Amirkabir Journal of Civil Engineering

Amirkabir J. Civil Eng., 52(4) (2020) 255-258
DOI: 10.22060/ceej.2019.15155.5840

Application of MQ-RBF method for solving seepage problems with a new algorithm for optimization of the shape parameter

M. Koushki, R. Babaee, E. Jabbari*

Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran

ABSTRACT: The accuracy of the meshless method, Multiquadric, depends completely on the choice of its optimal shape parameter. The purpose of this research is proposing a new algorithm for determining the optimal shape parameter. It resolves some of the previous difficulties, such as depending on the number of computational nodes or an exact solution of the problem, high cost and low accuracy of calculations, being experimental, convergence of classical optimization methods to local optimal points and so on. For this purpose, in addition to introducing a new objective function, Genetic Algorithm(GA) was used and for speeding up the process of its solution, lower bound and upper bound of the shape parameter are suggested as minimum (when the coefficient matrix is not singular) and maximum radius of computational nodes, respectively. The algorithm consists of four steps: 1) producing initial shape parameters by GA in the proposed range, 2) introducing the MQ function with a few numbers of computational points, 3) introducing the MQ function with a large number of computational points, and 4) minimizing the difference between solutions of two functions obtained from the two preceding steps. In the meta-heuristic algorithm, uniform and non-uniform regular distributions of computational nodes have been successfully applied and it was shown that with this approach, an optimal constant shape parameter independent of the number of computational points could be obtained for arbitrary geometries. For verification, examples of homogeneous, inhomogeneous and anisotropic types of the seepage phenomena were solved so that domain decomposition technique was used for inhomogeneous problems and complex geometries. A comparison of results with other exact and numerical solutions showed the high ability and accuracy of the proposed algorithm.

Review History:

Received: 10/19/2018
Revised: 11/26/2018
Accepted: 1/8/2019
Available Online: 1/8/2019

Keywords:

Shape parameter
Multiquadric method
Radial Basis Function
Genetic Algorithm
Seepage

1. INTRODUCTION

Many researchers have successfully applied the Multiqudric meshless method which is probably the most attractive member of the radial base functions family for solving partial differential equations [1-5]. The accuracy of this method depends strongly on its shape parameter. So far, researchers have been working on the method to be developed and optimized [6-11]. Previous approaches suffer from deficiencies such as 1) being experimental, 2) dependence of the shape parameter on the number of computational nodes, 3) unknown lower and upper limits of the shape parameter, 4) convergence of classical optimization methods to local optimal points and so on. The purpose of the present study is to propose a new adaptive algorithm that solves some of the previous problems for determining the optimal shape parameter. In this approach, the genetic algorithm is used with a new objective function and to accelerate the solution process, lower and upper limits for the optimal shape parameter are proposed. The algorithm is also tested for solving homogeneous, inhomogeneous, and anisotropic seepage problems.

*Corresponding author's email: e.jabbari@qom.ac.ir

2. METHODOLOGY

The governing PDE for the 2D inhomogeneous and the anisotropic problem of seepage in a steady state is the Laplace equation as follows:

$$K_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+K_{yy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

Where h is the total head and k_{xx} k_{yy} are the permeability coefficients in the principal directions. MQ approximates solution of 2D differential equations with the following estimation function and obtains its values at any point in the computational domain:

$$f(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\sqrt{1+((x-x_j)^2+(y-y_j)^2))/c^2} \qquad (2)$$

in which (x_j,y_j) are components of the computational points and λ_j are unknown coefficients which will be obtained using N points in the computational domain. Also, c is the shape parameter. In this study, to select the optimal value of c, a new algorithm that eliminates some of the weaknesses

Table 1. Results of Example 1 with the triangular distribution of nodes

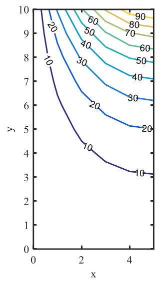
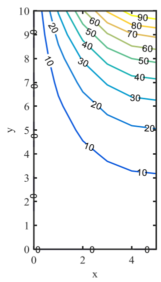
N	c	Head (Exact)	Head (MQ)
55	0.25		
80	0.25		
117	0.25		
148	0.25		
179	0.25		

Table 2. Total heads in an inhomogeneous earth dam

x	y	H (FV)	H (MQ)
0.250	0.500	3.000	3.000
1.007	0.500	2.900	2.910
0.437	0.500	2.980	2.980
1.160	0.500	2.700	2.700
0.606	0.500	2.960	2.970
1.315	0.500	2.500	2.500
0.763	0.500	2.940	2.950
1.477	0.500	2.300	2.300
0.917	0.500	2.920	2.930
1.653	0.500	2.100	2.100

of the other researches is proposed in the following steps:

1- Generating the initial shape parameter by GA in the $[r_{min}, r_{max}]$ where:

$$r_{\min} = \min\left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right), \quad i, j = 1, 2, ..., N, \quad i \neq j \tag{3}$$

$$r_{\max} = \max\left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right), \quad i, j = 1, 2, ..., N, \quad i \neq j \tag{4}$$

2- Creating an MQ function with a minimum number of computational points ($f_1(x, y)$).

3- Creating an MQ function with the maximum number of computational points ($f_2(x, y)$).

4- Defining the objective function as:

$$Fitness = \sum_{i=1}^{m} \frac{|f_1(x_i, y_i) - f_2(x_i, y_i)|}{|f_1(x_i, y_i)|} \tag{5}$$

Therefore GA introduces the optimal shape parameter which minimizes the objective function.

3. RESULTS AND DISCUSSION

Several examples are presented using the proposed algorithm. In the first example, the seepage is investigated in a

Table 3. Velocity values in an anisotropic earth dam

x	y	V (FV)	V (MQ)
0.2501	0.5002	0.000789525	0.00077029
0.5182	0.5002	0.001259283	0.001228734
0.6466	0.5002	0.000883665	0.000857811
0.7645	0.5002	0.000850473	0.00083186
0.8819	0.5002	0.000848906	0.000825534
1.0001	0.5002	0.000849079	0.000821334
1.1179	0.5002	0.000848906	0.000818733
1.2358	0.5002	0.000850473	0.000828244
1.3536	0.5002	0.000883665	0.000856491
1.4814	0.5002	0.001259283	0.001228734

homogeneous and isotropic domain and other examples will be expressed in inhomogeneous (with domain decomposition technique) and anisotropic earth dams.

Results show that the optimal shape parameter does not depend on the number of computational points. This result has been achieved in all other examples.

4. CONCLUSION

For the first time, using the presented approach, the optimal and constant shape parameter in the MQ method has been obtained for any number of points. In other words, the shape parameter does not depend on the number of computational points and unlike other methods, it is not necessary neither to be optimized for any number of computational nodes nor a lot of computational time. Also, for speeding up the process of solution, lower and upper limits of the shape parameter have been successfully suggested as a minimum (when the coefficient matrix is not singular) and maximum of radius of computational nodes. For the numerical approach to be evaluated, homogeneous, inhomogeneous and anisotropic problems of seepage phenomena with application in the body and foundation of earth dam were investigated. The results showed high capability and accuracy of the proposed MQ algorithm compared to the analytical solution and the finite volume method results.

REFERENCE

[1] R.L. Hardy, Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, Journal of geophysical research, 76(8) (1971) 1905-1915.

[2] Y.C. Hon, K.F. Cheung, X.Z. Mao, E.J. Kansa, Multiquadric solution for shallow water equations, Journal of Hydraulic Engineering, 125(5) (1999) 524-533.

[3] D. Young, S. Jane, C. Lin, C. Chiu, K. Chen, Solutions of 2D and 3D Stokes laws using Multiquadric method, Engineering analysis with boundary elements, 28(10) (2004) 1233-1243.

[4] W. Bao, Y. Song, Multiquadric quasi-interpolation methods for solving partial differential-algebraic equations, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 30(1)

(2014) 95-119.
[5] Z. Wu, S. Zhang, Conservative multiquadric quasi-interpolation method for Hamiltonian wave equations, Engineering Analysis with Boundary Elements, 37(7-8) (2013) 1052-1058.
[6] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, Computers & mathematics with applications, 19(8-9) (1990) 147-161.
[7] Huang, C. S., Lee, C. F., & Cheng, A. D.,2007." Error estimate, optimal shape factor, and high precision computation of multiquadric collocation method". *Engineering Analysis with Boundary Elements*, *31*(7), 614-623.
[8] C.S. Huang, C.F. Lee, A.D. Cheng, Error estimate, optimal shape factor, and high precision computation of Multiquadric collocation method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 31(7) (2007) 614-623.
[9] M. Esmaeilbeigi, M. Hosseini, A new approach based on the genetic algorithm for finding a good shape parameter in solving partial differential equations by Kansa's method, Applied Mathematics, and Computation, 249 (2014) 419-428.
[10] J. Biazar, M. Hosami, Selection of an interval for variable shape parameter in approximation by radial basis functions, Advances in Numerical Analysis, 2016 (2016).
[11] A. Fallah, E. Jabbari, R.Babaee, Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization, Computers & Mathematics with Applications, (2018).

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Koushki, R. Babaee, E. Jabbari, Application of MQ-RBF method for solving seepage problems with a new algorithm for optimization of the shape paramete, Amirkabir J. Civil Eng., 52(4) (2020) 255-258.

