



## کاربرد تابع پایه-شعاعی چنددربعی در حل مسائل تراوش با الگوریتمی جدید برای بهینه‌سازی پارامتر شکل

معصومه کوشکی، رضا بابایی، احسان جباری\*

گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۷-۲۷  
بازنگری: ۱۳۹۷-۰۹-۰۵  
پذیرش: ۱۳۹۷-۱۰-۱۸  
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷-۱۰-۱۸

### کلمات کلیدی:

پارامتر شکل  
روش چنددربعی  
توابع پایه شعاعی  
الگوریتم ژنتیک، تراوش

**خلاصه:** دقت روش بدون شبکه چنددربعی کاملاً به انتخاب پارامتر شکل آن وابسته است. هدف از پژوهش حاضر، پیشنهاد یک الگوریتم نوین برای تعیین پارامتر شکل بهینه است، به طوری که برخی از مشکلات پیشین شامل؛ وابسته بودن به تعداد نقاط محاسباتی و یک حل دقیق از مسئله، هزینه بالا و دقت پایین محاسبات، تجربی بودن، همگرا شدن روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک به نقاط بهینه محلی و دیگر موارد را برطرف نماید. به این منظور ضمن معرفی یک تابع هدف جدید، از الگوریتم ژنتیک استفاده شد و برای سرعت بخشیدن به روند حل آن، حد پایین پارامتر شکل؛ کمینه شعاع نقاط محاسباتی با شرط عدم تکنیکی ماتریس ضرایب و حد بالای آن؛ بیشینه شعاع پیشنهاد گردید. الگوریتم مذکور از چهار مرحله تشکیل می‌شود: (۱) تولید پارامتر شکل توسط الگوریتم ژنتیک در بازه پیشنهاد شده، (۲) تشکیل تابع چنددربعی با تعداد پایینی از نقاط محاسباتی، (۳) تشکیل تابع چنددربعی با تعداد بالایی از نقاط محاسباتی و (۴) کمینه‌سازی اختلاف جواب توابع به دست آمده از دو مرحله قبل. در الگوریتم فرا ابتکاری حاضر، توزیع‌های یکنواخت و غیر یکنواخت منظم از نقاط محاسباتی با موفقیت به کار رفت و نشان داده شد که با آن می‌توان به پارامتر شکلی بهینه و ثابت و نیز مستقل از تعداد نقاط محاسباتی برای هندسه‌های دلخواه دست یافت. برای صحت‌سنجی نیز مسائلی همگن، ناهمگن و ناهمسان از پدیده تراوش حل شد و از فن تجزیه دامنه برای کاهش حجم محاسبات و شبیه‌سازی راحت‌تر میدان‌های ناهمگن و پیچیده استفاده گردید. مقایسه نتایج با سایر حل‌های دقیق و عددی، توانایی و دقت بالای الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهد.

### ۱- مقدمه

بندر تولو<sup>۳</sup> به دست آوردند [۳] و در سال ۲۰۰۲ یک مدل چندلایه‌ای برای تحلیل و مدل‌سازی جریان جزر و مد سه‌بعدی ارائه نمودند و با مدل‌سازی رودخانه پرل<sup>۴</sup> در جنوب چین به صحت نتایج پی بردند [۴]. هاردی در سال ۲۰۰۱ معادله پواسون را با استفاده از روش چنددربعی حل کرد [۵]. حل معادلات دو و سه‌بعدی استوکس، معادله غیرخطی برگر<sup>۵</sup>، معادلات مشتق جزئی جبری<sup>۶</sup>، معادلات موج هامیلتون<sup>۷</sup> و دیگر موارد هم با استفاده از روش مذکور انجام شده است

روش بدون شبکه چنددربعی<sup>۱</sup> که عضو خانواده توابع پایه شعاعی<sup>۲</sup> است، ابتدا توسط هاردی به منظور تولید نقشه‌های توپوگرافی و تقریب زدن داده‌های پراکنده در سطوح جغرافیایی معرفی شد [۱] و [۲]. طبق ادعای هاردی، سایر محققین این روش توانمند را در حل معادلات مشتق جزئی با موفقیت به کار بردند. هان و همکارانش معادلات آب‌های کم عمق را حل کردند. ایشان خصوصیات سطح آب شامل مؤلفه‌های سرعت و مقدار عمق آن را در مثال موردی

3 Tolo  
4 Pearl  
5 Nonlinear Burger's equation  
6 Partial differential algebraic equations  
7 Hamiltonian wave equations

1 Multiquadric (MQ)  
2 Radial basis function (RBF)

\* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: e.jabbari@qom.ac.ir



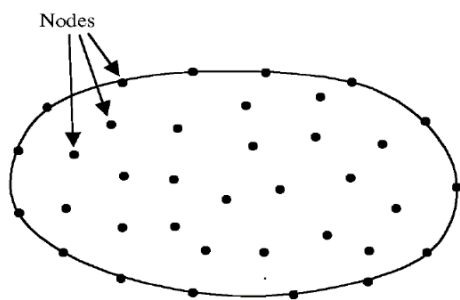
نشان داد که روش ریپا [۲۰] برای تخمین پارامتر شکل بهینه در مسائل وابسته به زمان دارای دقت کافی نمی‌باشد. ایشان روش ریپا را توسعه داد و توانست با یک استراتژی جدید دقت مناسبی برای حل مسائل مذکور به دست آورد [۲۱]. بی‌آزار و همکارانش در سال ۲۰۱۶ در مورد کران بالا و پایین روابط تعیین پارامتر شکل متغیر تحقیق کردند و با معرفی یک روش برای تعیین آن حدود توانستند دقت روش چندربعی را افزایش دهند [۲۲]. چن و همکارانش در سال ۲۰۱۸ یک الگوریتم جدید برای یافتن پارامتر شکل ارائه دادند این الگوریتم در ابتدا پارامتر شکل بهینه را برای مسائلی که حل تحلیلی دارند، به دست می‌آورد سپس از آن برای مسائل مشابهی که حل تحلیلی ندارند استفاده می‌کند [۲۳]. البرزی در سال ۲۰۱۸ یک الگوریتم با دقت بالاتر از سایر روش‌های تعیین پارامتر شکل بهینه ارائه داد. در این روش مسئله با تعداد  $N-2$  و  $N$  نقطه محاسباتی به‌زای پارامتر شکل‌های مختلفی حل می‌شود و آن پارامتری که کمترین اختلاف را بین دو جواب داشته‌باشد بهینه است [۲۴]. فلاح و همکارانش در سال ۲۰۱۸ یک روش سریع برای یافتن پارامتر شکل بهینه در روش چندربعی با کاربرد در حل مسائل تراوش ارائه دادند. در این الگوریتم از روش نصف کردن بازه پارامتر شکل استفاده می‌شود و مقدار بهینه زمانی به دست می‌آید که تغییرات پاسخ مسئله نسبت به تغییرات پارامتر شکل کمینه باشد [۲۵].

با بررسی مطالعات پیشین می‌توان فهمید که روش‌های مختلف در تعیین پارامتر شکل بهینه دارای مشکلاتی مانند (۱) تجربی بودن روابط برای مسائل خاص، (۲) استفاده از روش‌های سعی و خطا به‌همراه الگوریتم‌های تکراری و زمان‌بر، (۳) وابسته بودن پارامتر شکل به تعداد نقاط انتخابی در میدان مسئله، (۴) نیاز به وجود یک حل دقیق از مسائل برای تعیین پارامتر شکل، (۵) مشخص نبودن حدود پایین و بالای پارامتر شکل به هنگام استفاده از الگوریتم ژنتیک، (۶) افتادن روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک در دام نقاط بهینه محلی و بازماندن از یافتن نقاط بهینه کلی و دیگر موارد هستند. هدف از پژوهش حاضر، پیشنهاد یک الگوریتم وفقی نوین برای تعیین پارامتر شکل بهینه در روش چندربعی است به طوری که برخی از مشکلات مذکور را برطرف نماید. در این پیشنهاد از الگوریتم ژنتیک با یک تابع هدف جدید استفاده می‌شود و به منظور سرعت بخشیدن به روند حل مسئله، بازه‌ای برای پارامتر شکل بهینه معرفی می‌گردد. برای صحت‌سنجی آن، مسائلی همگن، ناهمگن و

[۶-۹]. پاتل و همکارانش در سال ۲۰۱۷ از روش چندربعی برای حل معادله لاپلاس در شبیه‌سازی آبخوان‌های نامنظم آب زیرزمینی استفاده کردند. ایشان با بررسی ناهمگنی و شرایط مرزی یا هد متغیر، تحلیل حساسیت را بر روی گام زمانی، تراکم گره و اندازه میدان انجام دادند و نتیجه گرفتند که این روش در دقت و هزینه محاسباتی یک شبیه‌ساز بهینه برای آب‌های زیرزمینی است [۱۰]. روش چندربعی قابلیت ترکیب با سایر روش‌های عددی را نیز داراست به‌عنوان مثال لی و همکارانش در سال ۲۰۱۸ ترکیب آن را با روش اختلاف محدود در شبیه‌سازی انتقال و پخش حرارت به‌کار بردند و با استفاده از توزیع نقاط شیشکین<sup>۱</sup> به نتایجی دقیق‌تر از روش اختلاف محدود دست یافتند [۱۱].

