



The Analyzing of the Discontinuity Problem by Enriched Interpolation Covers

H. Arzani*, E. Khoshbavar Rad

Department of Civil Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

ABSTRACT: The cover numerical method is based on unit partitioning, using enrichment functions of various orders, this method increases the accuracy at every point. In this method, unknowns are added to the points of not sufficient accuracy, regarding to the enrichment interpolating functions. The cover method has proved its efficiency in a variety of engineering problems. The Heaviside function models the displacement discontinuity on the crack boundary. Such functions are added to model the coefficient of stress intensity for the tip of the crack. In this paper, the proposed method has been verified by evaluating crack parameters for instances containing fixed fractures. In the end, three numerical instances containing central crack, edge crack and inclined crack with three different cracks are inspected. The comparison of the results from the presented method, with exact solutions and other solutions in the area of linear elasticity, proves the reliability and accuracy of the proposed method.

Review History:

Received: 2018-02-24

Revised: 2018-09-22

Accepted: 2018-09-29

Available Online: 2019-01-08

Keywords:

The interpolating cover Functions method

Discontinuous fields

Heaviside function

Crack

1. INTRODUCTION

The crack modeling is an important problem in forecasting the life of engineering structures, and over past decades it was paid much attention by many researchers. Many simulations using the finite element method with renewed mesh generation and mesh-free methods, were used to model crack growth as well as its extension. Extra computational cost is also encountered because of the need for fine elements in the crack area. When the crack growth enters the problem, the need for remeshing in these methods makes the simulation quite boring and time-consuming. Variables such as displacement, stress, and strain need to be interpreted in the new mesh which further increases the computational cost.

Calculation of stress intensity factor (SIF) plays a key role in the fracture mechanics. Among different kinds of numerical methods, the finite element method (FEM) is a representative. The FEM has already been used to solve a great number of crack problems. With the delimitations, for crack problems, the crack surface must be consistent with element edges, and the crack tip must be designed as a node. What is more, for accuracy reason, high mesh resolution is required around the crack tip even when singular elements are used. Considering the limitations of the FEM, recent years, several kinds of neo-numerical methods have been put forward to solve discontinuity problems with higher accuracy and efficiency in the framework of the partition of unity method (PUM) [1].

Arzani et al. obtain more accurate answers in discrete

*Corresponding author's email: h.arzani@srttu.com

least-squares meshless method for solving problems in the field of fracture mechanics with the use of the CSS algorithm [2, 3].

The numerical manifold method (NMM) was first introduced by Shi. This is a method based on the combination of finite element and discrete displacement analysis (DDA) [4]. Shi et al., had proposed a numerical manifold method to analyze discontinuous deformations, which is an effective technique in solid mechanics field and has been the subject of many researches in recent years [5].

The choice of cover function is also important for proper NMM analysis, in particular when the size of each block is quite large. When the INMM is used for a crack problem, a cover is divided into two irregular sub-covers at the discontinuity. As a result, the method sometimes causes errors at the tip of a crack. To improve the precision of INMM, analytical solution near the tip of a crack is used in the present paper. The enrichment near the tip of a crack for linear elastic problems is achieved by the expansion of the basis functions with singular functions [6].

In recent years, Kim and Bathe [7] presented the method of enrichment method by the cover interpolation function, which was inspired by the manifold method. They used low order finite elements to mesh their model geometry to accelerate convergence. The method was based on enriched finite elements by the cover interpolation elements on each element. This method is also applicable to problems containing distorted elements, and the main idea is to increase the accuracy without excessive increase in degrees of freedom.



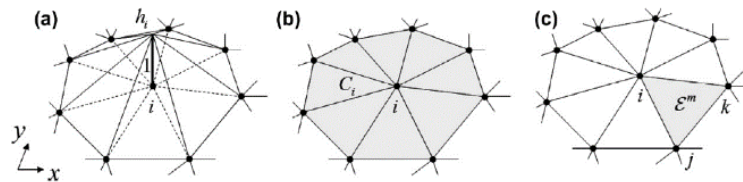


Fig. 1. interpolations: (a) usual linear nodal shape function, (b) cover region or elements affected by the interpolation cover, and (c) an element [7]

In their next movement [8], the researchers attempted to overcome these problems, but the enhancements made the method less general, and it was no longer applicable to entire elasticity problems. As an instance, a compact grid was necessary from the beginning to prevent an excessive increase in the order of interpolation function in all problems. Another important instance was the lack of existence of a comprehensive formulation for all problems by which the proper degree of interpolation functions are attained.