DOI: 10.22060/ceej.2019.15155.5840

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، دوره ۵۲ شماره ۴، سال ۱۳۹۹، صفحات ۱۰۰۹ تا ۱۰۲۴
DOI: 10.22060/ceej.2019.15155.5840

کاربرد تابع پایه-شعاعی چندربعی در حل مسائل تراوش با الگوریتمی جدید برای بهینه‌سازی پارامتر شکل

معصومه کوشکی، رضا بابایی، احسان جباری*

گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران

خلاصه: دقت روش بدون شبکه چندربعی کاملا به انتخاب پارامتر شکل آن وابسته است. هدف از پژوهش حاضر، پیشنهاد یک الگوریتم نوین برای تعیین پارامتر شکل بهینه است، به‌طوری‌که برخی از مشکلات پیشین شامل؛ وابسته بودن به تعداد نقاط محاسباتی و یک حل دقیق از مسئله، هزینه بالا و دقت پایین محاسبات، تجربی بودن، همگرا شدن روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک به نقاط بهینه محلی و دیگر موارد را برطرف نماید. به‌این منظور ضمن معرفی یک تابع هدف جدید، از الگوریتم ژنتیک استفاده‌شد و برای سرعت بخشیدن به روند حل آن، حد پایین پارامتر شکل؛ کمینه شعاع نقاط محاسباتی با شرط عدم تکینگی ماتریس ضرایب و حد بالای آن؛ بیشینه شعاع پیشنهاد گردید. الگوریتم مذکور از چهار مرحله تشکیل می‌شود: ۱) تولید پارامتر شکل توسط الگوریتم ژنتیک در بازه پیشنهادشده، ۲) تشکیل تابع چندربعی با تعداد پایینی از نقاط محاسباتی، ۳) تشکیل تابع چندربعی با تعداد بالایی از نقاط محاسباتی و ۴) کمینه‌سازی اختلاف جواب توابع به‌دست‌آمده از دو مرحله قبل. در الگوریتم فرا ابتکاری حاضر، توزیع‌های یکنواخت و غیریکنواخت منظم از نقاط محاسباتی با موفقیت به‌کار رفت و نشان داده‌شد که با آن می‌توان به پارامتر شکلی بهینه و ثابت و نیز مستقل از تعداد نقاط محاسباتی برای هندسه‌های دلخواه دست‌یافت. برای صحت‌سنجی نیز مسائلی همگن، ناهمگن و ناهمسان از پدیده تراوش حل شد و از فن تجزیه دامنه برای کاهش حجم محاسبات و شبیه‌سازی راحت‌تر میدان‌های ناهمگن و پیچیده استفاده گردید. مقایسه نتایج با سایر حل‌های دقیق و عددی، توانایی و دقت بالای الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۷-۰۷-۲۷
بازنگری: ۱۳۹۷-۰۹-۰۵
پذیرش: ۱۳۹۷-۱۰-۱۸
ارائه آنلاین: ۱۳۹۷-۱۰-۱۸

کلمات کلیدی:
پارامتر شکل
روش چندربعی
توابع پایه شعاعی
الگوریتم ژنتیک، تراوش

۱- مقدمه

روش بدون شبکه چندربعی[1] که عضو خانواده توابع پایه شعاعی[2] است، ابتدا توسط هاردی به‌منظور تولید نقشه‌های توپوگرافی و تقریب زدن داده‌های پراکنده در سطوح جغرافیایی معرفی شد [۱ و ۲]. طبق ادعای هاردی، سایر محققین این روش توانمند را در حل معادلات مشتق جزئی با موفقیت به‌کار بردند. هان و همکارانش معادلات آب‌های کم عمق را حل کردند. ایشان خصوصیات سطح آب شامل مؤلفه‌های سرعت و مقدار عمق آن را در مثال موردی بندر تولو[3] به‌دست آوردند [۳] و در سال ۲۰۰۲ یک مدل چندلایه‌ای برای تحلیل و مدل‌سازی جریان جزر و مد سه‌بعدی ارائه نمودند و با مدل‌سازی رودخانه پرل[4] در جنوب چین به صحت نتایج پی بردند [۴]. هاردی در سال ۲۰۰۱ معادله پواسون را با استفاده از روش چندربعی حل کرد [۵]. حل معادلات دو و سه‌بعدی استوکس، معادله غیرخطی برگر[5]، معادلات مشتق جزئی جبری[6]، معادلات موج هامیلتون[7] و دیگر موارد هم با استفاده از روش مذکور انجام شده‌است

1 Multiquadric (MQ)
2 Radial basis function (RBF)

3 Tolo
4 Pearl
5 Nonlinear Burger’s equation
6 Partial differential algebraic equations
7 Hamiltonian wave equations

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: e.jabbari@qom.ac.ir

[۹-۶]. پاتل و همکارانش در سال ۲۰۱۷ از روش چندربعی برای حل معادله لاپلاس در شبیه‌سازی آبخوان‌های نامنظم آب زیرزمینی استفاده کردند. ایشان با بررسی ناهمگنی و شرایط‌مرزی یا هد متغیر، تحلیل حساسیت را بر روی گام زمانی، تراکم گره و اندازه میدان انجام دادند و نتیجه گرفتند که این روش در دقت و هزینه محاسباتی یک شبیه‌ساز بهینه برای آب‌های زیرزمینی است [۱۰]. روش چندربعی قابلیت ترکیب با سایر روش‌های عددی را نیز داراست به‌عنوان‌مثال لی و همکارانش در سال ۲۰۱۸ ترکیب آن را با روش اختلاف محدود در شبیه‌سازی انتقال و پخش حرارت به‌کار بردند و با استفاده از توزیع نقاط شیشکین[1] به نتایجی دقیق‌تر از روش اختلاف محدود دست یافتند [۱۱].

دقت روش چندربعی به عوامل مختلفی بستگی دارد که مهم‌ترین آن‌ها پارامتر شکل[2] است و تا به امروز، پژوهشگران در تلاش بوده‌اند تا روش‌های مختلفی برای بهینه‌سازی آن پیشنهاد دهند. در این زمینه؛ کانزا با پیشنهاد روابطی، معادلات بیضوی، سهموی و هذلولوی را در بحث دینامیک سیالات محاسباتی حل کرد [۱۲]. ایشان با آزمایش مقادیر مختلف پارامتر شکل دریافتند که مقداری بهینه برای آن وجود دارد ولی از معادله‌ای به معادله دیگر متفاوت است و برای آن الگوریتمی بر اساس خطای میانگین مربعات نسبت به جواب‌های دقیق ارائه نمودند [۱۳]. سارا خانواده توابع پایه شعاعی را بررسی و با مقایسه خصوصیات و ارتباط آن‌ها، تاثیر پارامتر شکل در این روش‌ها را بیان نمود [۱۴]. روابط تجربی هم در سال ۲۰۰۷ در راستای تخمین خطا برحسب پارامتر شکل بهینه، عدد وضعیت[3] ماتریس ضرایب و پراکندگی نقاط میدان ارائه‌شد [۱۵ و ۱۶]. هانگ و همکارانش به‌طور مستقل، با مشاهده این امر که با خطی شدن شکل توابع پایه شعاعی دقت این توابع افزایش می‌یابد، پارامتر شکل را برای معادلات بیضوی بهینه ساختند. ایشان کران بالایی برای بازه اعداد انتخابی پارامتر شکل در نظر گرفتند و این پارامتر را نه در خود کران‌های بازه بلکه در مقادیر داخلی آن یافتند [۱۷]. سانگ و همکارانش با رویکردی متفاوت رابطه پارامتر شکل تابع چندربعی را مثلثاتی کردند و توانستند دقت آن را بهبود ببخشند [۱۸]. اسماعیل بیگی و حسینی از الگوریتم ژنتیک[4] استفاده کردند و بر اساس روش کانزا دستورالعملی برای انتخاب پارامتر شکل بهینه در روش چندربعی تنظیم نمودند [۱۹]. آدین نشان داد که روش ریپا [۲۰] برای تخمین پارامتر شکل بهینه در مسائل وابسته به زمان دارای دقت کافی نمی‌باشد. ایشان روش ریپا را توسعه داد و توانست با یک استراتژی جدید دقت مناسبی برای حل مسائل مذکور به‌دست آورد [۲۱]. بی‌آزار و همکارانش در سال ۲۰۱۶ در مورد کران بالا و پایین روابط تعیین پارامتر شکل متغیر تحقیق کردند و با معرفی یک روش برای تعیین آن حدود توانستند دقت روش چندربعی را افزایش دهند [۲۲]. چن و همکارانش در سال ۲۰۱۸ یک الگوریتم جدید برای یافتن پارامتر شکل ارائه دادند این الگوریتم در ابتدا پارامتر شکل بهینه را برای مسائلی که حل تحلیلی دارند، به‌دست می‌آورد سپس از آن برای مسائل مشابهی که حل تحلیلی ندارند استفاده می‌کند [۲۳]. البرزی در سال ۲۰۱۸ یک الگوریتم با دقت بالاتر از سایر روش‌های تعیین پارامتر شکل بهینه ارائه داد. در این روش مسئله با تعداد N و N-2 نقطه محاسباتی به‌ازای پارامتر شکل‌های مختلفی حل می‌شود و آن پارامتری که کمترین اختلاف را بین دو جواب داشته‌باشد بهینه است [۲۴]. فلاح و همکارانش در سال ۲۰۱۸ یک روش سریع برای یافتن پارامتر شکل بهینه در روش چندربعی با کاربرد در حل مسائل تراوش ارائه دادند. در این الگوریتم از روش نصف کردن بازه پارامتر شکل استفاده می‌شود و مقدار بهینه زمانی به‌دست می‌آید که تغییرات پاسخ مسئله نسبت به تغییرات پارامتر شکل کمینه باشد [۲۵].

با بررسی مطالعات پیشین می‌توان فهمید که روش‌های مختلف در تعیین پارامتر شکل بهینه دارای مشکلاتی مانند ۱) تجربی بودن روابط برای مسائل خاص، ۲) استفاده از روش‌های سعی و خطا به‌همراه الگوریتم‌های تکراری و زمان‌بر، ۳) وابسته بودن پارامتر شکل به تعداد نقاط انتخابی در میدان مسئله، ۳) نیاز به وجود یک حل دقیق از مسائل برای تعیین پارامتر شکل، ۴) مشخص نبودن حدود پایین و بالای پارامتر شکل به هنگام استفاده از الگوریتم ژنتیک، ۵) افتادن روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک در دام نقاط بهینه محلی و بازماندن از یافتن نقاط بهینه کلی و دیگر موارد هستند. هدف از پژوهش حاضر، پیشنهاد یک الگوریتم وفقی نوین برای تعیین پارامتر شکل بهینه در روش چندربعی است به‌طوری‌که برخی از مشکلات مذکور را برطرف نماید. در این پیشنهاد از الگوریتم ژنتیک با یک تابع هدف جدید استفاده می‌شود و به‌منظور سرعت بخشیدن به روند حل مسئله، بازه‌ای برای پارامتر شکل بهینه معرفی می‌گردد. برای صحت‌سنجی آن، مسائلی همگن، ناهمگن و

1 Shishkin nodes
2 Shape parameter
3 Condition number
4 Genetic Algorithm

ناهمسان از پدیده تراوش[۱] موردبحث قرار می‌گیرد. همچنین برای کاربرد راحت‌تر روش چندربعی در حل مسائل ناهمگن با هندسه‌های پیچیده و کاهش حجم محاسبات، فن تجزیه میدان[۲] [۲۶] مدنظر خواهد بود به‌گونه‌ای که مرز ناهمگنی منطبق بر مرز زیرمیدان‌ها باشد.