دقت روش چندربعی به عوامل مختلفی بستگی دارد که مهم‌ترین آن‌ها پارامتر شکل<sup>۲</sup> است و تا به امروز، پژوهشگران در تلاش بوده‌اند تا روش‌های مختلفی برای بهینه‌سازی آن پیشنهاد دهند. در این زمینه؛ کانزا با پیشنهاد روابطی، معادلات بیضوی، سهموی و هذلولوی را در بحث دینامیک سیالات محاسباتی حل کرد [۱۲]. ایشان با آزمایش مقادیر مختلف پارامتر شکل دریافتند که مقداری بهینه برای آن وجود دارد ولی از معادله‌ای به معادله دیگر متفاوت است و برای آن الگوریتمی بر اساس خطای میانگین مربعات نسبت به جواب‌های دقیق ارائه نمودند [۱۳]. سارا خانواده توابع پایه شعاعی را بررسی و با مقایسه خصوصیات و ارتباط آن‌ها، تاثیر پارامتر شکل در این روش‌ها را بیان نمود [۱۴]. روابط تجربی هم در سال ۲۰۰۷ در راستای تخمین خطا برحسب پارامتر شکل بهینه، عدد وضعیت<sup>۳</sup> ماتریس ضرایب و پراکندگی نقاط میدان ارائه شد [۱۵] و [۱۶]. هانگ و همکارانش به‌طور مستقل، با مشاهده این امر که با خطی شدن شکل توابع پایه شعاعی دقت این توابع افزایش می‌یابد، پارامتر شکل را برای معادلات بیضوی بهینه ساختند. ایشان کران بالایی برای بازه اعداد انتخابی پارامتر شکل در نظر گرفتند و این پارامتر را نه در خود کران‌های بازه بلکه در مقادیر داخلی آن یافتند [۱۷]. سانگ و همکارانش با رویکردی متفاوت رابطه پارامتر شکل تابع چندربعی را مثلثاتی کردند و توانستند دقت آن را بهبود بخشند [۱۸]. اسماعیل بیگی و حسینی از الگوریتم ژنتیک<sup>۴</sup> استفاده کردند و بر اساس روش کانزا دستورالعملی برای انتخاب پارامتر شکل بهینه در روش چندربعی تنظیم نمودند [۱۹]. آدین

- 1 Shishkin nodes
- 2 Shape parameter
- 3 Condition number
- 4 Genetic Algorithm



شکل ۱. نمایش یک میدان دلخواه با نقاط محاسباتی در روش چندربعی

Fig. 1. Illustration of an arbitrary domain with computational nodes of MQ method.

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$K_{xx} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

شرایط مرزی اجباری<sup>۹</sup> در این گونه مسائل می‌تواند به صورت:

$$h(x_i, y_i) = c_1 \quad (7)$$

تعریف شود که در آن  $c_1$  مقداری ثابت و مشخص برای بار آبی کل در نقطه دلخواه  $(x_i, y_i)$  از مرز اجباری خواهد بود. شرایط مرزی طبیعی<sup>۱۰</sup> هم به صورت رابطه ۸ در نظر گرفته می‌شوند.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = c_2 \quad (8)$$

که در آن  $\mathbf{n}$  بردار نرمال عمود بر مرز طبیعی با دو مؤلفه در جهت‌های اصلی (رابطه ۹) و  $c_2$  نیز یک مقدار ثابت و معلوم است.

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \quad (9)$$

هم‌چنین با توجه به روابط بیان شده می‌توان نوشت:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -K_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \\ -K_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (10)$$

### ۳- روش چندربعی

در این روش تعداد  $N$  نقطه محاسباتی<sup>۱۱</sup> در میدان مسئله در نظر

ناهمسان از پدیده تراوش<sup>۱</sup> مورد بحث قرار می‌گیرد. هم‌چنین برای کاربرد راحت‌تر روش چندربعی در حل مسائل ناهمگن با هندسه‌های پیچیده و کاهش حجم محاسبات، فن تجزیه میدان<sup>۲</sup> [۲۶] مدنظر خواهد بود به‌گونه‌ای که مرز ناهمگنی منطبق بر مرز زیرمیدان‌ها باشد.

### ۲- معادله و شرایط مرزی حاکم بر پدیده تراوش

معادله داریسی<sup>۳</sup> برای محاسبه سرعت متوسط جریان آب در خاک اشباع به صورت زیر است [۲۷]:

$$(\mathbf{V} = -\mathbf{K}\mathbf{I}) \quad (1)$$

که در این رابطه،  $\mathbf{V}$  بردار سرعت متوسط جریان است و مؤلفه‌های آن در میدان‌های دوبعدی و در جهت‌های اصلی مطابق رابطه ۲ تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \quad (2)$$

در رابطه ۱،  $\mathbf{K}$  ماتریس ضریب هدایت هیدرولیکی<sup>۴</sup> با بعد طول بر زمان می‌باشد و در حالت دوبعدی به صورت زیر است:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix} \quad (3)$$

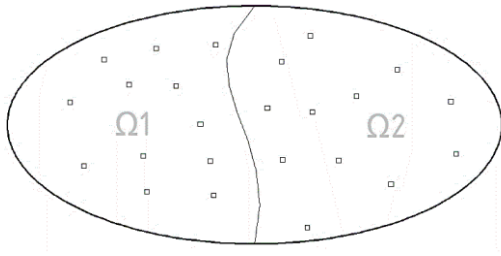
هم‌چنین  $\mathbf{I}$  بردار شیب هیدرولیکی<sup>۵</sup> است که از رابطه ۴ به دست می‌آید:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4)$$

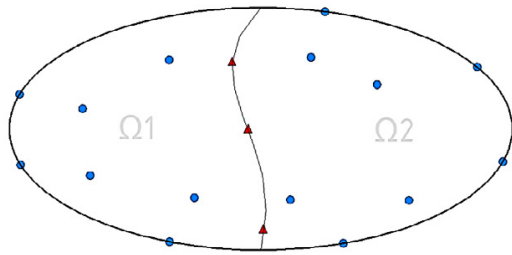
در این رابطه،  $h$  بار آبی کل (مجموع بار ارتفاع و بار فشار) است. معادله حاکم بر حرکت آب در خاک (تراوش) در حالت دائمی، معادله لاپلاس<sup>۶</sup> است که از ترکیب معادله پیوستگی (رابطه ۵) و معادله داریسی برای میدان‌های دوبعدی ناهمگن<sup>۷</sup> و ناهمسان<sup>۸</sup> به شکل رابطه ۶ استخراج می‌شود، به شرطی که جهت‌های اصلی ناهمسانی با جهت‌های محورهای اصلی مختصات یکی باشند:

- 1 Seepage
- 2 Domain decomposition
- 3 Darcy's equation
- 4 Permeability coefficient
- 5 Hydraulic gradient vector
- 6 Laplace equation
- 7 Inhomogeneous
- 8 Anisotropic

- 9 Dirichlet boundary conditions
- 10 Neumann boundary conditions
- 11 Computational point



شکل ۲. توزیع نقاط محاسباتی در دو زیر میدان  $\Omega_1$ ،  $\Omega_2$  و مرز مصنوعی  
Fig. 2. Distribution of computational nodes in  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  subdomains and artificial boundary.



شکل ۳. توزیع تعداد  $n_{c1}$ ،  $n_{c2}$  و  $n_a$  نقطه برهم‌نهی به ترتیب در زیر میدان‌های  $\Omega_1$ ،  $\Omega_2$  و مرز مصنوعی ( $n_{c1} + n_{c2} = n_G - 2n_a$ )  
Fig. 3. Distribution of collocation nodes in  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  subdomains and artificial boundary ( $n_{c1}$ ,  $n_{c2}$  and  $n_a$ ).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{c^2(c^2 y^2 - 2c^2 y y_j + c^2 y_j^2 + 1)}{(1 + ((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2)) / c^2} \quad (13)$$

برای ایجاد تعداد قابل توجهی درایه صفر در ماتریس ضرایب و نیز اعمال راحت‌تر روش چندربعی در میدان‌های غیر کارترین و هندسه‌های پیچیده، می‌توان از فن تجزیه میدان به کمک مرزهای مصنوعی استفاده کرد. با تجزیه شدن میدان به زیر میدان‌های کوچک‌تر، باید روش چندربعی را برای هر زیر میدان به‌طور موازی اعمال و ماتریس ضرایب کلی را به‌وسیله ماتریس ضرایب هر زیر میدان تشکیل داد. به‌عنوان مثال میدان شکل ۲ را در نظر بگیرید که با یک مرز مصنوعی به دو زیر میدان  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  تقسیم و نقاط محاسباتی در آن توزیع شده‌اند. در مسائل تراوش ارتباط بین دو زیر میدان از طریق نقاط واقع بر مرز مصنوعی و اعمال معادلات بقاء جرم و سرعت (روابط ۱۴ و ۱۵) برقرار می‌گردد.

$$f_{\Omega_1}(x_i, y_i) = f_{\Omega_2}(x_i, y_i) \quad (14)$$

$$\mathbf{V}_{\Omega_1}(x_i, y_i) = \mathbf{V}_{\Omega_2}(x_i, y_i) \quad (15)$$

گرفته می‌شود که هم در درون میدان و هم روی مرزها قرار گرفته‌اند (شکل ۱). این نقاط برخلاف روش‌های با شبکه نیاز به ارتباط اولیه با یکدیگر ندارند لذا کاربرد روش چندربعی در هندسه‌های پیچیده و مسائل سه‌بعدی بسیار راحت است و دیگر هزینه‌های پیش‌پردازش جهت تعریف شبکه را ندارد.