The authors, after inspecting the advantages and disadvantages of the interpolation functions method, have proposed a solution to automatically solve the problems in elasticity field, which has criterion and to evaluate standard error to elect proper order. The criterion was free of computational complexities associate with the tetragonal elements. In this paper, this method is generalized to be applied to discontinuous problems while still having its advantages.

General differential stress equations in elastostatic problem by requirements boundary conditions are solved in some benchmark examples, and a comparison between the proposed method and other available methods are presented.

2. DOMAIN DISCRETIZATION AND INTERPOLATION

In this step, the formulation of enriched finite elements using interpolating function is discussed briefly. If a standard discretization is used for meshing a domain, the accuracy of the response would depend on the size and size of the elements. In this type of enrichment, a covering subdomain for each node is considered. Every subdomain contains an interpolating function with the known degree. In these subdomains, higher-order functions are used concerning standard condition, which in turn leads to results with higher accuracies. In Figure 1a, function h_i is a linear interpolating function for the node i . Its value is 1 at the node i , and in other nodes dependent to I is equal to 0. Elements attached to node i are considered subdomain of this node. The usage of linear functions for interpolating the subdomains results in approximations with a low amount of computations and a high rate. The region interpolated for the node I by the linear function of h_i is dubbed the cover region of node I and is shown with C_i (Figure 1b). The cover region of triangular node M , with three nodes, i, j, k is the same as Figure 1c. It equals the axiom of cover areas $c_i \cup c_j$ and c_k . Bathe and Kim in [7] implied that the use of this method for tetragonal elements produces several problems.

After the determination of the cover zone of nodes, it is the turn of interpolating those cover zones. This is done by p -order polynomials. Interpolated value of unknown u at

node i with regard to its cover zone is shown in Figure 6.

$$P_i^p [u] = u_i + [\bar{x}_i \quad \bar{y}_i \quad \bar{x}_i^2 \quad \bar{x}_i \bar{y}_i \quad \bar{y}_i^2 \quad \dots \quad \bar{y}_i^p] a_i \quad (5)$$

In relation 5, variables (\bar{x}_i, \bar{y}_i) imply the distance from node I and vector u_i shows extra degrees of freedom related to node I in the cover zone i . Enriched approximation for the field variable u for an element is given in Equation 6:

$$u = \sum_{m=1}^3 h_m u_m + H_i a_i \quad (6)$$

Where:

$$H_i = h_i [\bar{x}_i \quad \bar{y}_i \quad \bar{x}_i^2 \quad \bar{x}_i \bar{y}_i \quad \bar{y}_i^2 \quad \dots \quad \bar{y}_i^p] \quad (7)$$

With the summation of values in 7 over nodes in an element and combining Equations 6-8, after some algebra, its found that:

$$u = \sum_{m=1}^3 h_m P_i^p \quad (8)$$

And thus, instead of the standard method of interpolating, the $h_i P_i^p$ method of interpolating has been used. Where P_i^p contains normal field values u_i plus the degrees of freedom related to cover functions. It is clear from the formulation that in addition to standard values of interpolating, higher orders of interpolating could be obtained by using enriched cover functions.

One advantage of mentioned is that it increases the interpolation accuracy only at those places where we haven't obtained the desired accuracy. In other regions, there is no need for enriched functions. It should be mentioned that determination of order, for enrichment functions is of much importance and if this order will be set to zero, no extra interpolation would take place, and standard interpolating takes place.