۲- معادله و شرایط‌مرزی حاکم بر پدیده تراوش

معادله دارسی[۳] برای محاسبه سرعت متوسط جریان آب در خاک اشباع به‌صورت زیر است [۲۷]:

$$(V=-KI) \tag{۱}$$

که در این رابطه، V بردار سرعت متوسط جریان است و مؤلفه‌های آن در میدان‌های دوبعدی و در جهت‌های اصلی مطابق رابطه ۲ تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} \tag{۲}$$

در رابط ۱، K ماتریس ضریب هدایت هیدرولیکی[۴] با بعد طول بر زمان می‌باشد و در حالت دوبعدی به‌صورت زیر است:

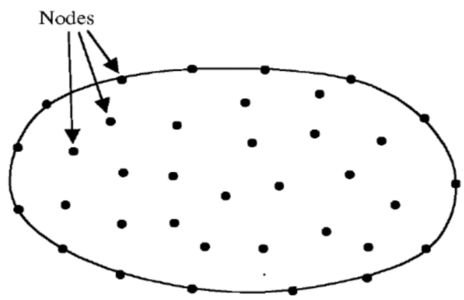
$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} k_{xx} \; k_{xy} \\ k_{yx} \; k_{yy} \end{bmatrix} \tag{۳}$$

همچنین I بردار شیب هیدرولیکی[۵] است که از رابطه ۴ به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{۴}$$

در این رابطه، h بار آبی کل (مجموع بار ارتفاع و بار فشار) است. معادله حاکم بر حرکت آب در خاک (تراوش) در حالت دائمی، معادله لاپلاس[۶] است که از ترکیب معادله پیوستگی (رابطه ۵) و معادله دارسی برای میدان‌های دوبعدی ناهمگن[۷] و ناهمسان[۸] به شکل رابطه ۶ استخراج می‌شود، به‌شرطی که جهت‌های اصلی ناهمسانی با جهت‌های محورهای اصلی مختصات یکی باشند:

1 Seepage
2 Domain decomposition
3 Darcy’s equation
4 Permeability coefficient
5 Hydraulic gradient vector
6 Laplace equation
7 Inhomogeneous
8 Anisotropic



شکل ۱. نمایش یک میدان دلخواه با نقاط محاسباتی در روش چندربعی

Fig. 1. Illustration of an arbitrary domain with computational nodes of MQ method.

$$\frac{\partial V_x}{\partial x}+\frac{\partial V_y}{\partial y}=0 \tag{۵}$$

$$K_{xx}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+K_{yy}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0 \tag{۶}$$

شرایط‌مرزی اجباری[۹] در این‌گونه مسائل می‌تواند به‌صورت:

$$h(x_i, y_i)=c_1 \tag{۷}$$

تعریف شود که در آن c_1 مقداری ثابت و مشخص برای بار آبی کل در نقطه دلخواه (x_i, y_i) از مرز اجباری خواهدبود. شرایط‌مرزی طبیعی[۱۰] هم به‌صورت رابطه ۸ در نظر گرفته می‌شوند.

$$\mathbf{v.n}=c_2 \tag{۸}$$

که در آن **n** بردار نرمال عمود بر مرز طبیعی با دو مؤلفه در جهت‌های اصلی (رابطه ۹) و c_2 نیز یک مقدار ثابت و معلوم است.

$$\mathbf{n}=\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} \tag{۹}$$

همچنین با توجه به روابط بیان‌شده می‌توان نوشت:

$$\mathbf{v}=\begin{bmatrix} -K_{xx}\dfrac{\partial h}{\partial x} \\ -K_{yy}\dfrac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{۱۰}$$

۳- روش چندربعی

در این روش تعداد N نقطه محاسباتی[۱۱] در میدان مسئله در نظر

9 Dirichlet boundary conditions
10 Neumann boundary conditions
11 Computational point

گرفته می‌شود که هم در درون میدان و هم روی مرزها قرار گرفته‌اند (شکل ۱). این نقاط برخلاف روش‌های با شبکه نیاز به ارتباط اولیه با یکدیگر ندارند لذا کاربرد روش چندربعی در هندسه‌های پیچیده و مسائل سه‌بعدی بسیار راحت است و دیگر هزینه‌های پیش‌پردازش جهت تعریف شبکه را ندارد.

توزیع نقاط محاسباتی، بسته به نوع هندسه و پدیده موردبررسی، می‌تواند به‌صورت یکنواخت یا غیریکنواخت باشد. در این پژوهش پنج توزیع مختلف از نقاط محاسباتی مدنظر است. در سه توزیع یکنواخت اول نقاط به‌ترتیب منطبق بر رئوس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، مستطیل و لوزی هستند و دو مورد دیگر هم توزیع‌های غیریکنواخت منظم با نام‌های فیبوناچی[1] و پادوا[2] هستند [۳۰-۲۸].

معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر مسائل مختلف دوبعدی به روش چندربعی با تابع زیر تقریب زده می‌شود و جواب معادله با استفاده از آن در هر نقطه از میدان محاسباتی به‌دست می‌آید:

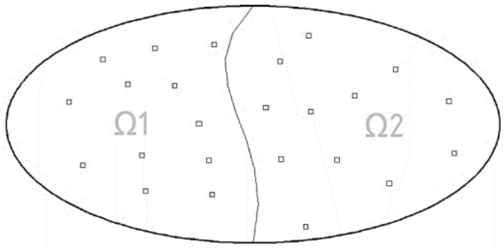
$$f(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\sqrt{1+((x-x_j)^2+(y-y_j)^2))/c^2} \qquad (۱۱)$$

در رابطه ۱۱، (x_j,y_j) مؤلفه‌های نقاط محاسباتی هستند. λ_jها نیز مجهولاتی هستند که برای به‌دست آوردن آن‌ها باید تعداد N نقطه برهم‌نهی در میدان محاسباتی در نظر گرفته‌شود. دو روش برهم‌نهی[3] و حداقل مربعات[4] برای انتخاب این نقاط در میدان محاسباتی وجود دارد. در روش برهم‌نهی، نقاط انتخابی منطبق بر نقاط محاسباتی هستند ولی در روش حداقل مربعات این‌گونه نخواهدبود. در این پژوهش از روش اول استفاده می‌شود. لازم‌به‌ذکر است که این نقاط به دو بخش نقاط روی مرز و داخل میدان محاسباتی تقسیم می‌شوند، نقاط روی مرز برای اعمال شرایط‌مرزی مسئله و نقاط داخل میدان هم برای ارضاء معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر میدان محاسباتی در نظر گرفته می‌شوند.

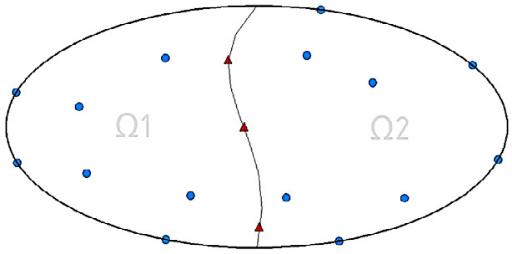
برای تعیین سرعت و ارضاء معادله لاپلاس، مشتقات جزئی تابع تخمین در روش حاضر به‌ترتیب زیر قابل‌محاسبه خواهدبود:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\frac{c^2(x-x_j)}{\sqrt{1+((x-x_j)^2+(y-y_j)^2))/c^2}} \qquad (۱۲)$$

1 Fibonacci
2 Padua
3 Collocation
4 Least squares



شکل ۲. توزیع نقاط محاسباتی در دو زیر میدان Ω_1، Ω_2 و مرز مصنوعی
Fig. 2. Distribution of computational nodes in Ω_1 and Ω_2 subdomains and artificial boundary.



شکل ۳. توزیع تعداد n_{c1}، n_{c2} و n_a نقطه برهم‌نهی به‌ترتیب در زیر میدان‌های Ω_1، Ω_2 و مرز مصنوعی ($n_{c1}+n_{c2}=n_G-2n_a$)
Fig. 3. Distribution of collocation nodes in Ω_1 and Ω_2 subdomains and artificial boundary (n_{c1}, n_{c2} and n_a).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_i\frac{c^2(c^2y^2-2c^2yy_i+c^2y_i^2+1)}{\left(1+((x-x_j)^2+(y-y_j)^2))/c^2\right)^{3/2}} \qquad (۱۳)$$

برای ایجاد تعداد قابل‌توجهی درایه صفر در ماتریس ضرایب و نیز اعمال راحت‌تر روش چندربعی در میدان‌های غیر کارتزین و هندسه‌های پیچیده، می‌توان از فن تجزیه میدان به کمک مرزهای مصنوعی استفاده کرد. با تجزیه شدن میدان به زیر میدان‌های کوچک‌تر، باید روش چندربعی را برای هر زیر میدان به‌طور موازی اعمال و ماتریس ضرایب کلی را به‌وسیله ماتریس ضرایب هر زیر میدان تشکیل داد. به‌عنوان‌مثال میدان شکل ۲ را در نظر بگیرید که با یک مرز مصنوعی به دو زیر میدان Ω_1 و Ω_2 تقسیم و نقاط محاسباتی در آن توزیع شده‌اند. در مسائل تراوش ارتباط بین دو زیر میدان از طریق نقاط واقع بر مرز مصنوعی و اعمال معادلات بقاء جرم و سرعت (روابط ۱۴ و ۱۵) برقرار می‌گردد.

$$f_{\Omega_1}(x_i,y_i)=f_{\Omega_2}(x_i,y_i) \qquad (۱۴)$$

$$\mathbf{V}_{\Omega_1}(x_i,y_i)=\mathbf{V}_{\Omega_2}(x_i,y_i) \qquad (۱۵)$$

جدول ۱. مشخصه‌های الگوریتم ژنتیک در پژوهش حاضر
Table 1. GA parameters in present research.

Population size	Elit count	Crossover function	Mutation	Crossover	Migration	Generation
۲۰	۱	۰.۸	Uniform	Two point	Forward	۱۰۰

در این شکل، تعداد کل نقاط محاسباتی (n_G) برابر با $n_{G1}+n_{G2}$ است و n_{G1} و n_{G2} به‌ترتیب تعداد نقاط محاسباتی در زیر دامنه‌های Ω_1، Ω_2 هستند. همان‌طور که بیان شد، برای اعمال معادلات حاکم و شرایط‌مرزی یک سری دیگر از نقاط در داخل میدان و روی مرزها اعم از مرز مصنوعی و واقعی مانند شکل ۳ توزیع می‌گردد.