توزیع نقاط محاسباتی، بسته به نوع هندسه و پدیده مورد بررسی، می‌تواند به‌صورت یکنواخت یا غیریکنواخت باشد. در این پژوهش پنج توزیع مختلف از نقاط محاسباتی مدنظر است. در سه توزیع یکنواخت اول نقاط به‌ترتیب منطبق بر رئوس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، مستطیل و لوزی هستند و دو مورد دیگر هم توزیع‌های غیریکنواخت منظم با نام‌های فیبوناچی<sup>۱</sup> و پادوا<sup>۲</sup> هستند [۲۸-۳۰].

معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر مسائل مختلف دویبعدی به روش چندربعی با تابع زیر تقریب زده می‌شود و جواب معادله با استفاده از آن در هر نقطه از میدان محاسباتی به‌دست می‌آید:

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{1 + ((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2) / c^2} \quad (11)$$

در رابطه ۱۱،  $(x_j, y_j)$  مؤلفه‌های نقاط محاسباتی هستند.  $\lambda_j$  ها نیز مجهولاتی هستند که برای به‌دست آوردن آن‌ها باید تعداد  $N$  نقطه برهم‌نهی در میدان محاسباتی در نظر گرفته‌شود. دو روش برهم‌نهی<sup>۳</sup> و حداقل مربعات<sup>۴</sup> برای انتخاب این نقاط در میدان محاسباتی وجود دارد. در روش برهم‌نهی، نقاط انتخابی منطبق بر نقاط محاسباتی هستند ولی در روش حداقل مربعات این‌گونه نخواهد بود. در این پژوهش از روش اول استفاده می‌شود. لازم‌به‌ذکر است که این نقاط به دو بخش نقاط روی مرز و داخل میدان محاسباتی تقسیم می‌شوند، نقاط روی مرز برای اعمال شرایط مرزی مسئله و نقاط داخل میدان هم برای ارضاء معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر میدان محاسباتی در نظر گرفته می‌شوند.

برای تعیین سرعت و ارضاء معادله لاپلاس، مشتقات جزئی تابع تخمین در روش حاضر به‌ترتیب زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{c^2(x - x_j)}{\sqrt{1 + ((x - x_j)^2 + (y - y_j)^2) / c^2}} \quad (12)$$

- 1 Fibonacci
- 2 Padua
- 3 Collocation
- 4 Least squares

جدول ۱. مشخصه‌های الگوریتم ژنتیک در پژوهش حاضر  
Table 1. GA parameters in present research.

Population size	Elit count	Crossover function	Mutation	Crossover	Migration	Generation
۲۰	۱	۰.۸	Uniform	Two point	Forward	۱۰۰

لازم به ذکر است که فن تجزیه دامنه مشکل متراکم بودن ماتریس ضرایب در روش چندربعی را به طور کامل حل نمی‌کند و استفاده از ایده ناحیه حمایتی یا دامنه تاثیر می‌تواند راه حل مفیدی برای آن باشد.

در روابط ۱۱ تا ۱۳، C پارامتر شکل است. هر چند پژوهش‌های متعدد، دقت بالای روش چندربعی را تأیید می‌کنند ولی این دقت کاملاً به پارامتر شکل وابسته است. تاکنون نیز تلاش‌های متعددی برای انتخاب بهینه پارامتر شکل صورت گرفته ولی یک راه حل فراگیر و جامع برای آن پیشنهاد نشده و هم‌چنان در دست تحقیق است. در بخش بعد، یک الگوریتم جدید با هدف پوشش بخشی از نقاط ضعف سایر تلاش‌ها، پیشنهاد خواهد شد.

#### ۴- روش فراابتکاری انتخاب پارامتر شکل بهینه به کمک الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک در حل مسائلی که از نظر ریاضی دارای ارتباط فرمولی نیستند، بسیار مؤثر است هم‌چنین برخلاف روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک در دام نقاط بهینه محلی نمی‌افتد و از یافتن نقاط بهینه کلی بازمی‌ماند. به همین دلایل در پژوهش حاضر برای انتخاب پارامتر شکل بهینه از آن استفاده می‌شود. در این الگوریتم متغیر مسئله به صورت پیوسته مدل شده است و مشخصه‌های آن به شرح جدول زیر می‌باشند.

مسئله مهم و نوین در این رویکرد، تعیین حدود متغیر بهینه‌سازی و انتخاب تابع هدف مناسب می‌باشد. در این پژوهش، برای اولین بار، حدود پارامتر شکل بهینه، رابطه ۲۱، مرتبط با شعاع اقلیدسی پیشنهاد گردید چراکه این پارامتر با توجه به رابطه ۱۱ بر شعاع بین نقاط محاسباتی تاثیرگذار است. برای حد پایین پارامتر شکل از کمینه شعاع اقلیدسی با شرط عدم تکینگی ماتریس ضرایب ( $r_{\min}$ ) و برای حد بالای آن از بیشینه شعاع اقلیدسی ( $r_{\max}$ ) طبق روابط ۱۹ و ۲۰

در این شکل، تعداد کل نقاط محاسباتی ( $n_G$ ) برابر با  $n_{G1} + n_{G2}$  است و  $n_{G1}$  و  $n_{G2}$  به ترتیب تعداد نقاط محاسباتی در زیر دامنه‌های  $\Omega_1$ ،  $\Omega_2$  هستند. همان‌طور که بیان شد، برای اعمال معادلات حاکم و شرایط مرزی یک سری دیگر از نقاط در داخل میدان و روی مرزها اعم از مرز مصنوعی و واقعی مانند شکل ۳ توزیع می‌گردد.

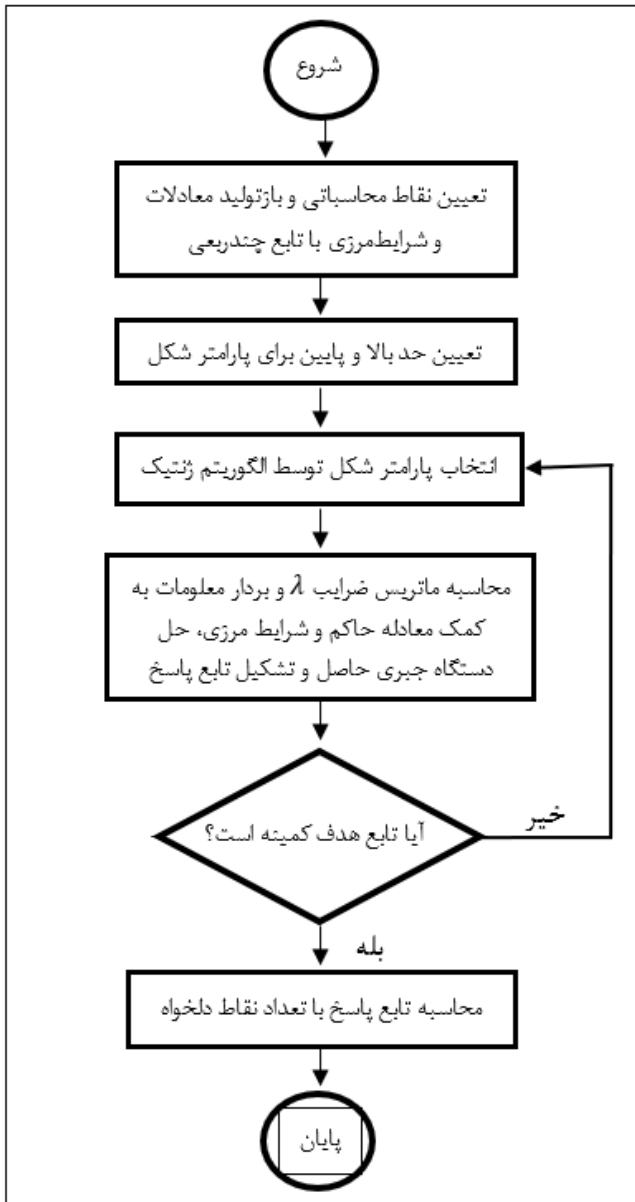
اگر پس از پردازش مدل، ماتریس‌های ضرایب هر زیر میدان با توجه به تعداد نقاط پخش شده در شکل ۳ به صورت زیر به دست آیند:

$$A_{\Omega_1} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n_{G1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_{c1},1} & \dots & a_{n_{c1},n_{G1}} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$A_{\Omega_2} = \begin{bmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n_{G2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_{c2},1} & \dots & b_{n_{c2},n_{G2}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

آن‌گاه با ماتریس به دست آمده از معادلات مرز مصنوعی ترکیب می‌شوند و ماتریس ضرایب کلی مطابق رابطه ۱۸ تشکیل می‌شود که دارای تعداد قابل توجهی درایه صفر است. هم‌چنین استفاده از فن تجزیه میدان در روش چندربعی برای حل مسائل ناهمگن تراوش و منطبق کردن مرز مصنوعی بر مرزهای ناهمگنی بسیار راهگشا و مؤثر است.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n_{G1}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n_{c1},1} & \dots & a_{n_{c1},n_{G1}} & 0 & b_{1,1} & \dots & b_{1,n_{G2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ ab_{1,1} & \dots & ab_{1,n_{G1}} & ba_{1,1} & \dots & ba_{1,n_{G2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ab_{2n_a,1} & \dots & ab_{2n_a,n_{G1}} & ba_{2n_a,1} & \dots & ba_{2n_a,n_{G2}} \end{bmatrix} \quad (18)$$



شکل ۴. فلوجارت روش حل مسائل با روش پیشنهادی این پژوهش  
Fig. 4. Flowchart of the proposed solution approach.