3. CRACK MODELING USING COVER INTERPOLATING FUNCTION METHOD

In the linear elastic fracture, the existence of crack causes displacement jump in the crack as well as singularity in stress at the tip of the crack. In this part, a cover interpolating method is proposed to solve discontinuity problems. For technical modeling of the crack tip in the cover interpolating method, enrichment functions are used as is in XFEM method [9].

In the next part, approximation in the regions containing discontinuity and regions close to crack tip are presented. A proper criterion is also introduced in an arbitrary grid to

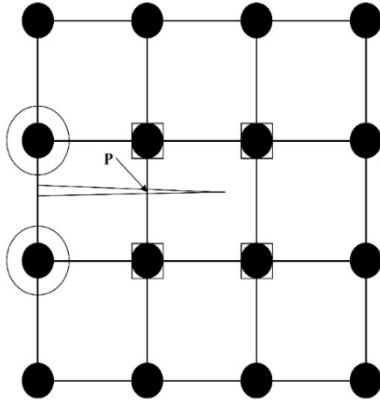


Fig. 3. Crack not aligned with a mesh, the circled nodes are enriched with the discontinuous function and the squared nodes with the tip enrichment functions. Enrichment with only the discontinuous function shortens the crack to point p

identify suitable points for enrichment, regarding the crack geometry. A brief explanation of stress coefficient computation is also discussed.

To model this discontinuity, $H(x)$, which is a jump function or discontinuity function has been used which is defined in the local coordinate system as follows:

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{for } y > 0 \\ -1 & \text{for } y < 0 \end{cases} \quad (9)$$

Where $H(x)=1$ at the upper edge of the crack and $H(x)=-1$ at the bottom of it. There is a convention in enrichment by jump function, which states enrichment is done on the points where the crack takes place. In a more general situation such as figure 3, the crack tip does not coincide with the element edge and the discontinuity may not be properly modeled by $H(x)$ function. In this situation, jump enrichment on the circle's points suffices only for modeling of discontinuity up to point p.

As an instance, for discretization in Figure 3, the following approximation is used.

$$u^h = \sum_{i \in I} u_i \phi_i + \sum_{j \in J} b_j \phi_j H(x) + \sum_{k \in K} \phi_k \left(\sum_{l=1}^4 c_k^l F_l(x) \right) \quad (10)$$

Where I is related to enrichment cover functions, J is related to a set of circular points and K is related to square points. $F_l(x)$ also is defined as follows.

$$\{F_l(r, \theta)\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \dots, \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (11)$$

Where (r, θ) are the polar coordinates for the tip of the crack. It is noteworthy that the first part of the above relation

Table 1. Results of analysis of the central crack [10]

Method	KI	Error
Reference[11]	2.7641	-
XFEM [10]	2.7096	1.9
Interpolation cover-1	2.7201	1.5
Interpolation cover-2	2.7361	1.1
Interpolation cover-3	2.7411	1.01

$\sqrt{r} \sin(\theta/2)$ is related to the discontinuity on the crack surface while the other three parts are continues. In the present paper, low degree triangular elements are used to solve the problems. Above formulation has been generalized for an arbitrary crack in the triangular grid as follows:

$$u^h = \sum_{i \in I} u_i \phi_i + \sum_{j \in J} b_j \phi_j H(x) + \sum_{k \in K_1} \phi_k \left(\sum_{l=1}^3 c_k^{l1} F_l^1(x) \right) + \sum_{k \in K_2} \phi_k \left(\sum_{l=1}^3 c_k^{l2} F_l^2(x) \right) \quad (12)$$

Where $K1$ and $K2$ are sets of points for the crack's first and second tips. The precise definition for these two sets is given in reference [10] as well as set J . Functions $F_l^1(x)$ and $F_l^2(x)$ are the same and regarding the local system, both crack tips (r_1, θ_1) and (r_2, θ_2) are defined as shown in Figure 4.

4. NUMERICAL EXAMPLES

Three problems, central crack, inclined crack, and edge crack are considered and the stress coefficient is calculated for all three cases. The comparison between the exact solution and results obtained by the presented method proves the ability of this method in solving discontinuity problems.