اگر پس از پردازش مدل، ماتریس‌های ضرایب هر زیر میدان با توجه به تعداد نقاط پخش‌شده در شکل ۳ به‌صورت زیر به‌دست آیند:

$$A_{\Omega_1}=\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n_{G1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_{c1},1} & \cdots & a_{n_{c1},n_{G1}} \end{bmatrix} \quad (۱۶)$$

$$A_{\Omega_2}=\begin{bmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,n_{G2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n_{c2},1} & \cdots & b_{n_{c2},n_{G2}} \end{bmatrix} \quad (۱۷)$$

آن‌گاه با ماتریس به‌دست‌آمده از معادلات مرز مصنوعی ترکیب می‌شوند و ماتریس ضرایب کلی مطابق رابطه ۱۸ تشکیل می‌شود که دارای تعداد قابل‌توجهی درایه صفر است. هم‌چنین استفاده از فن تجزیه میدان در روش چندربعی برای حل مسائل ناهمگن تراوش و منطبق کردن مرز مصنوعی بر مرزهای ناهمگنی بسیار راهگشا و مؤثر است.

$$A=\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n_{G1}} & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 & \\ a_{n_{c1},1} & \cdots & a_{n_{c1},n_{G1}} & & & \\ & & & b_{1,1} & \cdots & b_{1,n_{G2}} \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & b_{n_{c2},1} & \cdots & b_{n_{c2},n_{G2}} \\ ab_{1,1} & \cdots & ab_{1,n_{G1}} & ba_{1,1} & \cdots & ba_{1,n_{G2}} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ ab_{2n_a,1} & \cdots & ab_{2n_a,n_{G1}} & ba_{2n_a,1} & \cdots & ba_{2n_a,n_{G2}} \end{bmatrix} \quad (۱۸)$$

لازم‌به‌ذکر است که فن تجزیه دامنه مشکل متراکم بودن ماتریس ضرایب در روش چندربعی را به‌طور کامل حل نمی‌کند و استفاده از ایده ناحیه حمایتی یا دامنه تاثیر می‌تواند راه‌حل مفیدی برای آن باشد.

در روابط ۱۱ تا ۱۳، c پارامتر شکل است. هرچند پژوهش‌های متعدد، دقت بالای روش چندربعی را تائید می‌کنند ولی این دقت کاملا به پارامتر شکل وابسته است. تاکنون نیز تلاش‌های متعددی برای انتخاب بهینه پارامتر شکل صورت گرفته ولی یک راه‌حل فراگیر و جامع برای آن پیشنهاد نشده و هم‌چنان در دست تحقیق است. در بخش بعد، یک الگوریتم جدید با هدف پوشش بخشی از نقاط ضعف سایر تلاش‌ها، پیشنهاد خواهدشد.

۴- روش فراابتکاری انتخاب پارامتر شکل بهینه به کمک الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک در حل مسائلی که ازنظر ریاضی دارای ارتباط فرمولی نیستند، بسیار مؤثر است هم‌چنین برخلاف روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک در دام نقاط بهینه محلی نمی‌افتد و از یافتن نقاط بهینه کلی بازنمی‌ماند. به‌همین دلایل در پژوهش حاضر برای انتخاب پارامتر شکل بهینه از آن استفاده می‌شود. در این الگوریتم متغیر مسئله به‌صورت پیوسته مدل شده‌است و مشخصه‌های آن به شرح جدول زیر می‌باشند.

مسئله مهم و نوین در این رویکرد، تعیین حدود متغیر بهینه‌سازی و انتخاب تابع هدف مناسب می‌باشد. در این پژوهش، برای اولین بار، حدود پارامتر شکل بهینه، رابطه ۲۱، مرتبط با شعاع اقلیدسی پیشنهاد گردید چراکه این پارامتر با توجه به رابطه ۱۱ بر شعاع بین نقاط محاسباتی تاثیرگذار است. برای حد پایین پارامتر شکل از کمینه شعاع اقلیدسی با شرط عدم تکینگی ماتریس ضرایب (r_{min}) و برای حد بالای آن از بیشینه شعاع اقلیدسی (r_{max}) طبق روابط ۱۹ و ۲۰

استفاده گردید.

$$r_{\min} = \min\left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right), \quad i,j = 1,2,\ldots,N, \quad i \neq j \qquad (۱۹)$$

$$r_{\max} = \max\left(\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right), \quad i,j = 1,2,\ldots,N, \quad i \neq j \qquad (۲۰)$$

$$C_{optimom} \in \left[r_{\min}, r_{\max}\right] \qquad (۲۱)$$

تخمین بازه محدودی برای پارامتر شکل بهینه متناسب با هندسه مسئله، امری مهم در حداقل نمودن سعی و خطا و سرعت بخشیدن به روند حل مسائل در روش چندربعی است. مناسب بودن این بازه با حل مثال‌های متنوعی ازجمله مثال‌های بخش ۵ به اثبات رسید.

در این پژوهش، مراحل زیر برای انتخاب تابع هدف در نظر گرفته می‌شود:

الف) تولید پارامتر شکل توسط الگوریتم ژنتیک در بازه تعریف‌شده ($[r_{min}, r_{max}]$)

ب) تشکیل تابع تقریب چندربعی با تعداد نقاط محاسباتی حداقل ($f_1(x,y)$)

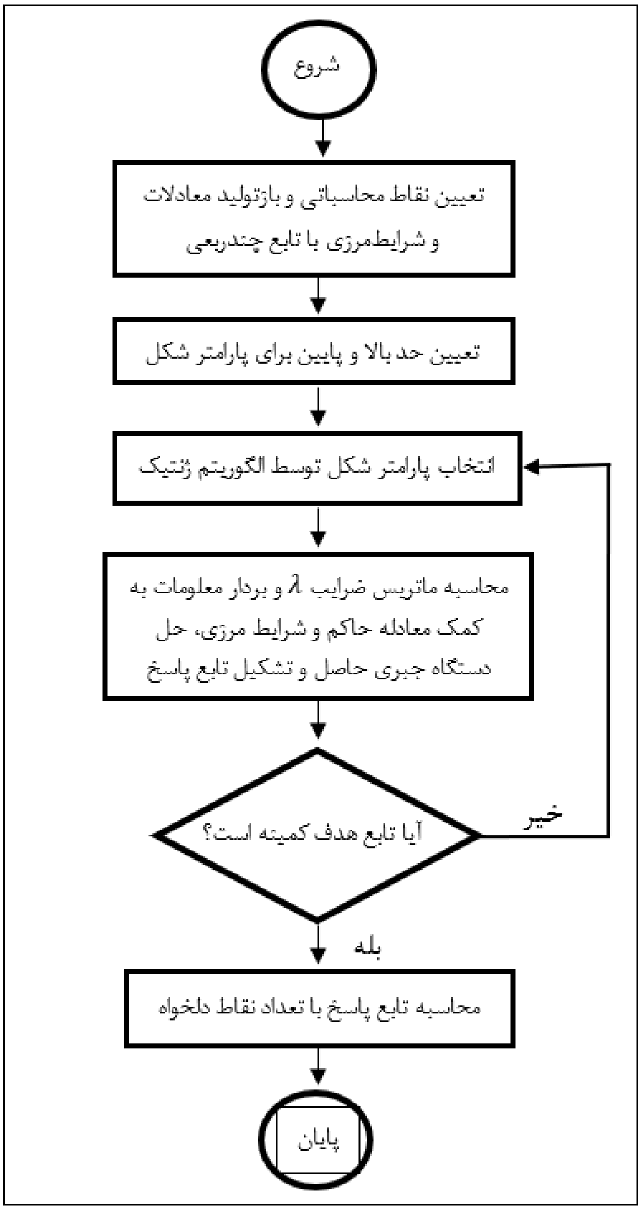
ج) تشکیل تابع تقریب چندربعی با تعداد نقاط محاسباتی حداکثر ($f_2(x,y)$)

د) محاسبه اختلاف جواب دو تابع تقریب به‌دست‌آمده در مراحل (ب) و (ج) و تعریف تابع هدف به‌صورت:

$$Fitness = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left|f_1(x_i, y_i) - f_2(x_i, y_i)\right|}{\left|f_1(x_i, y_i)\right|} \qquad (۲۲)$$

الگوریتم ژنتیک، پارامتر شکل بهینه را از بازه انتخابی به‌گونه‌ای معرفی می‌کند که به‌ازای آن، تابع هدف کمینه شود. لازم‌به‌ذکر است که نقاط محاسباتی حداقل و حداکثر یعنی یک حد پایین و یک حد بالا از تعداد نقاط محاسباتی هستند که مرزها و داخل میدان مسئله را نمایش می‌دهند. این حدود می‌توانند با قضاوت مهندسی تعیین بشوند و حتما نمی‌بایست یک مقدار خاص باشند.

نکته جالب‌توجه این است که برای اولین بار با الگوریتم پیشنهادی این پژوهش، پارامتر شکل معرفی‌شده برای هر تعداد نقطه‌ای مابین نقاط محاسباتی حداقل و حداکثر ثابت و بهینه است. به‌عبارت‌دیگر، با پیشنهاد تابع هدف جدید مطابق رابطه ۲۲، پارامتر شکل به تغییرات تعداد نقاط محاسباتی وابسته نخواهدبود. پرواضح است که هرچه تعداد نقاط محاسباتی بیشتر باشد، دقت پاسخ‌ها بیشتر خواهدبود؛



شکل ۴. فلوچارت روش حل مسائل با روش پیشنهادی این پژوهش

Fig. 4. Flowchart of the proposed solution approach.

هرچند که روش چندربعی با حد پایینی از نقاط هم دقت قابل‌قبولی ارائه می‌دهد. هم‌چنین در این الگوریتم، برای بهینه‌سازی پارامتر شکل نیاز به هیچ پاسخ تحلیلی و غیر تحلیلی از مسئله نیست.

تمرکز الگوریتم پیشنهادی این پژوهش بر روی تعیین پارامتر شکل بهینه در روش چندربعی است و به‌طور مستقیم در گسسته‌سازی معادلات مرزی دخالت ندارد. با توجه به اینکه روش چندربعی از فرم قوی معادلات مرزی استفاده می‌کند و قبلا هم با موفقیت در

شبیه‌سازی انواع شرایط‌مرزی به‌کار رفته‌است، مطمئنا تحت الگوریتم پیشنهادی این پژوهش نیز با مشکل مواجه نمی‌شود. همچنین، در این پژوهش انواع شرایط‌مرزی شامل شرایط‌مرزی اجباری ثابت و متغیر و شرایط‌مرزی طبیعی در مثال‌های پدیده مورد هدف یعنی تراوش (بخش ۵) گنجانده شده و پس از حل آن‌ها دقت مطلوب حاصل گردیده‌است. فلوچارت روش پیشنهادی این پژوهش برای حل مسائل به روش چندربعی مطابق شکل ۴ در نظر گرفته شده‌است.