هرچند که روش چندربعی با حد پایینی از نقاط هم دقت قابل قبولی ارائه می‌دهد. هم‌چنین در این الگوریتم، برای بهینه‌سازی پارامتر شکل نیاز به هیچ پاسخ تحلیلی و غیر تحلیلی از مسئله نیست. تمرکز الگوریتم پیشنهادی این پژوهش بر روی تعیین پارامتر شکل بهینه در روش چندربعی است و به‌طور مستقیم در گسسته‌سازی معادلات مرزی دخالت ندارد. با توجه به اینکه روش چندربعی از فرم قوی معادلات مرزی استفاده می‌کند و قبلاً هم با موفقیت در

استفاده گردید.

$$r_{\min} = \min\left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right), \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j \quad (19)$$

$$r_{\max} = \max\left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right), \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq j \quad (20)$$

$$C_{\text{optimum}} \in [r_{\min}, r_{\max}] \quad (21)$$

تخمین بازه محدودی برای پارامتر شکل بهینه متناسب با هندسه مسئله، امری مهم در حداقل نمودن سعی و خطا و سرعت بخشیدن به روند حل مسائل در روش چندربعی است. مناسب بودن این بازه با حل مثال‌های متنوعی از جمله مثال‌های بخش ۵ به اثبات رسید. در این پژوهش، مراحل زیر برای انتخاب تابع هدف در نظر گرفته می‌شود:

الف) تولید پارامتر شکل توسط الگوریتم ژنتیک در بازه تعریف‌شده  $[r_{\min}, r_{\max}]$

ب) تشکیل تابع تقریب چندربعی با تعداد نقاط محاسباتی حداقل  $(f_1(x, y))$

ج) تشکیل تابع تقریب چندربعی با تعداد نقاط محاسباتی حداکثر  $(f_2(x, y))$

د) محاسبه اختلاف جواب دو تابع تقریب به‌دست‌آمده در مراحل (ب) و (ج) و تعریف تابع هدف به‌صورت:

$$\text{Fitness} = \sum_{i=1}^m \frac{|f_1(x_i, y_i) - f_2(x_i, y_i)|}{|f_1(x_i, y_i)|} \quad (22)$$

الگوریتم ژنتیک، پارامتر شکل بهینه را از بازه انتخابی به‌گونه‌ای معرفی می‌کند که به‌ازای آن، تابع هدف کمینه شود. لازم‌به‌ذکر است که نقاط محاسباتی حداقل و حداکثر یعنی یک حد پایین و یک حد بالا از تعداد نقاط محاسباتی هستند که مرزها و داخل میدان مسئله را نمایش می‌دهند. این حدود می‌توانند با قضاوت مهندسی تعیین بشوند و حتماً نمی‌بایست یک مقدار خاص باشند.

نکته جالب‌توجه این است که برای اولین بار با الگوریتم پیشنهادی این پژوهش، پارامتر شکل معرفی‌شده برای هر تعداد نقطه‌ای مابین نقاط محاسباتی حداقل و حداکثر ثابت و بهینه است. به‌عبارت‌دیگر، با پیشنهاد تابع هدف جدید مطابق رابطه ۲۲، پارامتر شکل به تغییرات تعداد نقاط محاسباتی وابسته نخواهد بود. پرواضح است که هرچه تعداد نقاط محاسباتی بیشتر باشد، دقت پاسخ‌ها بیشتر خواهد بود؛

$$H(x, y)|_{y=10} = 100 \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \quad (24)$$

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial x}|_{x=5} = 0 \quad (25)$$

$$H(x, y)|_{y=0} = 0 \quad (26)$$

همچنین حل تحلیلی این مسئله به صورت زیر می باشد:

$$H(x, y) = \frac{100}{\sinh(\pi)} \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \sinh\left(\frac{\pi y}{10}\right) \quad (27)$$

برای حل این مسئله با روش چندربعی تحت الگوریتم این پژوهش، پنج توزیع مختلف از نقاط محاسباتی انتخاب شد تا نشان داده شود که این رویکرد به نوع توزیع نقاط وابسته نیست. در سه توزیع یکنواخت اول، نقاط به ترتیب منطبق بر رئوس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع (شکل ۶)، مستطیل (شکل ۷) و لوزی (شکل ۸) هستند و دو مورد دیگر هم توزیع‌های غیریکنواخت منظم با نام‌های فیبوناچی (شکل ۹) و پادوا (شکل ۱۰) می‌باشند. نتایج حاصل از هر پنج توزیع در جدول‌های ۲ تا ۶ ارائه گردیده‌است. نتایج بار آبی کل و سرعت با توزیع ۸۰-۵ نقطه به صورت مثلی در مقایسه با حل تحلیلی در شکل‌های ۵-ب تا ۵-ه و جداول ۷ تا ۱۰ آورده شده‌است. همان‌طور که مشخص است، نتایج دقت بالای روش چندربعی تحت الگوریتم این پژوهش را نشان می‌دهند.

شبیه‌سازی انواع شرایط مرزی به کار رفته‌است، مطمئناً تحت الگوریتم پیشنهادی این پژوهش نیز با مشکل مواجه نمی‌شود. همچنین، در این پژوهش انواع شرایط مرزی شامل شرایط مرزی اجباری ثابت و متغیر و شرایط مرزی طبیعی در مثال‌های پدیده مورد هدف یعنی تراوش (بخش ۵) گنجانده شده و پس از حل آن‌ها دقت مطلوب حاصل گردیده‌است. فلوجارت روش پیشنهادی این پژوهش برای حل مسائل به روش چندربعی مطابق شکل ۴ در نظر گرفته شده‌است.

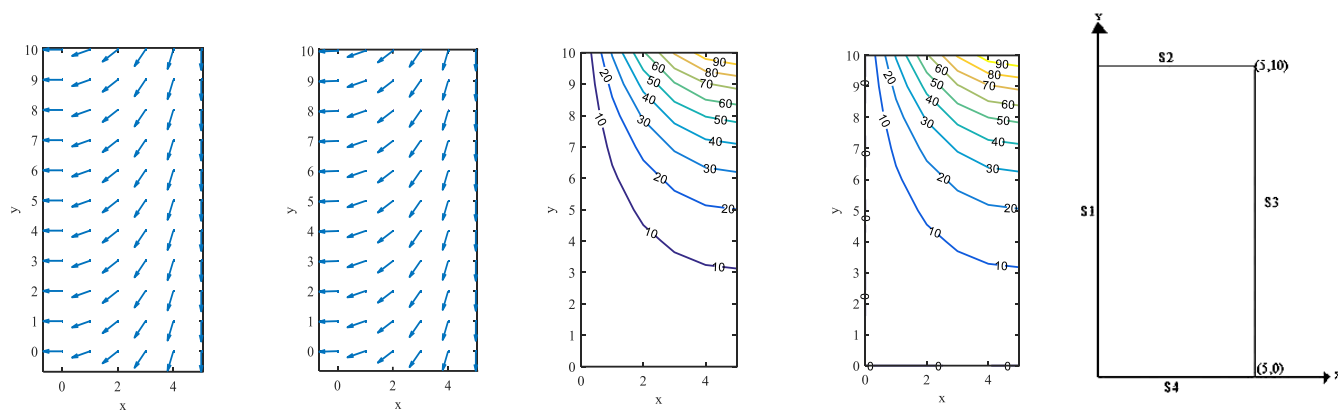
## ۵- مثال‌های عددی

در این بخش، به منظور صحت‌سنجی، چهار مثال از پدیده تراوش بررسی می‌شود. مثال شماره یک دارای پاسخ تحلیلی با شرایط مرزی متنوع برای سنجش پاسخ روش چندربعی تحت الگوریتم پیشنهادی است. سایر مثال‌ها با هدف نشان دادن توانایی روش حاضر در حل مسائل متنوع‌تر از تراوش در خاک ناهمگن، خاک ناهمسان و هندسه‌های پیچیده‌تر ارائه می‌شوند.