4.1. Examples: central, Inclined central and edge crack subjected to tensional force

Consists of a plane with central crack subjected to tensional force at the upper edge, as shown in Figure 5. Problem's parameters consist of elasticity module $E = 3 \times 10^7 \text{ psi}$, Poisson's ratio $\nu = 0.25$, exerted stress $\sigma = 1.0 \text{ psi}$, and related equations assume planar strain. The crack position is at $y = 0.0$ and the x interval $x = -2.0 - 2.0$.

The geometry of the problem consists of the region $[-5.0, 5.0] \times [-10.0, 10.0]$. In this example, interpolating cover functions could be used to increase accuracy without the need to use finer grids. These functions could be used at nodes where the necessary accuracy is not obtained. In this investigation, interpolating cover functions of degree one, two and three are used.

Belytschko et al. in [10] have analyzed this problem with two separate grids using XFEM method. The first mesh contained 402 nodes and 25 enriched points at each crack tip while the second consisted of 1606 nodes and 64 points at each tip. The exact solution for this geometry is given in [11], where a limited correcting factor $K_I = 2.7641$ has been used. Considering the fact that the method of interpolating coverage functions can increase accuracy only by adding to interpolation functions and without the need to use finer

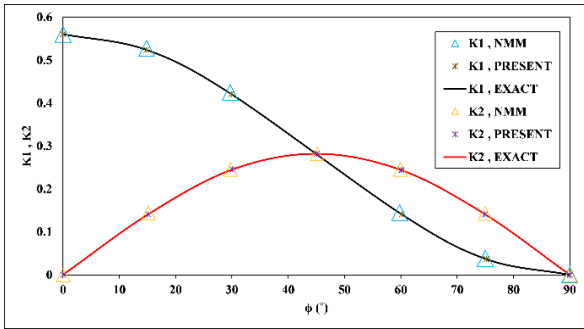


Fig. 9. KI and KII vs. β for a plate with an angled center crack

Table 2. stress intensity factors for edge crack

Methods	KI
Reference solution [11]	0.9372
XFEM Method [12]	0.954
NMM [12]	0.933
Propose method	0.938

grids, this problem is solved by 680 nodes and 16 enriched points at each tip. The results are listed in Table 1 for three cases of coverage functions of degree one, two and three where $K_I = 2.7201$ and $K_I = 2.7361$, $K_I = 2.7411$ respectively and approximation error was 1.5, 1.1 and 1.0. The comparison between the proposed method's error and that of generalized finite element's error, it is clear that the former is capable of modeling discontinuity problems with sufficient accuracy and the lower amount of calculations (fewer degrees of freedom).

5. Conclusions

To solve the discontinuity problems by finite element method, geometrical conformity is between crack and element borders is often essential. Due to limitations in grid generation, the crack is considered to be at the boundary of the grid. And thus, crack problems are not capable of being solved using a single standard mesh. Mesh generation consideration is a serious problem while modeling crack problems. The modeling process always depends on having finer mesh close the crack boundaries to cover the crack borders with elements as well as obtaining results with satisfying accuracy. But, the method of interpolating cover functions attains higher accuracy without the need to finer grid and only by increasing the degree of enrichment functions. This method is also capable of performing the analysis of discontinuity problems using a single modeling and regardless of crack and mesh considerations. This method is capable of solving the discontinuity inside the elements.

In the present paper, the method of interpolating cover functions has been used to solve the discontinuity problems such as cracks. Interpolating cover functions of degree one, two and three were used to increase the accuracy of the solution without the need to finer grids. The displacement discontinuity in the crack surface is exerted by Heaviside function. Enrichment functions such as those used in XFEM

method are taken advantage of to analyze the technical situation at the tip of crack's vicinity and to compare the proposed method and with other methods. Three standard examples are investigated, and the stress coefficient has been calculated. The results show the high ability of the proposed method in solving the crack problems. It is noteworthy that the method's predominance over other methods is judged only by comparing the degrees of freedom, due to lack of comprehensive data on other investigations.