۵- مثال‌های عددی

در این بخش، به‌منظور صحت‌سنجی، چهار مثال از پدیده تراوش بررسی می‌شود. مثال شماره یک دارای پاسخ تحلیلی با شرایط‌مرزی متنوع برای سنجش پاسخ روش چندربعی تحت الگوریتم پیشنهادی است. سایر مثال‌ها باهدف نشان دادن توانایی روش حاضر در حل مسائل متنوع‌تر از تراوش در خاک ناهمگن، خاک ناهمسان و هندسه‌های پیچیده‌تر ارائه می‌شوند.

۵-۱- مثال یک

هندسه این مثال همگن و همسان مطابق شکل ۵-الف است که در آن شرایط‌مرزی S_1 تا S_4 مطابق روابط ۲۳ تا ۲۶ تعریف و ضریب هدایت هیدرولیکی آن برابر یک در نظر گرفته شده‌است.

$$H(x,y)\big|_{x=0}=0 \tag{۲۳}$$

$$H(x,y)\big|_{y=10}=100\sin\left(\frac{\pi x}{10}\right) \tag{۲۴}$$

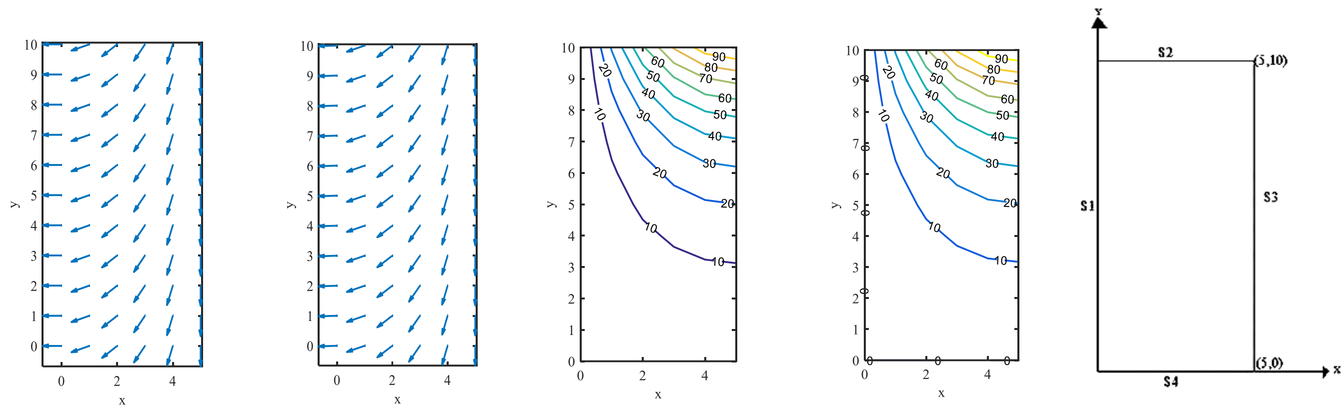
$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x}\bigg|_{x=5}=0 \tag{۲۵}$$

$$H(x,y)\big|_{y=0}=0 \tag{۲۶}$$

همچنین حل تحلیلی این مسئله به‌صورت زیر می‌باشد:

$$H(x,y)=\frac{100}{\sinh(\pi)}\sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)\sinh\left(\frac{\pi y}{10}\right) \tag{۲۷}$$

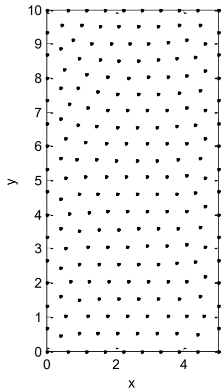
برای حل این مسئله با روش چندربعی تحت الگوریتم این پژوهش، پنج توزیع مختلف از نقاط محاسباتی انتخاب شد تا نشان داده شود که این رویکرد به نوع توزیع نقاط وابسته نیست. در سه توزیع یکنواخت اول، نقاط به‌ترتیب منطبق بر رئوس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع (شکل ۶)، مستطیل (شکل ۷) و لوزی (شکل ۸) هستند و دو مورد دیگر هم توزیع‌های غیریکنواخت منظم با نام‌های فیبوناچی (شکل ۹) و پادوا (شکل ۱۰) می‌باشند. نتایج حاصل از هر پنج توزیع در جدول‌های ۲ تا ۶ ارائه گردیده‌است. نتایج بار آبی کل و سرعت با توزیع ۸۰ نقطه به‌صورت مثلثی در مقایسه با حل تحلیلی در شکل‌های ۵-ب تا ۵-ه و جداول ۷ تا ۱۰ آورده شده‌است. همان‌طور که مشخص است، نتایج دقت بالای روش چندربعی تحت الگوریتم این پژوهش را نشان می‌دهند.



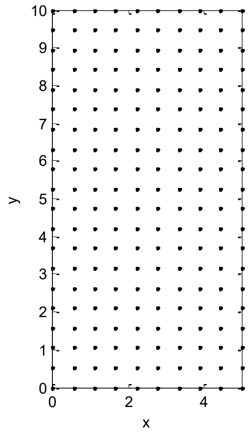
الف: نمایش شماتیک هندسه و شرایط‌مرزی | ب) بار آبی کل به روش چندربعی | ج) بار آبی کل به روش تحلیلی | د) بردارهای سرعت به روش چندربعی | ه) بردارهای سرعت به روش تحلیلی

شکل ۵. میدان محاسباتی و نتایج حل مثال شماره یک با توزیع نقاط مثلثی

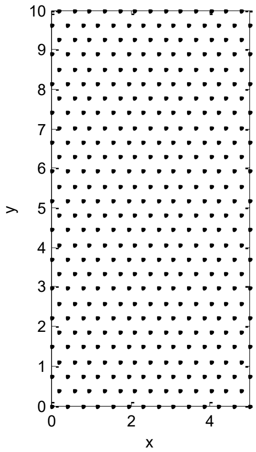
Fig. 5. Computational domain and results of example 1 using triangular distribution.



شکل ۶. توزیع نقاط منطبق بر رئوس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع
Fig. 6. Triangular distribution.



شکل ۷. توزیع نقاط منطبق بر رئوس مستطیل
Fig. 7. Rectangular distribution.



شکل ۸. توزیع نقاط منطبق بر رئوس لوزی
Fig. 8. Diamond distribution.

جدول ۲. نتایج حل مثال یک با توزیع نقاط مثلثی
Table 2. Results of example 1 using triangular distribution.

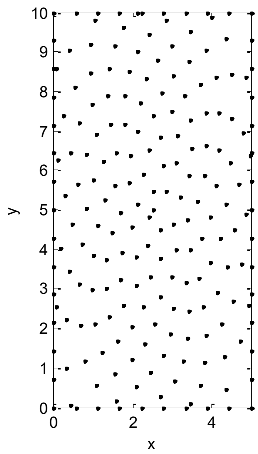
عدد وضعیت ماتریس ضرایب	خطای جذر میانگین مربعات	پارامتر شکل بهینه	تعداد نقاط
۷.۱۶E+۰۷	۱.۵۱۳۷	۰.۲۵	۵۵
۱.۷۱E+۰۹	۱.۲۳۷۴	۰.۲۵	۸۰
۱.۸۵E+۱۰	۰.۲۳۱۱	۰.۲۵	۱۱۷
۵.۳۸E+۱۰	۰.۱۱۲۳	۰.۲۵	۱۴۸
۱.۹۲E+۱۲	۰.۰۴۱۶	۰.۲۵	۱۷۹

جدول ۳. نتایج حل مثال یک با توزیع نقاط مستطیلی
Table 3. Results of example 1 using rectangular distribution.

عدد وضعیت ماتریس ضرایب	خطای جذر میانگین مربعات	پارامتر شکل بهینه	تعداد نقاط
۲.۸۹E+۰۸	۲.۹۲	۰.۱۹۴۱۲	۵۰
۱.۴۰E+۱۰	۰.۶۲۳۲۵	۰.۱۹۴۱۲	۷۲
۷.۵۲E+۱۱	۰.۴۴۷۲۲	۰.۱۹۴۱۲	۹۸
۴.۳۲E+۱۳	۰.۰۵	۰.۱۹۴۱۲	۱۲۸
۲.۵۲E+۱۵	۰.۰۷۱۱	۰.۱۹۴۱۲	۱۶۲

جدول ۴. نتایج حل مثال یک با توزیع نقاط لوزی
Table 4. Results of example 1 using diamond distribution.

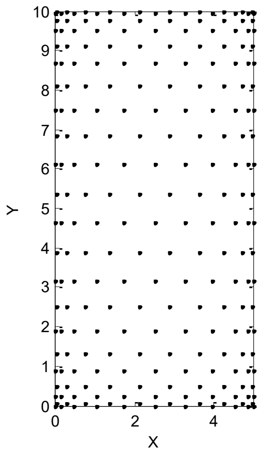
عدد وضعیت ماتریس ضرایب	خطای جذر میانگین مربعات	پارامتر شکل بهینه	تعداد نقاط
۸.۰۸E+۰۸	۰.۰۷۴۴	۰.۱۷۸۱۳	۶۶
۳.۵۲E+۱۰	۰.۰۳۸۶۹	۰.۱۷۸۱۳	۹۱
۱.۶۳E+۱۲	۰.۰۱۷	۰.۱۷۸۱۳	۱۲۰
۷.۷۲E+۱۳	۰.۰۰۷۱	۰.۱۷۸۱۳	۱۵۳
۳.۶۵E+۱۵	۰.۰۰۳۲	۰.۱۷۸۱۳	۱۹۰



شکل ۹. توزیع نقاط فیبوناچی
Fig. 9. Fibonacci distribution.

جدول ۵. نتایج حل مثال یک با توزیع نقاط فیبوناچی
Table 5. Results of example 1 using Fibonacci distribution.

تعداد نقاط	پارامتر شکل بهینه	خطای جذر میانگین مربعات	عدد وضعیت ماتریس ضرایب
۶۶	۰.۱۸۷	۰.۷۳۴۶۷	۲.۴۳E+۰۹
۷۶	۰.۱۸۷	۰.۰۸۸۳۸	۶.۰۸E+۰۹
۱۰۶	۰.۱۸۷	۰.۰۴۸۶	۸.۶۸E+۱۱
۱۴۶	۰.۱۸۷	۰.۰۰۴۰۴	۶.۷۴E+۱۴
۱۸۶	۰.۱۸۷	۰.۰۰۰۸۲۶	۳.۰۲E+۱۵



شکل ۱۰. توزیع نقاط پادوا
Fig. 10. Padua distribution.