### ۵-۱- مثال یک

هندسه این مثال همگن و همسان مطابق شکل ۵-الف است که در آن شرایط مرزی  $S_1$  تا  $S_4$  مطابق روابط ۲۳ تا ۲۶ تعریف و ضریب هدایت هیدرولیکی آن برابر یک در نظر گرفته شده‌است.

$$H(x, y)|_{x=0} = 0 \quad (23)$$



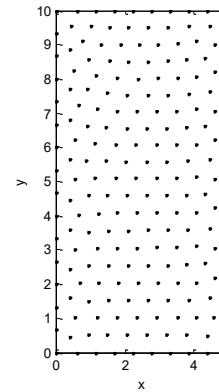
الف: نمایش شماتیک هندسه و شرایط مرزی  
ب) بار آبی کل به روش چندربعی  
ج) بار آبی کل به روش تحلیلی  
د) بردارهای سرعت به روش چندربعی  
ه) بردارهای سرعت به روش تحلیلی

شکل ۵. میدان محاسباتی و نتایج حل مثال شماره یک با توزیع نقاط مثلی  
Fig. 5. Computational domain and results of example 1 using triangular distribution.

جدول ۲. نتایج حل مثال یک با توزیع نقاط مثلثی

Table 2. Results of example 1 using triangular distribution.

تعداد نقاط	پارامتر شکل بهینه	خطای جذر میانگین مربعات	عدد وضعیت ماتریس ضرایب
۵۵	۰.۲۵	۱.۵۱۳۷	$7.16E+07$
۸۰	۰.۲۵	۱.۲۳۷۴	$1.71E+09$
۱۱۷	۰.۲۵	۰.۲۳۱۱	$1.85E+10$
۱۴۸	۰.۲۵	۰.۱۱۲۳	$5.38E+10$
۱۷۹	۰.۲۵	۰.۰۴۱۶	$1.92E+12$



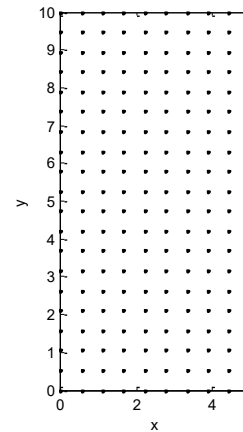
شکل ۶. توزیع نقاط منطبق بر رئوس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع

Fig. 6. Triangular distribution.

جدول ۳. نتایج حل مثال یک با توزیع نقاط مستطیلی

Table 3. Results of example 1 using rectangular distribution.

تعداد نقاط	پارامتر شکل بهینه	خطای جذر میانگین مربعات	عدد وضعیت ماتریس ضرایب
۵۰	۰.۱۹۴۱۲	۲.۹۲	$2.89E+08$
۷۲	۰.۱۹۴۱۲	۰.۶۲۳۲۵	$1.40E+10$
۹۸	۰.۱۹۴۱۲	۰.۴۴۷۲۲	$7.52E+11$
۱۲۸	۰.۱۹۴۱۲	۰.۰۵	$4.32E+13$
۱۶۲	۰.۱۹۴۱۲	۰.۰۷۱۱	$2.52E+15$



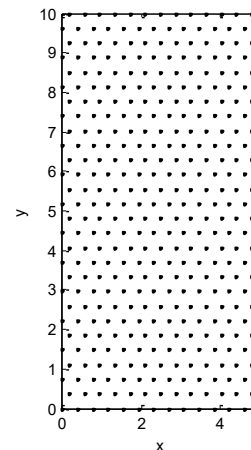
شکل ۷. توزیع نقاط منطبق بر رئوس مستطیل

Fig. 7. Rectangular distribution.

جدول ۴. نتایج حل مثال یک با توزیع نقاط لوزی

Table 4. Results of example 1 using diamond distribution.

تعداد نقاط	پارامتر شکل بهینه	خطای جذر میانگین مربعات	عدد وضعیت ماتریس ضرایب
۶۶	۰.۱۷۸۱۳	۰.۰۷۴۴	$8.08E+08$
۹۱	۰.۱۷۸۱۳	۰.۰۳۸۶۹	$3.52E+10$
۱۲۰	۰.۱۷۸۱۳	۰.۰۱۷	$1.63E+12$
۱۵۳	۰.۱۷۸۱۳	۰.۰۰۷۱	$7.72E+13$
۱۹۰	۰.۱۷۸۱۳	۰.۰۰۳۲	$3.65E+15$



شکل ۸. توزیع نقاط منطبق بر رئوس لوزی

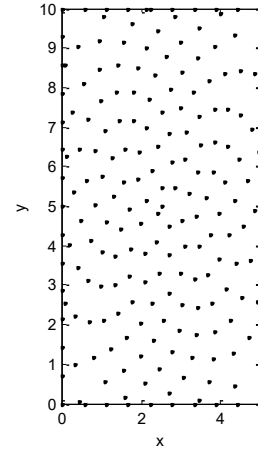
Fig. 8. Diamond distribution.



جدول ۵. نتایج حل مثال یک با توزیع نقاط فیبوناچی

Table 5. Results of example 1 using Fibonacci distribution.

تعداد نقاط	پارامتر شکل بهینه	خطای جذر میانگین مربعات	عدد وضعیت ماتریس ضرایب
۶۶	۰.۱۸۷	۰.۷۳۴۶۷	۲.۴۳E+۰۹
۷۶	۰.۱۸۷	۰.۰۸۸۳۸	۶.۰۸E+۰۹
۱۰۶	۰.۱۸۷	۰.۰۴۸۶	۸.۶۸E+۱۱
۱۴۶	۰.۱۸۷	۰.۰۰۴۰۴	۶.۷۴E+۱۴
۱۸۶	۰.۱۸۷	۰.۰۰۰۸۲۶	۳.۰۲E+۱۵

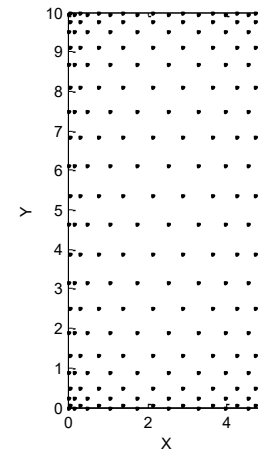


شکل ۹. توزیع نقاط فیبوناچی  
Fig. 9. Fibonacci distribution.

جدول ۶. نتایج حل مثال یک با توزیع نقاط پادوا

Table 6. Results of example 1 using Padua distribution.

تعداد نقاط	پارامتر شکل بهینه	خطای جذر میانگین مربعات	عدد وضعیت ماتریس ضرایب
۴۵	۰.۱۳۴۱۲	۰.۰۴۴۰	۱.۴۴E+۰۸
۶۶	۰.۱۳۴۱۲	۰.۰۰۵۴	۱.۱۹E+۱۰
۹۱	۰.۱۳۴۱۲	۰.۰۰۱۳۶	۶.۹۵E+۱۱
۱۲۰	۰.۱۳۴۱۲	۰.۰۰۰۱۸۳	۵.۳۹E+۱۳
۱۵۳	۰.۱۳۴۱۲	۵.۰۴۶E-۵	۲.۶۲E+۱۵



شکل ۱۰. توزیع نقاط پادوا  
Fig. 10. Padua distribution.

جدول ۷. مقادیر بار آبی در مثال یک با روش چندربعی

Table 7. Pressure head values of example 1 using MQ method.

X \ y	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	-۰.۰۰۲
۱	۰.۰۰۱	۰.۸۳۹	۱.۵۸۸	۲.۱۸۰	۲.۵۵۵	۲.۶۷۷
۲	-	۱.۷۶۵	۳.۳۵۰	۴.۶۰۳	۵.۳۹۷	۵.۶۵۶
۳	۰.۰۰۰	۲.۸۶۹	۵.۴۵۱	۷.۴۹۱	۸.۷۹۱	۹.۲۲۸
۴	۰.۰۰۲	۴.۲۶۵	۸.۰۹۹	۱۱.۱۳۲	۱۳.۰۶۰	۱۳.۷۱۰
۵	-	۶.۰۹۲	۱۱.۵۷۱	۱۵.۸۹۴	۱۸.۶۳۸	۱۹.۵۵۷
۶	۰.۰۰۰	۸.۵۴۰	۱۶.۲۱۵	۲۲.۲۶۸	۲۶.۰۸۸	۲۷.۳۱۹
۷	-	۱۱.۸۵۵	۲۲.۵۰۸	۳۰.۹۰۲	۳۶.۱۹۰	۳۷.۸۷۶
۸	۰.۰۰۲	۱۶.۳۶۸	۳۱.۰۹۷	۴۲.۷۱۲	۵۰.۰۳۲	۵۲.۳۵۸
۹	-	۲۲.۵۱۹	۴۲.۸۳۷	۵۸.۸۹۴	۶۸.۹۷۲	۷۲.۱۳۳
۱۰	۰.۰۰۰	۳۰.۸۷۱	۵۸.۷۸۴	۸۰.۹۳۴	۹۵.۰۱۶	۹۹.۴۱۱

جدول ۸. مقادیر بار آبی در مثال یک با روش تحلیلی

Table 8. Pressure head values of example 1 using analytical method.