The ability to model complex geometries is among other advantages of this method, which affects in increasing accuracy and decrease in computational costs. In the proposed method, the discontinuity simulator functions are added to interpolating cover functions so that the problem containing discontinuous field is solved. And thus, a single grid can be used to solve the problem, and there will be no need to use a finer grid to increase accuracy. A rather coarser grid is sufficient to solve the problem which leads to a decrease in degrees of freedom and thus an increase in computational costs.

The results show proper accuracy in 2-dimensional problems. In all solved problems, the coefficient of stress intensity calculated by the method was close to the exact solution and other solutions given in other references. The amount of relative error was less than a percent.

REFERENCES

- [1] Liu, WK., Jun, S., Zhang, YF. 1995. "Reproducing Kernel Particle Methods". *Int J Numer Methods Eng*; 20:1081-106.
- [2] Strouboulis, T., Copps, K., and Babuska, I., 2000. "The Generalized Finite Element Method: An Example of its Implementation and Illustration of its Performance". *Int J Numer Methods Eng*, 17-47:1401 .
- [3] Shi, GH, Goodman, RE., 1989. "Generalization of Two-Dimensional Discontinuous Deformation Analysis for Forward Modeling". *Int J Numer Anal Methods Geomech*, 80-13:359.
- [4] Ghasemzadeh, H., Ramezanzpour, M.A., and Bodaghpour, S., 2014. "Dynamic High Order Numerical Manifold Method Based on Weighted Residual Method". *International Journal for Numerical Methods in Engineering Int. J. Numer. Meth. Engng*, Published online in Wiley Online Library.
- [5] Zheng, H., Xu, D., 2014. "New strategies for some issues of numerical manifold method in simulation of crack propagation". *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 97, 986-1010.
- [6] Nicolas, M., John, D., and Belytschko, T., 1999. "A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Int. J. Numer. Meth. Engng. 46, 131-150. 6
- [7] Kim, J., Bathe, K. J., 2013. "The Finite Element Method Enriched by Interpolation Covers". *Comput Struct*, 116, pp. 35-49.
- [8] Kim, J., Bathe, K. J., 2014. "Towards a Procedure to Automatically Improve Finite Element Solutions by Interpolation Covers ". *Computers & Structures*, 131, pp. 81-97.
- [9] Zhang, H.H., Zhang, S.Q., 2010. "Numerical Analysis of 2-D Crack Propagation Problems Using the Numerical Manifold Method". *Finite Elements in Analysis and Design*, 59, 55-65.

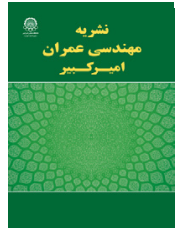
- [10] Belytschko, T., Black, T., 1999. "Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5):601, 620.
- [11] Arzani, H., Khoshbavar Rad, E., 2017. "Adaptive finite element analysis using h-refinement and interpolation cover functions". *sharif journal civil engineering*.
- [12] Mousavi, S., E., Grinspun, E., and Sukumar, N., 2010. "Harmonic Enrichment Functions: A Unified Treatment of Multiple, Intersecting and Branched Cracks in the Extended Finite Element Method". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Int. J. Numer. Meth. Engng.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

H. Arzani, E. Khoshbavar Rad, *The Analyzing of the Discontinuity Problem by Enriched Interpolation Covers*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 52(2) (2020) 93-98.

DOI: [10.22060/ceej.2019.13840.5487](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.13840.5487)





مدل سازی ترک با استفاده از توابع درون یاب غنی ساز پوشش

حامد ارزانی*، الهام خوش باورراد

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۶-۰۹-۲۵

بازنگری: ۱۳۹۷-۰۶-۳۱

پذیرش: ۱۳۹۷-۰۷-۰۷

ارائه آنلاین: ۱۳۹۷-۱۰-۱۸

کلمات کلیدی:

