexure, shear, and torsional loads, *Journal of Structural Engineering*, 139(4) (2012) 561-573.
- [5] M. Sasani, A. Werner, A. Kazemi, Bar fracture modeling in progressive collapse analysis of reinforced concrete structures, *Engineering Structures*, 33(2) (2011) 401-409.
- [6] H.R. Valipour, S.J. Foster, Finite element modelling of reinforced concrete framed structures including catenary action, *Computers & structures*, 88(9) (2010) 529-538.
- [7] E. Brunesi, F. Parisi, Progressive collapse fragility

- constitutive models of reinforced concrete, Gihodo-Shuppan Co, Tokyo, 1991.
- [29] F.J. Vecchio, M.P. Collins, The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, *Journal of the American Concrete Institute*, 83(2) (1986) 219-231.
- [30] H. Shima, L.-L. Chou, H. Okamura, Micro and macro models for bond in reinforced concrete, *Journal of the Faculty of Engineering*, 39(2) (1987) 133-194.
- [31] B. Li, Contact density model for stress transfer across cracks in concrete, *Journal of the Faculty of Engineering, the University of Tokyo*, (1) (1989) 9-52.
- [32] M. Soltani, X. An, K. Maekawa, Computational model for post cracking analysis of RC membrane elements based on local stress-strain characteristics, *Engineering structures*, 25(8) (2003) 993-1007.
- [33] H.M.M. Salem, Enhanced tension stiffening model and application to nonlinear dynamic analysis of reinforced concrete, 1998.
- [34] C. Jin, M. Soltani, X. An, Experimental and numerical study of cracking behavior of openings in concrete dams, *Computers & structures*, 83(8) (2005) 525-535.
- [35] R. Eligehausen, E.P. Popov, V.V. Bertero, Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations, (1982).
- [36] Y. Gan, Bond stress and slip modeling in nonlinear finite element analysis of reinforced concrete structures, University of Toronto, (2000).
- [37] K. Noghabai, Behavior of tie elements of plain and fibrous concrete and varying cross sections, *Structural Journal*, 97(2) (2000) 277-284.
- [38] J.R. Deluce, Cracking Behaviour of Steel Fibre Reinforced Concrete Containing Conventional Steel Reinforcement, University of Toronto, 2011.
- [39] M. Jirásek, Z.P. Bazant, *Inelastic analysis of structures*, John Wiley & Sons, 2002.
- [40] X.-B.D. Pang, T.T. Hsu, Behavior of reinforced concrete membrane elements in shear, *Structural Journal*, 92(6) (1995) 665-679.
- anchorage slip in the footing, *Bulletin of Earthquake Engineering*, 15(3) (2017) 991-1018.
- [18] A. Bazoune, Y. Khulief, N. Stephen, Shape functions of three-dimensional Timoshenko beam element, *Journal of Sound and Vibration*, 259(2) (2003) 473-480.
- [19] S. Puchegger, S. Bauer, D. Loidl, K. Kromp, H. Peterlik, Experimental validation of the shear correction factor, *Journal of sound and vibration*, 261(1) (2003) 177-184.
- [20] W. Yu, D.H. Hodges, Elasticity solutions versus asymptotic sectional analysis of homogeneous, isotropic, prismatic beams, *Journal of Applied Mechanics*, 71(1) (2004) 15-23.
- [21] J. Hutchinson, Shear coefficients for Timoshenko beam theory, *Transactions-American Society Of Mechanical Engineers Journal Of Applied Mechanics*, 68(1) (2001) 87-92.
- [22] S. Dong, C. Alpdogan, E. Taciroglu, Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory, *International Journal of Solids and Structures*, 47(13) (2010) 1651-1665.
- [23] K. Chan, K. Lai, N. Stephen, K. Young, A new method to determine the shear coefficient of Timoshenko beam theory, *Journal of Sound and Vibration*, 330(14) (2011) 3488-3497.
- [24] S.P. Timoshenko, X. On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 43(253) (1922) 125-131.
- [25] M. Soltani, X. An, K. Maekawa, Localized nonlinearity and size-dependent mechanics of in-plane RC element in shear, *Engineering structures*, 27(6) (2005) 891-908.
- [26] K. Maekawa, H. Okamura, A. Pimanmas, *Non-linear mechanics of reinforced concrete*, Spon Press, 2003.
- [27] B. Bujadham, K. MAEKAWA, The universal model for stress transfer across cracks in concrete, *Doboku Gakkai Ronbunshu*, 1992(451) (1992) 277-287.
- [28] H. Okamura, K. Maekawa, *Nonlinear analysis and*

- for path following methods in nonlinear FE analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(3) (1986) 261-279.
- [44] R.I. Gilbert, S. Nejadi, An experimental study of flexural cracking in reinforced concrete members under short term loads, University of New South Wales, School of Civil and Environmental Engineering, 2004.
- [41] E. Ramm, The Riks/Wempner approach-An extension of the displacement control method in nonlinear analysis, *nonlinear computational mechanics*, (1982) pp. 63-86.
- [42] C.A. Felippa, *Nonlinear finite element methods*, Department of Aerospace Engineering Sciences and Center for Space Structures and Controls, 2001.
- [43] K. Schweizerhof, P. Wriggers, *Consistent linearization*

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

*B. Yousefi, M. R. Esfahani, M. R. Tavakolizadeh, Proposing an RC Fiber Frame Element Based on Local Stress Field Theory and Bar-Concrete Interaction. Amirkabir J. Civil Eng., 53(3) (2021) 897-920.*

**DOI:** [10.22060/ceej.2019.16688.6304](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.16688.6304)