X \ y	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۱	۰.۰۰۰	۰.۸۵۵	۱.۶۲۵	۲.۲۳۷	۲.۶۲۰	۲.۷۶۵
۲	۰.۰۰۰	۱.۷۹۴	۳.۴۱۲	۴.۶۹۷	۵.۵۲۲	۵.۸۰۶
۳	۰.۰۰۰	۲.۹۱۲	۵.۵۳۹	۷.۶۲۴	۸.۹۶۳	۹.۴۲۴
۴	۰.۰۰۰	۴.۳۲۰	۸.۲۱۷	۱۱.۳۱۰	۱۳.۲۹۶	۱۳.۹۸۰
۵	۰.۰۰۰	۶.۱۵۸	۱۱.۷۱۳	۱۶.۱۲۱	۱۸.۹۵۲	۱۹.۹۲۷
۶	۰.۰۰۰	۸.۶۰۸	۱۶.۳۷۴	۲۲.۵۳۷	۲۶.۴۹۳	۲۷.۸۵۷
۷	۰.۰۰۰	۱۱.۹۱۵	۲۲.۶۶۴	۳۱.۱۹۵	۳۶.۶۷۲	۳۸.۵۵۹
۸	۰.۰۰۰	۱۶.۴۰۸	۳۱.۲۱۰	۴۲.۹۵۷	۵۰.۴۹۹	۵۳.۰۹۸
۹	۰.۰۰۰	۲۲.۵۳۴	۴۲.۸۶۲	۵۸.۹۹۴	۶۹.۳۵۲	۷۲.۹۲۱
۱۰	۰.۰۰۰	۳۰.۹۰۲	۵۸.۷۷۹	۸۰.۹۰۲	۹۵.۱۰۶	۱۰۰.۰۰۰

و با تغییر تعداد نقاط به دقت موردنظر دست یافت. بسیاری از روش‌های قبل به‌ازای هر تعداد نقطه باید پارامتر شکل را بهینه کنند و این مسئله زمان محاسبات را افزایش می‌دهد. هم‌چنین دقت همه توزیع‌های مذکور بالا است هرچند که نسبت به یکدیگر متفاوت هستند. هم‌چنین عدد وضعیت آن‌ها نیز مطلوب است.

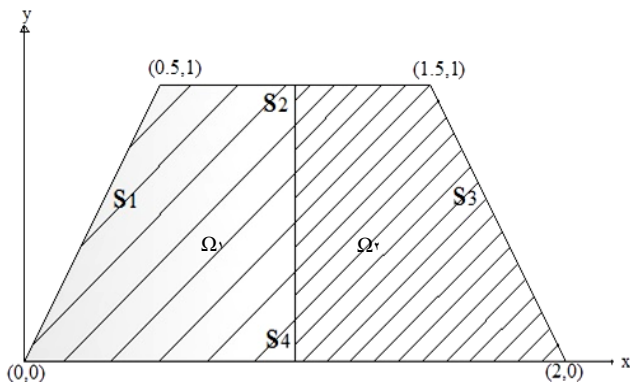
۲-۵- مثال دو

هندسه این مثال ناهمگن مطابق شکل ۱۱ است که در آن شرایط مرزی  $S_1$  تا  $S_4$  به ترتیب مطابق روابط ۲۸ تا ۳۱ تعریف می‌شود. ضریب هدایت هیدرولیکی در همه جهت‌ها برای نواحی  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  به ترتیب برابر  $0.001$  و  $0.0001$  متر بر ثانیه است.

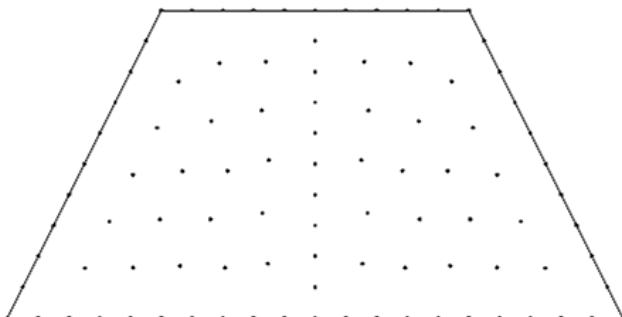
$$H(x, y) = 3 \quad (28)$$

$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0 \quad (29)$$

$$H(x, y) = 2 \quad (30)$$



شکل ۱۱. هندسه و شرایط مرزی مثال شماره دو  
Fig. 11. Geometry and boundary conditions of example 1.



شکل ۱۲. توزیع یکنواخت ۹۷ نقطه در مثال دو  
Fig. 12. Uniform distribution of 97 nodes in example 2.

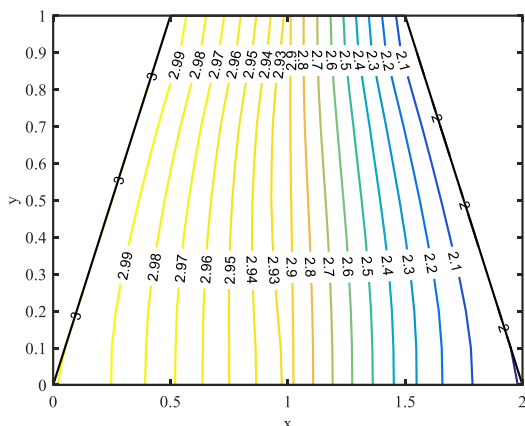
همان‌طور که مشاهده می‌شود در انواع توزیع‌های بررسی‌شده، پارامتر شکل بهینه به تعداد نقاط انتخابی برای حل مسئله وابسته نیست. این امر یک نتیجه بسیار مهم و مفید برای روش چندربعی خواهد بود چراکه با الگوریتم پیشنهادی این پژوهش می‌توان به راحتی پارامتر شکلی مستقل از تعداد نقاط برای هر مسئله به دست آورد.

جدول ۹. مقادیر سرعت در مثال یک با روش چندربعی  
Table 9. Velocity values in example 1 using MQ method.

x \ y	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۱	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۱۳۱
۲	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴
۳	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲
۴	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲
۵	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹
۶	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹
۷	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵
۸	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵
۹	۰.۴۲۵	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶
۱۰	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶

جدول ۱۰. مقادیر سرعت در مثال یک با روش تحلیلی  
Table 10. Velocity values in example 1 using analytical method.

x \ y	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۱	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۱۳۷
۲	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷
۳	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱
۴	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱
۵	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹
۶	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹
۷	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳
۸	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳
۹	۰.۴۲۳	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴
۱۰	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴



شکل ۱۳. خطوط هم فشار در مثال شماره دو با روش چندربعی  
Fig. 13. Pressure contours in example 2 using MQ method.

جدول ۱۱. مقادیر پارامتر شکل بهینه در مثال شماره دو  
Table 11 Optimum shape parameter values in example 2.

تعداد نقاط	پارامتر شکل بهینه برای ناحیه $\Omega_1$	پارامتر شکل بهینه برای ناحیه $\Omega_2$
۶۵	۱/۲	۱/۵
۹۷	۱/۲	۱/۵
۱۳۰	۱/۲	۱/۵

جدول ۱۲. مقادیر بار آبی کل بر حسب متر در مثال شماره دو به روش حجم محدود (FV) و چندربعی (MQ)  
Table 12. Pressure head values of example 2 using FV and MQ methods.

x	y	H (FV)	H (MQ)	x	y	H (FV)	H (MQ)
۰.۲۵۰	۰.۵۰۰	۳.۰۰۰	۳.۰۰۰	۱.۰۰۷	۰.۵۰۰	۲.۹۰۰	۲.۹۱۰
۰.۳۴۷	۰.۵۰۰	۲.۹۹۰	۲.۹۹۰	۱.۰۸۴	۰.۵۰۰	۲.۸۰۰	۲.۸۰۰
۰.۴۳۷	۰.۵۰۰	۲.۹۸۰	۲.۹۸۰	۱.۱۶۰	۰.۵۰۰	۲.۷۰۰	۲.۷۰۰
۰.۵۲۴	۰.۵۰۰	۲.۹۷۰	۲.۹۸۰	۱.۲۳۷	۰.۵۰۰	۲.۶۰۰	۲.۶۰۰
۰.۶۰۶	۰.۵۰۰	۲.۹۶۰	۲.۹۷۰	۱.۳۱۵	۰.۵۰۰	۲.۵۰۰	۲.۵۰۰
۰.۶۹۵	۰.۵۰۰	۲.۹۵۰	۲.۹۶۰	۱.۳۹۵	۰.۵۰۰	۲.۴۰۰	۲.۴۰۰
۰.۷۶۳	۰.۵۰۰	۲.۹۴۰	۲.۹۵۰	۱.۴۷۷	۰.۵۰۰	۲.۳۰۰	۲.۳۰۰
۰.۸۴۰	۰.۵۰۰	۲.۹۳۰	۲.۹۴۰	۱.۵۶۳	۰.۵۰۰	۲.۲۰۰	۲.۲۰۰

### ۳-۵- مثال سه

هندسه و شرایط مرزی این مثال همانند مثال دو می باشد با این تفاوت که محیط دامنه همگن بوده ولی دارای ناهمسانی  $\frac{k_y}{k_x} = ۱۲$  می باشد. برای حل، تعداد ۲۰۹ نقطه انتخاب شد. بازه اولیه پارامتر شکل به صورت  $[۱/۹ و ۱/۴]$  و پارامتر شکل بهینه  $۱/۸۱۶۸$  به دست آمد. نتایج حل این مثال با رویکرد حاضر در شکل ۱۴ و در مقایسه با روش حجم محدود در جدول ۱۳ ارائه گردیده است.