روش توابع درون یاب پوشش

حوزه های ناپیوسته

توابع هویساید

ترک

خلاصه: روش عددی پوشش، یک روش بر پایه افراز واحد می باشد که با استفاده از درجات متناسبی از توابع غنی سازی در نقاط دارای خطای بالا باعث افزایش دقت می گردد. در این روش توابع درون یاب غنی ساز به نقاطی که فاقد دقت کافی اند، اعمال می گردند. کارآمدی روش پوشش تا به حال برای بسیاری از مسائل مهندسی به اثبات رسیده است. ناپیوستگی جابجایی در مرز ترک توسط توابع هویساید مدل می گردد و همچنین توابعی برای مدل کردن ضریب شدت تنش نوک ترک به توابع درون یاب پوشش اضافه می گردد. در این مقاله توانمندی روش پیشنهادی با ارزیابی پارامترهای شکست برای مثال های متنوعی از ترک های ثابت مورد بررسی قرار گرفته است. صحت یابی و توانمندی روش با سه مثال عددی شامل ترک مرکزی، ترک لبه و ترک مایل مرکزی با زوایای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. مقایسه جواب های حاصل از روش پیشنهادی با جواب دقیق و روش های دیگر محققان در حوزه مسائل الاستیسیته خطی، حکایت از کارایی و دقت قابل قبول روش پیشنهادی دارد.

۱- مقدمه

خسته کننده می کند. علاوه بر آن متغیرهایی مانند جابجایی، تنش و کرنش نیاز به هماهنگ بودن با شبکه بندی جدید را دارند که این خود نیز باعث بالاتر رفتن هزینه محاسباتی در این زمینه می گردد. روش هایی برای غلبه بر مشکلات مذکور در مراجع [۳ و ۴] آمده است. روش بدون شبکه یک جایگزین مناسب برای غلبه بر برخی از محدودیت های روش های متکی بر شبکه می باشد. این روش صرفاً به تعریف هندسه مسئله و مجموعه ای از نقاط نیاز داشته و نیازی به شبکه بندی مجدد نمی باشد. روش های بدون شبکه متداول و معروفی توسط پژوهشگران مختلف برای حل مسائل مهندسی ارائه گردیده اند، که از آن جمله روش بازسازی ذرات کرنل^۱ [۵]، روش محلی پتریو گلرکین^۲ [۶]، روش المان آزاد گلرکین^۳ [۷] و روش

مدل سازی ترک یک مسئله مهم در پیش بینی عمر مفید سازه های مهندسی بوده و در دهه های گذشته بسیار مورد توجه محققان قرار گرفته است. شبیه سازی های بسیاری به روش المان محدود همراه با مش بندی مجدد و همچنین روش بدون شبکه برای مدل سازی رشد ترک و یا گسترش آن انجام گردیده است [۱ و ۲] در روش المان محدود معمولاً از المان های تکینگی نوک ترک استفاده می شود. در این روش نیاز به انطباق ترک با شبکه بندی اجزا محدود بوده که اغلب به محدودیت فرآیند شبکه بندی منجر م گردد. همچنین نیاز به ریز شدن المان ها در مرز ترک افزایش بار محاسباتی را در پی دارد. به علاوه زمانی که رشد ترک نیز وارد محاسبات می گردد نیاز به مش بندی مجدد در این روش ها، شبیه سازی را وقت گیر و

1 Kernel Particle Methods

2 Meshless Local Petrov-Galerkin

3 Element Free Galerkin Methods

* نویسنده عهده دار مکاتبات: h.arzani@sru.ac.ir



درون‌یاب پوشش، الهام گرفته از روش منیفلد را معرفی نمودند. ایشان به منظور بالا بردن نرخ همگرایی در روش پیشنهادی خود از شبکه بندی حوزه مسئله با المان‌های محدود مرتبه پایین استفاده کرده‌اند. مبنای این روش استفاده از اجزا محدود غنی شده بوسیله توابع پوشش درون‌یاب بر روی هر المان می‌باشد. این روش قابلیت استفاده برای المان‌های اعوجاجی را نیز دارا بوده و رویکرد اصلی روش بالا بردن دقت بدون افزایش بی‌رویه در تعداد درجات آزادی همانند روال معمول در اجزاء محدود می‌باشد [۲۰ و ۲۱].