جدول ۶. نتایج حل مثال یک با توزیع نقاط پادوا
Table 6. Results of example 1 using Padua distribution.

تعداد نقاط	پارامتر شکل بهینه	خطای جذر میانگین مربعات	عدد وضعیت ماتریس ضرایب
۴۵	۰.۱۳۴۱۲	۰.۰۴۴۰	۱.۴۴E+۰۸
۶۶	۰.۱۳۴۱۲	۰.۰۰۵۴	۱.۱۹E+۱۰
۹۱	۰.۱۳۴۱۲	۰.۰۰۱۳۶	۶.۹۵E+۱۱
۱۲۰	۰.۱۳۴۱۲	۰.۰۰۰۱۸۳	۵.۳۹E+۱۳
۱۵۳	۰.۱۳۴۱۲	۵.۰۴۶E-۵	۲.۶۲E+۱۵

جدول ۷. مقادیر بار آبی در مثال یک با روش چندربعی
Table 7. Pressure head values of example 1 using MQ method.

x / y	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	-۰.۰۰۲
۱	۰.۰۰۱	۰.۸۳۹	۱.۵۸۸	۲.۱۸۰	۲.۵۵۵	۲.۶۷۷
۲	-۰.۰۰۱	۱.۷۶۵	۳.۳۵۰	۴.۶۰۳	۵.۳۹۷	۵.۶۵۶
۳	۰.۰۰۰	۲.۸۶۹	۵.۴۵۱	۷.۴۹۱	۸.۷۹۱	۹.۲۲۸
۴	۰.۰۰۲	۴.۲۶۵	۸.۰۹۹	۱۱.۱۳۲	۱۳.۰۶۰	۱۳.۷۱۰
۵	-۰.۰۰۱	۶.۰۹۲	۱۱.۵۷۱	۱۵.۸۹۴	۱۸.۶۳۸	۱۹.۵۵۷
۶	۰.۰۰۰	۸.۵۴۰	۱۶.۲۱۵	۲۲.۲۶۸	۲۶.۰۸۸	۲۷.۳۱۹
۷	-۰.۰۰۱	۱۱.۸۵۵	۲۲.۵۰۸	۳۰.۹۰۲	۳۶.۱۹۰	۳۷.۸۷۶
۸	۰.۰۰۲	۱۶.۳۶۸	۳۱.۰۹۷	۴۲.۷۱۲	۵۰.۰۳۲	۵۲.۳۵۸
۹	-۰.۰۰۱	۲۲.۵۱۹	۴۲.۸۳۷	۵۸.۸۹۴	۶۸.۹۷۲	۷۲.۱۳۳
۱۰	۰.۰۰۰	۳۰.۸۷۱	۵۸.۷۸۴	۸۰.۹۳۴	۹۵.۰۱۶	۹۹.۴۱۱

جدول ۸. مقادیر بار آبی در مثال یک با روش تحلیلی
Table 8. Pressure head values of example 1 using analytical method.

x / y	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۱	۰.۰۰۰	۰.۸۵۵	۱.۶۲۵	۲.۲۳۷	۲.۶۳۰	۲.۷۶۵
۲	۰.۰۰۰	۱.۷۹۴	۳.۴۱۲	۴.۶۹۷	۵.۵۲۲	۵.۸۰۶
۳	۰.۰۰۰	۲.۹۱۲	۵.۵۳۹	۷.۶۲۴	۸.۹۶۳	۹.۴۲۴
۴	۰.۰۰۰	۴.۳۲۰	۸.۲۱۷	۱۱.۳۱۰	۱۳.۲۹۶	۱۳.۹۸۰
۵	۰.۰۰۰	۶.۱۵۸	۱۱.۷۱۳	۱۶.۱۲۱	۱۸.۹۵۲	۱۹.۹۲۷
۶	۰.۰۰۰	۸.۶۰۸	۱۶.۳۷۴	۲۲.۵۳۷	۲۶.۴۹۳	۲۷.۸۵۷
۷	۰.۰۰۰	۱۱.۹۱۵	۲۲.۶۶۴	۳۱.۱۹۵	۳۶.۶۷۲	۳۸.۵۵۹
۸	۰.۰۰۰	۱۶.۴۰۸	۳۱.۲۱۰	۴۲.۹۵۷	۵۰.۴۹۹	۵۳.۰۹۸
۹	۰.۰۰۰	۲۲.۵۳۴	۴۲.۸۶۲	۵۸.۹۹۴	۶۹.۳۵۲	۷۲.۹۲۱
۱۰	۰.۰۰۰	۳۰.۹۰۲	۵۸.۷۷۹	۸۰.۹۰۲	۹۵.۱۰۶	۱۰۰.۰۰

همان‌طور که مشاهده می‌شود در انواع توزیع‌های بررسی‌شده، پارامتر شکل بهینه به تعداد نقاط انتخابی برای حل مسئله وابسته نیست. این امر یک نتیجه بسیار مهم و مفید برای روش چندربعی خواهدبود چراکه با الگوریتم پیشنهادی این پژوهش می‌توان به‌راحتی پارامتر شکلی مستقل از تعداد نقاط برای هر مسئله به‌دست آورد و با تغییر تعداد نقاط به دقت موردنظر دست یافت. بسیاری از روش‌های قبل به‌ازای هر تعداد نقطه باید پارامتر شکل را بهینه کنند و این مسئله زمان محاسبات را افزایش می‌دهد. همچنین دقت همه توزیع‌های مذکور بالا است هرچند که نسبت به یکدیگر متفاوت هستند. همچنین عدد وضعیت آن‌ها نیز مطلوب است.

جدول ۹. مقادیر سرعت در مثال یک با روش چندربعی
Table 9. Velocity values in example 1 using MQ method.

x / y	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۱	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۱۳۱
۲	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴
۳	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۱۳۴	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲
۴	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲
۵	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲	۰.۲۶۲	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹
۶	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹
۷	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵
۸	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵	۰.۴۲۵
۹	۰.۴۲۵	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶
۱۰	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶	۰.۴۳۶

جدول ۱۰. مقادیر سرعت در مثال یک با روش تحلیلی
Table 10. Velocity values in example 1 using analytical method.

x / y	۰	۱	۲	۳	۴	۵
۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۱	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰	۰.۱۳۷
۲	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷
۳	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۱۳۷	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱
۴	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱
۵	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱	۰.۲۶۱	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹
۶	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹
۷	۰.۳۵۹	۰.۳۵۹	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳
۸	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳	۰.۴۲۳
۹	۰.۴۲۳	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴
۱۰	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴	۰.۴۴۴

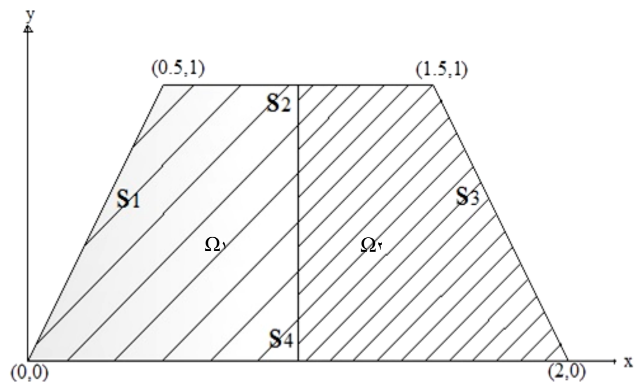
۲-۵- مثال دو

هندسه این مثال ناهمگن مطابق شکل ۱۱ است که در آن شرایط‌مرزی S_1 تا S_4 به‌ترتیب مطابق روابط ۲۸ تا ۳۱ تعریف می‌شود. ضریب هدایت هیدرولیکی در همه جهت‌ها برای نواحی Ω_1 و Ω_2 به‌ترتیب برابر ۰٫۰۰۱ و ۰٫۰۰۰۱ متر بر ثانیه است.

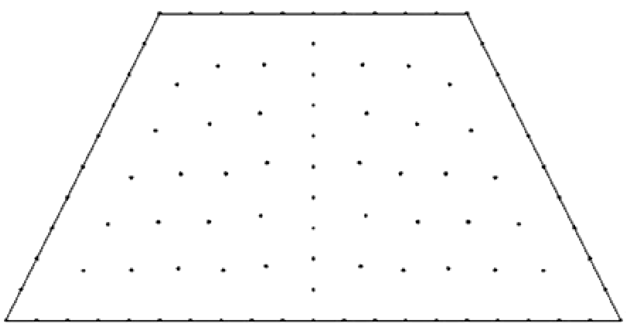
$$H(x,y)=3 \qquad (۲۸)$$

$$\left.\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}\right|_{y=1}=0 \qquad (۲۹)$$

$$H(x,y)=2 \qquad (۳۰)$$



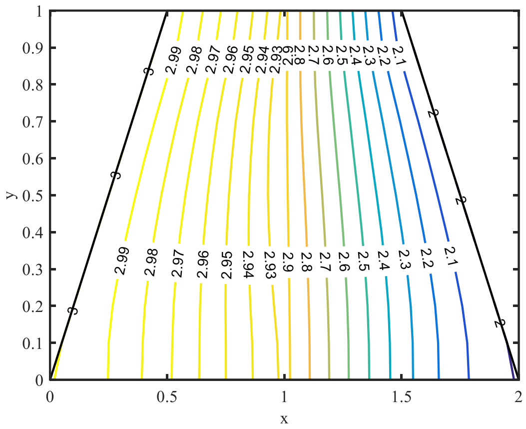
شکل ۱۱. هندسه و شرایط‌مرزی مثال شماره دو
Fig. 11. Geometry and boundary conditions of example 1.



شکل ۱۲. توزیع یکنواخت ۹۷ نقطه در مثال دو
Fig. 12. Uniform distribution of 97 nodes in example 2.

جدول ۱۱. مقادیر پارامتر شکل بهینه در مثال شماره دو
Table 11 Optimum shape parameter values in example 2.

پارامتر شکل بهینه برای زیر ناحیه Ω۲	پارامتر شکل بهینه برای زیر ناحیه Ω۱	تعداد نقاط
۱/۵	۱/۲	۶۵
۱/۵	۱/۲	۹۷
۱/۵	۱/۲	۱۳۰



شکل ۱۳. خطوط هم‌فشار در مثال شماره دو با روش چندربعی
Fig. 13. Pressure contours in example 2 using MQ method.