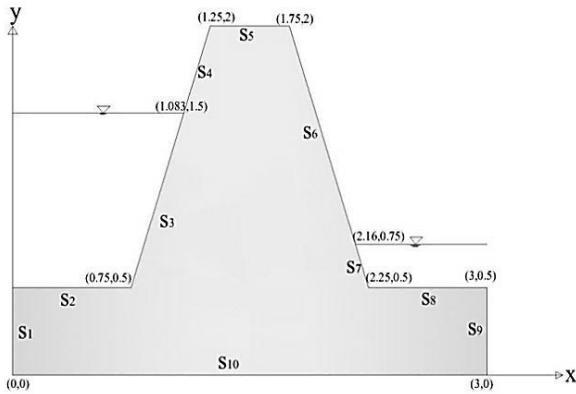
### ۴-۵- مثال چهار

در این مثال یک هندسه پیچیده تر با الگوی سدهای خاکی به همراه

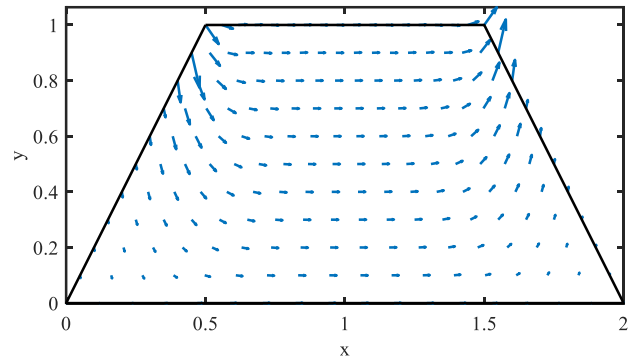
$$\frac{\partial H(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad (31)$$

برای حل این مسئله از روش تجزیه میدان استفاده شد و دو زیر میدان  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  با یک مرز مصنوعی واقع بر مرز ناهمگنی ایجاد گردید. برای محاسبه پاسخها، تعداد ۹۷ نقطه با توزیع مثلثی (شکل ۱۲) انتخاب شد و بازه اولیه پارامتر شکل هم  $[۱/۹ و ۱]$  به دست آمد. نتایج حل این مثال در جدول ۱۱ و شکل ۱۳ ارائه گردیده است.

برای صحت سنجی نیز از نتایج روش حجم محدود مطابق جدول ۱۲ استفاده شده است.



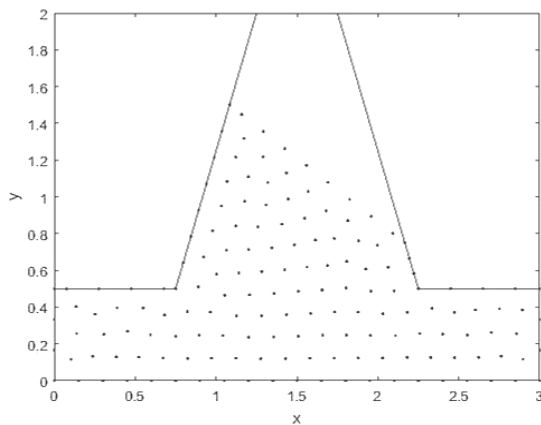
شکل ۱۵. هندسه و شرایط مرزی مثال شماره ۴  
Fig. 15. Geometry and boundary conditions of example 4.



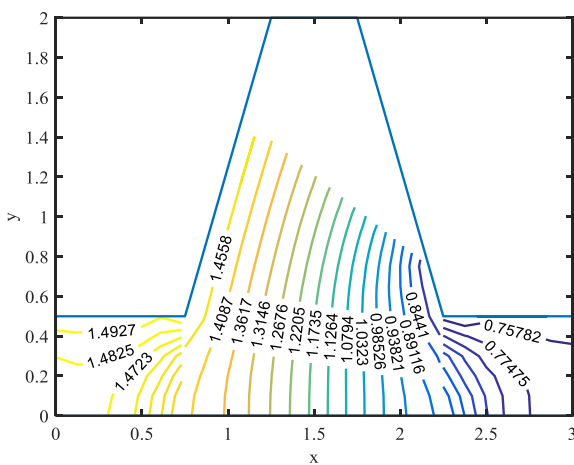
شکل ۱۴. بردارهای سرعت در مثال سه با روش چندربعی  
Fig. 14. Velocity vectors in example 3 using MQ method.

جدول ۱۳. اندازه سرعت در مثال سه به روش FV و MQ  
Table 13. Velocity values of example 3 using FV and MQ methods.

x	y	V (FV)	V (MQ)
۰.۲۵۰۱	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۷۸۹۵۲۵	۰.۰۰۰۷۷۰۲۹
۰.۵۱۸۲	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۱۲۵۹۲۸۳	۰.۰۰۱۲۲۸۷۳۴
۰.۶۴۶۶	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۸۳۶۶۵	۰.۰۰۰۸۵۷۸۱۱
۰.۷۶۴۵	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۵۰۴۷۳	۰.۰۰۰۸۳۱۸۶
۰.۸۸۱۹	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۴۸۹۰۶	۰.۰۰۰۸۲۵۵۳۴
۱.۰۰۰۱	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۴۹۰۷۹	۰.۰۰۰۸۲۱۳۳۴
۱.۱۱۷۹	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۴۸۹۰۶	۰.۰۰۰۸۱۸۷۳۳
۱.۲۳۵۸	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۵۰۴۷۳	۰.۰۰۰۸۲۸۲۴۴
۱.۳۵۳۶	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۸۳۶۶۵	۰.۰۰۰۸۵۶۴۹۱
۱.۴۸۱۴	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۱۲۵۹۲۸۳	۰.۰۰۱۲۲۸۷۳۴



شکل ۱۶. توزیع یکنواخت ۱۵۱ نقطه در مثال چهار  
Fig. 16. Uniform distribution of 151 nodes in example 4.



شکل ۱۷. خطوط هم فشار در مثال چهار با روش چندربعی  
Fig. 17. Pressure contours in example 4 using MQ method.

پی مطابق شکل ۱۵ انتخاب شد. مرزهای  $S_1$ ،  $S_9$  و  $S_{10}$  نفوذناپذیر،  $S_4$ ،  $S_5$  و  $S_6$  آزاد،  $S_2$  و  $S_3$  متأثر از ارتفاع آب بالادست و  $S_7$  و  $S_8$  متأثر از ارتفاع آب پایین دست هستند.

برای حل این مسئله، تعداد ۱۵۱ نقطه مطابق شکل ۱۶ انتخاب شد. همان طور که در این شکل مشخص است، روش چندربعی این قابلیت را دارد که نقاط محاسباتی در بخشی از میدان که پاسخ مهم تر است توزیع شوند و محاسبات در آن نواحی با دقت بالاتری صورت گیرد. هم چنین بازه اولیه پارامتر شکل [۳، ۰.۴۱۴ و ۱، ۲] و مقدار بهینه آن ۲۶۱۹۲ به دست آمد. نتایج حل این مثال با رویکرد حاضر در شکل ۱۷ و در

جدول ۱۴. مقادیر بار آبی در مثال چهار به روش FV و MQ  
Table 14. Pressure head values of example 4 using FV and MQ methods.

x	y	H (FV)	H (MQ)
۰.۷۵	۰.۵	۱.۵	۱.۵۰۰
۰.۸۶۷۹	۰.۵	۱.۴۵	۱.۴۵۵
۱.۰۰۶۹	۰.۵	۱.۴	۱.۳۹۲
۱.۱۴۴۴	۰.۵	۱.۳۵	۱.۳۳۶
۱.۲۷۶	۰.۵	۱.۳	۱.۲۷۹
۱.۴۰۰۵	۰.۵	۱.۲۵	۱.۲۲۲
۱.۵۱۸۳	۰.۵	۱.۲	۱.۱۶۶
۱.۶۲۸۴	۰.۵	۱.۱۵	۱.۱۱۲
۱.۷۳۰۷	۰.۵	۱.۱	۱.۰۵۹
۱.۸۲۴۹	۰.۵	۱.۰۵	۱.۰۰۷
۱.۹۱۱۳	۰.۵	۱	۰.۹۵۸
۱.۹۹	۰.۵	۰.۹۵	۰.۹۱۲
۲.۰۶۳	۰.۵	۰.۹	۰.۸۶۷
۲.۱۳۰۸	۰.۵	۰.۸۵	۰.۸۲۱
۲.۱۹۶۱	۰.۵	۰.۸	۰.۷۷۷
۲.۲۵	۰.۵	۰.۷۵	۰.۷۵۰

مقایسه با روش حجم محدود در جدول ۱۴ ارائه گردیده است.