جدول ۱۲. مقادیر بار آبی کل برحسب متر در مثال شماره دو به روش حجم محدود (FV) و چندربعی (MQ)
Table 12. Pressure head values of example 2 using FV and MQ methods.

x	y	H (FV)	H (MQ)	x	y	H (FV)	H (MQ)
۰.۲۵۰	۰.۵۰۰	۳.۰۰۰	۳.۰۰۰	۱.۰۰۷	۰.۵۰۰	۲.۹۰۰	۲.۹۱۰
۰.۳۴۷	۰.۵۰۰	۲.۹۹۰	۲.۹۹۰	۱.۰۸۴	۰.۵۰۰	۲.۸۰۰	۲.۸۰۰
۰.۴۳۷	۰.۵۰۰	۲.۹۸۰	۲.۹۸۰	۱.۱۶۰	۰.۵۰۰	۲.۷۰۰	۲.۷۰۰
۰.۵۲۴	۰.۵۰۰	۲.۹۷۰	۲.۹۸۰	۱.۲۳۷	۰.۵۰۰	۲.۶۰۰	۲.۶۰۰
۰.۶۰۶	۰.۵۰۰	۲.۹۶۰	۲.۹۷۰	۱.۳۱۵	۰.۵۰۰	۲.۵۰۰	۲.۵۰۰
۰.۶۹۵	۰.۵۰۰	۲.۹۵۰	۲.۹۶۰	۱.۳۹۵	۰.۵۰۰	۲.۴۰۰	۲.۴۰۰
۰.۷۶۳	۰.۵۰۰	۲.۹۴۰	۲.۹۵۰	۱.۴۷۷	۰.۵۰۰	۲.۳۰۰	۲.۳۰۰
۰.۸۴۰	۰.۵۰۰	۲.۹۳۰	۲.۹۴۰	۱.۵۶۳	۰.۵۰۰	۲.۲۰۰	۲.۲۰۰
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}\Big|_{y=0}=0 \qquad (۳۱)$$

برای حل این مسئله از روش تجزیه میدان استفاده‌شد و دو زیر میدان Ω_1 و Ω_2 با یک مرز مصنوعی واقع بر مرز ناهمگنی ایجاد گردید. برای محاسبه پاسخ‌ها، تعداد ۹۷ نقطه با توزیع مثلثی (شکل ۱۲) انتخاب شد و بازه اولیه پارامتر شکل هم [۱٫۹ و ۱] به‌دست آمد. نتایج حل این مثال در جدول ۱۱ و شکل ۱۳ ارائه گردیده‌است.

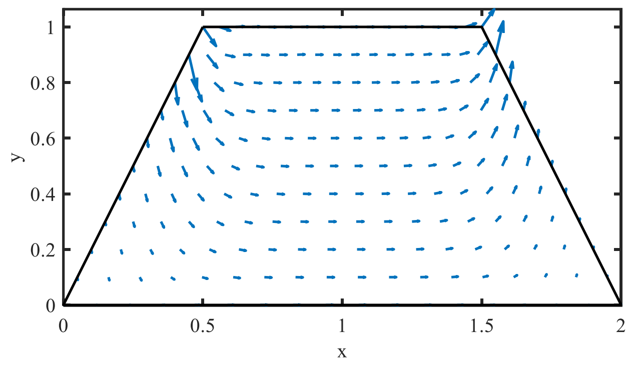
برای صحت‌سنجی نیز از نتایج روش حجم محدود مطابق جدول ۱۲ استفاده‌شده‌است.

۵-۳- مثال سه

هندسه و شرایط‌مرزی این مثال همانند مثال دو می‌باشد با این تفاوت که محیط دامنه همگن بوده ولی دارای ناهمسانی $\frac{k_y}{k_x}=۱۲$ می‌باشد. برای حل، تعداد ۲۰۹ نقطه انتخاب شد. بازه اولیه پارامتر شکل به‌صورت [۱٫۹ و ۱٫۴] و پارامتر شکل بهینه ۱/۸۱۶۸ به‌دست آمد. نتایج حل این مثال با رویکرد حاضر در شکل ۱۴ و در مقایسه با روش حجم محدود در جدول ۱۳ ارائه گردیده‌است.

۵-۴- مثال چهار

در این مثال یک هندسه پیچیده‌تر با الگوی سدهای خاکی به‌همراه



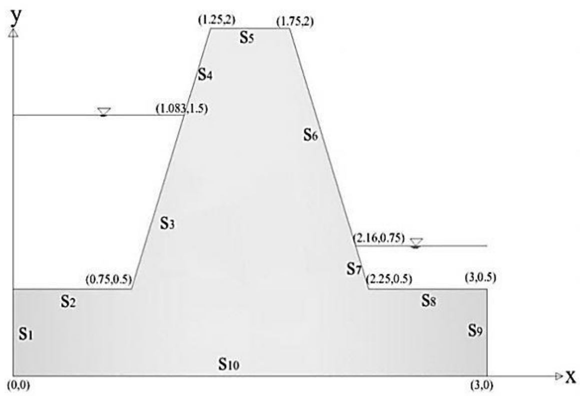
شکل ۱۴. بردارهای سرعت در مثال سه با روش چندربعی
Fig. 14. Velocity vectors in example 3 using MQ method.

جدول ۱۳. اندازه سرعت در مثال سه به روش FV و MQ
Table 13. Velocity values of example 3 using FV and MQ methods.

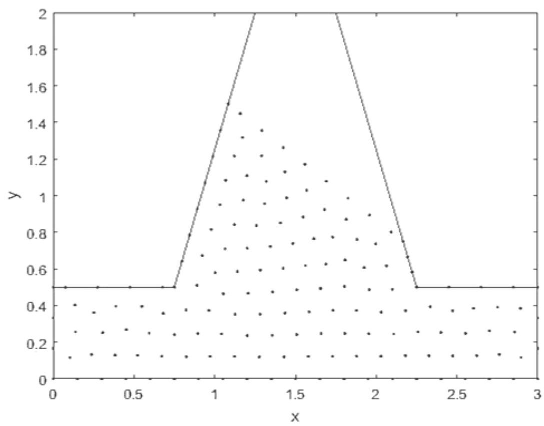
x	y	V (FV)	V (MQ)
۰.۲۵۰۱	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۷۸۹۵۲۵	۰.۰۰۰۷۷۰۲۹
۰.۵۱۸۲	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۱۲۵۹۲۸۳	۰.۰۰۱۲۲۸۷۳۴
۰.۶۴۶۶	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۸۳۶۶۵	۰.۰۰۰۸۵۷۸۱۱
۰.۷۶۴۵	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۵۰۴۷۳	۰.۰۰۰۸۳۱۸۶
۰.۸۸۱۹	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۴۸۹۰۶	۰.۰۰۰۸۲۵۵۳۴
۱.۰۰۰۱	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۴۹۰۷۹	۰.۰۰۰۸۲۱۳۳۴
۱.۱۱۷۹	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۴۸۹۰۶	۰.۰۰۰۸۱۸۷۳۳
۱.۲۳۵۸	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۵۰۴۷۳	۰.۰۰۰۸۲۸۲۴۴
۱.۳۵۳۶	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۰۸۸۳۶۶۵	۰.۰۰۰۸۵۶۴۹۱
۱.۴۸۱۴	۰.۵۰۰۲	۰.۰۰۱۲۵۹۲۸۳	۰.۰۰۱۲۲۸۷۳۴

پی مطابق شکل ۱۵ انتخاب شد. مرزهای S_1، S_9 و S_{10} نفوذناپذیر، S_4، S_5 و S_6 آزاد، S_2 و S_3 متأثر از ارتفاع آب بالادست و S_7 و S_8 متأثر از ارتفاع آب پایین‌دست هستند.

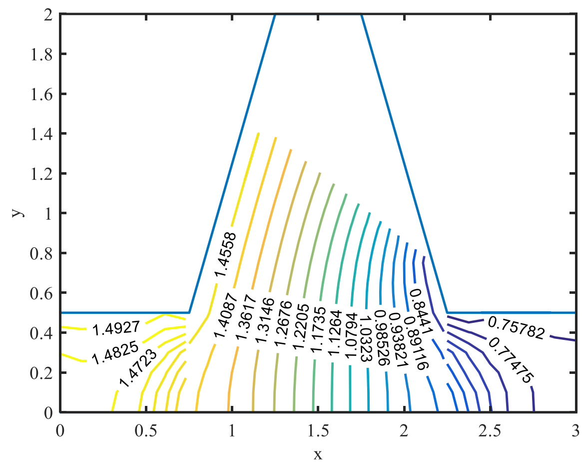
برای حل این مسئله، تعداد ۱۵۱ نقطه مطابق شکل ۱۶ انتخاب شد. همان‌طور که در این شکل مشخص است، روش چندربعی این قابلیت را دارد که نقاط محاسباتی در بخشی از میدان که پاسخ مهم‌تر است توزیع شوند و محاسبات در آن نواحی با دقت بالاتری صورت گیرد. همچنین بازه اولیه پارامتر شکل [۳٫۰۴۱۴ و ۱٫۲]و مقدار بهینه آن ۲٫۶۱۹۲ به‌دست آمد. نتایج حل این مثال با رویکرد حاضر در شکل ۱۷ و در



شکل ۱۵. هندسه و شرایط‌مرزی مثال شماره ۴
Fig. 15. Geometry and boundary conditions of example 4.



شکل ۱۶. توزیع یکنواخت ۱۵۱ نقطه در مثال چهار
Fig. 16. Uniform distribution of 151 nodes in example 4.



شکل ۱۷. خطوط هم‌فشار در مثال چهار با روش چندربعی
Fig. 17. Pressure contours in example 4 using MQ method.

جدول ۱۴. مقادیر بار آبی در مثال چهار به روش FV و MQ
Table 14. Pressure head values of example 4 using FV and MQ methods.

x	y	H (FV)	H (MQ)
۰.۷۵	۰.۵	۱.۵	۱.۵۰۰
۰.۸۶۷۹	۰.۵	۱.۴۵	۱.۴۵۵
۱.۰۰۶۹	۰.۵	۱.۴	۱.۳۹۲
۱.۱۴۴۴	۰.۵	۱.۳۵	۱.۳۳۶
۱.۲۷۶	۰.۵	۱.۳	۱.۲۷۹
۱.۴۰۰۵	۰.۵	۱.۲۵	۱.۲۲۲
۱.۵۱۸۳	۰.۵	۱.۲	۱.۱۶۶
۱.۶۲۸۴	۰.۵	۱.۱۵	۱.۱۱۲
۱.۷۳۰۷	۰.۵	۱.۱	۱.۰۵۹
۱.۸۲۴۹	۰.۵	۱.۰۵	۱.۰۰۷
۱.۹۱۱۳	۰.۵	۱	۰.۹۵۸
۱.۹۹	۰.۵	۰.۹۵	۰.۹۱۲
۲.۰۶۳	۰.۵	۰.۹	۰.۸۶۷
۲.۱۳۰۸	۰.۵	۰.۸۵	۰.۸۲۱
۲.۱۹۶۱	۰.۵	۰.۸	۰.۷۷۷
۲.۲۵	۰.۵	۰.۷۵	۰.۷۵۰

مقایسه با روش حجم محدود در جدول ۱۴ ارائه گردیده‌است.

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش یک رویکرد فراابتکاری با استفاده از الگوریتم ژنتیک برای تعیین پارامتر شکل بهینه در روش چندربعی با هدف بهبود برخی از نقاط ضعف روش‌های پیشین پیشنهاد شد. بعضی از روش‌ها تجربی هستند و دقت آن‌ها بسته به بعد مسئله، نوع مسئله (درون‌یابی یا حل معادلات دیفرانسیل)، شرایط‌مرزی (طبیعی یا اجباری) و نوع توزیع نقاط (یکنواخت یا غیریکنواخت) متفاوت است ولی الگوریتم حاضر برای حل مسائل با معادلات دیفرانسیل و شرایط‌مرزی گوناگون و هندسه‌های مختلف با دقت مناسبی قابل کاربرد است. هم‌چنین رویکرد حاضر با سه توزیع یکنواخت و دو توزیع غیریکنواخت منظم از نقاط محاسباتی نیز آزمایش شد و نتایج قابل‌قبولی ارائه داد. بعضی روش‌ها به حل دقیق یا یک حل عددی دیگر از مسئله هم‌زمان با روش چندربعی نیاز دارند درحالی‌که تابع هدف در این پژوهش به‌گونه‌ای تعیین شد که نیاز به یک حل اولیه از مسئله نباشد. روابط پیشین تعیین پارامتر شکل متغیر به‌دلیل ایجاد اختلافات بیشتر در درایه‌های ماتریس ضرایب، احتمال کوچک شدن عدد وضعیت و بدحالت شدن آن را بالاتر می‌برند و در آن‌ها تعیین حد پایین و حد بالای پارامتر شکل‌ها همواره یک چالش بوده‌است. در الگوریتم پیشنهادی، شرط بدحالت نشدن ماتریس ضرایب گنجانده شده و بازه محدودی برای پارامتر شکل بهینه، متناسب با کمینه و بیشینه فاصله بین نقاط محاسباتی یا به عبارتی متناسب با هندسه مسئله پیشنهاد گردیده‌است. این بازه برای به حداقل رساندن سعی‌وخطا و سرعت بخشیدن به روند حل مسائل در الگوریتم حاضر مفید واقع شد و در سایر الگوریتم‌ها نیز قابل کاربرد خواهد بود. برای اولین بار با الگوریتم پیشنهادی این پژوهش، پارامتر شکل معرفی‌شده برای هر تعداد نقطه‌ای ثابت و بهینه به‌دست آمد. به‌عبارت‌دیگر، پارامتر شکل به تغییرات تعداد نقاط محاسباتی وابسته نخواهد بود و برخلاف دیگر روش‌ها نیاز به بهینه‌کردن آن برای هر تعداد نقطه محاسباتی و صرف هزینه زمانی نیست. هم‌چنین استفاده از الگوریتم ژنتیک باعث می‌شود که روش حاضر برخلاف روش‌های بهینه‌سازی کلاسیک در دام نقاط بهینه محلی نیافتد که از یافتن نقاط بهینه کلی بازبماند. برای ایجاد تعداد قابل‌توجهی درایه صفر در ماتریس ضرایب و نیز اعمال راحت‌تر روش چندربعی در شبیه‌سازی میدان‌های ناهمگن و هندسه‌های پیچیده در مسائل تراوش، فن تجزیه دامنه به کمک مرزهای مصنوعی با موفقیت به‌کار گرفته‌شد و برای مسائل مشابه نیز توصیه می‌شود. به‌منظور صحت‌سنجی، مسائلی همگن، ناهمگن و ناهمسان از پدیده تراوش با کاربرد در بدنه و پی سدهای خاکی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج به‌دست‌آمده از حل این مسائل در مقایسه با نتایج حل دقیق و روش حجم محدود، توانایی و دقت بالای روش چندربعی تحت الگوریتم پیشنهادی این پژوهش را نشان داد.

مراجع

[1] R.L. Hardy, Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, Journal of geophysical research, 76(8) (1971) 1905-1915.

[2] R.L. Hardy, Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968–1988, Computers & Mathematics with Applications, 19(8-9) (1990) 163-208.

[3] Y.-C. Hon, K.F. Cheung, X.-Z. Mao, E.J. Kansa, Multiquadric solution for shallow water equations, Journal of Hydraulic Engineering, 125(5) (1999) 524-533.

[4] S. Wong, Y. Hon, T. Li, A meshless multilayer model for a coastal system by radial basis functions, Computers & Mathematics with Applications, 43(3-5) (2002) 585-605.

[5] R. Hardy, Hardy's multiquadric-biharmonic method for gravity field predictions II, Computers & Mathematics with Applications, 41(7-8) (2001) 1043-1048.

[6] D. Young, S. Jane, C. Lin, C. Chiu, K. Chen, Solutions of 2D and 3D Stokes laws using multiquadrics method, Engineering analysis with boundary elements, 28(10) (2004) 1233-1243.

[7] F. Gao, C. Chi, Numerical solution of nonlinear Burgers' equation using high accuracy multi-quadric quasi-interpolation, Applied Mathematics and Computation, 229 (2014) 414-421.

[8] W. Bao, Y. Song, Multiquadric quasi-interpolation methods for solving partial differential algebraic equations, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 30(1) (2014) 95-119.

[9] Z. Wu, S. Zhang, Conservative multiquadric quasi-interpolation method for Hamiltonian wave equations, Engineering Analysis with Boundary Elements, 37(7-8) (2013) 1052-1058.

[10] S. Patel, A. Rastogi, Meshfree multiquadric solution for real field large heterogeneous aquifer system, Water Resources Management, 31(9) (2017) 2869-2884.

[11] N. Li, H. Su, D. Gui, X. Feng, Multiquadric RBF-FD method for the convection-dominated diffusion problems base on Shishkin nodes, International Journal of Heat and Mass Transfer, 118 (2018) 734-745.

[12] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, Computers & mathematics with applications, 19(8-9) (1990) 147-161.

[13] E. Kansa, R. Carlson, Improved accuracy of multiquadric interpolation using variable shape parameters, Computers & Mathematics with Applications, 24(12) (1992) 99-120.

[14] S.A. Sarra, Integrated multiquadric radial basis function approximation methods, Computers & Mathematics with Applications, 51(8) (2006) 1283-1296.

[15] C.-S. Huang, C.-F. Lee, A.-D. Cheng, Error estimate, optimal shape factor, and high precision computation of multiquadric collocation method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 31(7) (2007) 614-623.

[16] A.-D. Cheng, Multiquadric and its shape parameter—a numerical investigation of error estimate, condition number, and round-off error by arbitrary precision computation, Engineering analysis with boundary elements, 36(2) (2012) 220-239.

[17] C.-S. Huang, H.-D. Yen, A.-D. Cheng, On the increasingly flat radial basis function and optimal shape parameter for the solution of elliptic PDEs, Engineering analysis with boundary elements, 34(9) (2010) 802-809.

[18] S. Xiang, K.-m. Wang, Y.-t. Ai, Y.-d. Sha, H. Shi, Trigonometric variable shape parameter and exponent strategy for generalized multiquadric radial basis function approximation, Applied Mathematical Modelling, 36(5) (2012) 1931-1938.

[19] M. Esmaeilbeigi, M. Hosseini, A new approach based on the genetic algorithm for finding a good shape parameter in solving partial differential equations by Kansa's method, Applied Mathematics and Computation, 249 (2014) 419-428.

[20] S. Rippa, An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation, Advances in Computational Mathematics, 11(2-3) (1999) 193-210.

[21] M. Uddin, On the selection of a good value of shape parameter in solving time-dependent partial differential equations using RBF approximation method, Applied Mathematical Modelling, 38(1) (2014) 135-144.

[22] J. Biazar, M. Hosami, Selection of an Interval for Variable Shape Parameter in Approximation by Radial Basis Functions, Advances in Numerical Analysis, (2016).

[23] W. Chen, Y. Hong, J. Lin, The sample solution approach for determination of the optimal shape parameter in the Multiquadric function of the Kansa method, Computers

& Mathematics with Applications, 75(8) (2018) 2942-2954.

[24] H.R. Azarboni, M. Keyanpour, M. Yaghouti, Leave-Two-Out Cross Validation to optimal shape parameter in radial basis functions, Engineering Analysis with Boundary Elements, 100 (2019) 204-210.

[25] A. Fallah, E. Jabbari, R. Babaee, Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization, Computers & Mathematics with Applications, 77(3) (2019) 815-829.

[26] E. Kansa, A strictly conservative spatial approximation scheme for the governing engineering and physics equations over irregular regions and inhomogeneously scattered nodes, Computers & Mathematics with Applications, 24(5-6) (1992) 169-190.

[27] E. Jabbari, R. Ghiassi, Three-dimensional steady state seepage, a finite volume approach, WIT Transactions on Ecology and the Environment, 52 (2002).

[28] P.-O. Persson, G. Strang, A simple mesh generator in MATLAB, SIAM review, 46(2) (2004) 329-345.

[29] D.P. Hardin, T. Michaels, E.B. Saff, A Comparison of Popular Point Configurations on $\mathbb {S}^ 2$, arXiv preprint arXiv:1607.04590, (2016).

[30] M. Caliari, S. De Marchi, M. Vianello, Padua2D: Lagrange interpolation at Padua points on bivariate domains, ACM Trans. Math. Software, (2008) 35-33.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Koushki, R. Babaee, E. Jabbari, Application of MQ-RBF method for solving seepage problems with a new algorithm for optimization of the shape paramete, Amirkabir J. Civil Eng., 52(4) (2020) 1009-1024.

DOI: 10.22060/ceej.2019.15155.5840

این صفحه عمداً خالی است