## ۶- نتیجه گیری

در این پژوهش یک رویکرد فراابتکاری با استفاده از الگوریتم ژنتیک برای تعیین پارامتر شکل بهینه در روش چندربعی با هدف بهبود برخی از نقاط ضعف روش‌های پیشین پیشنهاد شد. بعضی از روش‌ها تجربی هستند و دقت آن‌ها بسته به بعد مسئله، نوع مسئله (درون‌یابی یا حل معادلات دیفرانسیل)، شرایط مرزی (طبیعی یا اجباری) و نوع توزیع نقاط (یکنواخت یا غیریکنواخت) متفاوت است ولی الگوریتم حاضر برای حل مسائل با معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی گوناگون و هندسه‌های مختلف با دقت مناسبی قابل کاربرد است. هم‌چنین رویکرد حاضر با سه توزیع یکنواخت و دو توزیع غیریکنواخت منظم از نقاط محاسباتی نیز آزمایش شد و نتایج قابل‌قبولی ارائه داد. بعضی روش‌ها به حل دقیق یا یک حل عددی دیگر از مسئله هم‌زمان با روش چندربعی نیاز دارند درحالی‌که تابع هدف در این پژوهش به‌گونه‌ای تعیین شد که نیاز به یک حل اولیه از

مسئله نباشد. روابط پیشین تعیین پارامتر شکل متغیر به دلیل ایجاد اختلافات بیشتر در درایه‌های ماتریس ضرایب، احتمال کوچک شدن عدد وضعیت و بدحالت شدن آن را بالاتر می‌برند و در آن‌ها تعیین حد پایین و حد بالای پارامتر شکل‌ها همواره یک چالش بوده است. در الگوریتم پیشنهادی، شرط بدحالت نشدن ماتریس ضرایب گنجانده شده و بازه محدودی برای پارامتر شکل بهینه، متناسب با کمینه و بیشینه فاصله بین نقاط محاسباتی یا به عبارتی متناسب با هندسه مسئله پیشنهاد گردیده است. این بازه برای به حداقل رساندن سعی و خطا و سرعت بخشیدن به روند حل مسائل در الگوریتم حاضر مفید واقع شد و در سایر الگوریتم‌ها نیز قابل کاربرد خواهد بود. برای اولین بار با الگوریتم پیشنهادی این پژوهش، پارامتر شکل معرفی شده برای هر تعداد نقطه‌ای ثابت و بهینه به دست آمد. به عبارت دیگر، پارامتر شکل به تغییرات تعداد نقاط محاسباتی وابسته نخواهد بود و برخلاف دیگر روش‌ها نیاز به بهینه‌کردن آن برای هر تعداد نقطه محاسباتی و صرف هزینه زمانی نیست. هم‌چنین استفاده از الگوریتم ژنتیک باعث می‌شود که روش حاضر برخلاف روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک در دام نقاط بهینه محلی نیافتد که از یافتن نقاط بهینه کلی بازماند. برای ایجاد تعداد قابل‌توجهی درایه صفر در ماتریس ضرایب و نیز اعمال راحت‌تر روش چندربعی در شبیه‌سازی میدان‌های ناهمگن و هندسه‌های پیچیده در مسائل تراوش، فن تجزیه دامنه به کمک مرزهای مصنوعی با موفقیت به کار گرفته شد و برای مسائل مشابه نیز توصیه می‌شود. به منظور صحت‌سنجی، مسائلی همگن، ناهمگن و ناهمسان از پدیده تراوش با کاربرد در بدنه و پی سدهای خاکی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج به دست آمده از حل این مسائل در مقایسه با نتایج حل دقیق و روش حجم محدود، توانایی و دقت بالای روش چندربعی تحت الگوریتم پیشنهادی این پژوهش را نشان داد.

## مراجع

- [1] R.L. Hardy, Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, Journal of geophysical research, 76(8) (1971) 1905-1915.
- [2] R.L. Hardy, Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968-1988, Computers & Mathematics with Applications, 19(8-9) (1990) 163-208.

- [14] S.A. Sarra, Integrated multiquadric radial basis function approximation methods, *Computers & Mathematics with Applications*, 51(8) (2006) 1283-1296.
- [15] C.-S. Huang, C.-F. Lee, A.-D. Cheng, Error estimate, optimal shape factor, and high precision computation of multiquadric collocation method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31(7) (2007) 614-623.
- [16] A.-D. Cheng, Multiquadric and its shape parameter—a numerical investigation of error estimate, condition number, and round-off error by arbitrary precision computation, *Engineering analysis with boundary elements*, 36(2) (2012) 220-239.
- [17] C.-S. Huang, H.-D. Yen, A.-D. Cheng, On the increasingly flat radial basis function and optimal shape parameter for the solution of elliptic PDEs, *Engineering analysis with boundary elements*, 34(9) (2010) 802-809.
- [18] S. Xiang, K.-m. Wang, Y.-t. Ai, Y.-d. Sha, H. Shi, Trigonometric variable shape parameter and exponent strategy for generalized multiquadric radial basis function approximation, *Applied Mathematical Modelling*, 36(5) (2012) 1931-1938.
- [19] M. Esmaeilbeigi, M. Hosseini, A new approach based on the genetic algorithm for finding a good shape parameter in solving partial differential equations by Kansa's method, *Applied Mathematics and Computation*, 249 (2014) 419-428.
- [20] S. Rippa, An algorithm for selecting a good value for the parameter  $c$  in radial basis function interpolation, *Advances in Computational Mathematics*, 11(2-3) (1999) 193-210.
- [21] M. Uddin, On the selection of a good value of shape parameter in solving time-dependent partial differential equations using RBF approximation method, *Applied Mathematical Modelling*, 38(1) (2014) 135-144.
- [22] J. Biazar, M. Hosami, Selection of an Interval for Variable Shape Parameter in Approximation by Radial Basis Functions, *Advances in Numerical Analysis*, (2016).
- [23] W. Chen, Y. Hong, J. Lin, The sample solution approach for determination of the optimal shape parameter in the Multiquadric function of the Kansa method, *Computers*
- [3] Y.-C. Hon, K.F. Cheung, X.-Z. Mao, E.J. Kansa, Multiquadric solution for shallow water equations, *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(5) (1999) 524-533.
- [4] S. Wong, Y. Hon, T. Li, A meshless multilayer model for a coastal system by radial basis functions, *Computers & Mathematics with Applications*, 43(3-5) (2002) 585-605.
- [5] R. Hardy, Hardy's multiquadric-biharmonic method for gravity field predictions II, *Computers & Mathematics with Applications*, 41(7-8) (2001) 1043-1048.
- [6] D. Young, S. Jane, C. Lin, C. Chiu, K. Chen, Solutions of 2D and 3D Stokes laws using multiquadrics method, *Engineering analysis with boundary elements*, 28(10) (2004) 1233-1243.
- [7] F. Gao, C. Chi, Numerical solution of nonlinear Burgers' equation using high accuracy multi-quadric quasi-interpolation, *Applied Mathematics and Computation*, 229 (2014) 414-421.
- [8] W. Bao, Y. Song, Multiquadric quasi-interpolation methods for solving partial differential algebraic equations, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30(1) (2014) 95-119.
- [9] Z. Wu, S. Zhang, Conservative multiquadric quasi-interpolation method for Hamiltonian wave equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(7-8) (2013) 1052-1058.
- [10] S. Patel, A. Rastogi, Meshfree multiquadric solution for real field large heterogeneous aquifer system, *Water Resources Management*, 31(9) (2017) 2869-2884.
- [11] N. Li, H. Su, D. Gui, X. Feng, Multiquadric RBF-FD method for the convection-dominated diffusion problems base on Shishkin nodes, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 118 (2018) 734-745.
- [12] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Computers & mathematics with applications*, 19(8-9) (1990) 147-161.
- [13] E. Kansa, R. Carlson, Improved accuracy of multiquadric interpolation using variable shape parameters, *Computers & Mathematics with Applications*, 24(12) (1992) 99-120.

- scattered nodes, Computers & Mathematics with Applications, 24(5-6) (1992) 169-190.
- [27] E. Jabbari, R. Ghiassi, Three-dimensional steady state seepage, a finite volume approach, WIT Transactions on Ecology and the Environment, 52 (2002).
- [28] P.-O. Persson, G. Strang, A simple mesh generator in MATLAB, SIAM review, 46(2) (2004) 329-345.
- [29] D.P. Hardin, T. Michaels, E.B. Saff, A Comparison of Popular Point Configurations on  $\mathbb{S}^2$ , arXiv preprint arXiv:1607.04590, (2016).
- [30] M. Caliari, S. De Marchi, M. Vianello, Padua2D: Lagrange interpolation at Padua points on bivariate domains, ACM Trans. Math. Software, (2008) 35-33.
- & Mathematics with Applications, 75(8) (2018) 2942-2954.
- [24] H.R. Azarboni, M. Keyanpour, M. Yaghouti, Leave-Two-Out Cross Validation to optimal shape parameter in radial basis functions, Engineering Analysis with Boundary Elements, 100 (2019) 204-210.
- [25] A. Fallah, E. Jabbari, R. Babaei, Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization, Computers & Mathematics with Applications, 77(3) (2019) 815-829.
- [26] E. Kansa, A strictly conservative spatial approximation scheme for the governing engineering and physics equations over irregular regions and inhomogeneously

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Koushki, R. Babaei, E. Jabbari, Application of MQ-RBF method for solving seepage problems with a new algorithm for optimization of the shape parameter, Amirkabir J. Civil Eng., 52(4) (2020) 1009-1024.

DOI: [10.22060/ceej.2019.15155.5840](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.15155.5840)