در روش ارائه شده توسط بته و همکارانش، علی‌رغم دست‌یابی به نتایج با دقت کافی، استفاده از توابع درون‌یاب با معایبی همراه بوده که از جمله آن می‌توان به اعمال مرتبه توابع به صورت دستی، عدم به‌کارگیری معیار خطای مناسب، بالا بودن درجات آزادی و مشابه این موارد را نام برد. در اقدام بعدی این پژوهشگران، تلاش‌هایی برای رفع این مشکلات ارائه گردید، اما اصلاحات صورت گرفته نیز دارای معایبی برای به‌کارگیری روش در بسیاری از مسائل حوزه الاستیسیته بوده‌است. به‌عنوان نمونه، برای حل مسائل از همان ابتدا نیاز به شبکه تقریباً متراکمی بوده تا بوسیله آن از افزایش بی‌رویه مرتبه توابع درون‌یاب جلوگیری گردد. مورد بسیار مهم دیگر، عدم ارائه فرمولاسیون جامع برای همه مسائل بوده که بوسیله آن بتوان از مرتبه مناسب برای توابع درون‌یاب استفاده نمود.

نویسندگان این مقاله بعد از بررسی مزایا و معایب روش استفاده از توابع درون‌یاب، راهکاری برای حل مسائل حوزه الاستیسیته به صورت خودکار که دارای معیار بیان خطای استاندارد برای گزینش المان‌ها و فارغ از پیچیدگی‌های محاسبات مربوط به المان‌های چهارضلعی است را ارائه نمودند. در این تحقیق این روش برای حل مسائل ناپیوسته بسط داده شده و از مزایای آن برای بهبود نتایج استفاده شده‌است.

در بخش دوم این مقاله معادلات حاکم و نحوه تحلیل حوزه‌های ناپیوسته ارائه شده‌است. بخش سوم به معرفی روش اجزا محدود غنی‌شده با توابع درون‌یاب پوشش می‌پردازد. در بخش چهارم نحوه مدل‌سازی ناپیوستگی توسط روش درون‌یاب پوشش ارائه گردیده و در بخش پنجم مثال‌هایی در حوزه مسائل ناپیوستگی مورد بررسی قرار گرفته‌است. در نهایت مقایسه‌ای بین نتایج روش پیشنهادی و روش سایر پژوهشگران ارائه گردیده‌است.

کمینه مربعات گسسته^۱ [۸] را می‌توان نام برد. ارزانی و همکارانش از روش کمینه مربعات گسسته به‌منظور مدل‌سازی ترک و فرآیند تظریف استفاده نموده‌اند [۸ و ۹].

روش المان آزاد گلرکین علیرغم دقت بالا در حل مسائل ترک، برای مسائل رشد ترک نیاز به افزودن نقاط در محدوده ترک دارد [۱۰]. علاوه بر آن روش بدون شبکه مشکلات زیادی در انتگرال‌گیری عددی و توصیف مرزهای مسئله دارد.

در سال‌های اخیر، اصلاحاتی بر روی روش اجزاء محدود، به‌منظور غلبه بر مشکلات مذکور در مدل‌سازی ترک در چارچوب روش افراز واحد^۲ (PUM) انجام گردیده‌است [۱۱]. به‌عنوان مثال می‌توان روش المان محدود توسعه‌یافته^۳ (XFEM) را نام برد [۱۲]. هم‌چنین به‌عنوان روش دیگر می‌توان به روش المان محدود تعمیم یافته^۴ (GFEM) اشاره نمود [۱۳ و ۱۴]. شبکه بندی در روش GFEM کلاً مستقل از دامنه مسئله بوده و در نتیجه شبکه بندی می‌تواند منظم باشد. روش GFEM به‌صورت ترم‌های مرتبه بالاتر یا توابع راهنما^۵ به اجزا محدود افزوده می‌شود تا مسائلی مانند حفره، گوشه و ترک‌ها را تحلیل نماید.

روش عددی منیفلد^۶ (NMM)، در ابتدا توسط شی^۷ معرفی گردید که روشی بر پایه ترکیب المان محدود و آنالیز تغییرشکل‌های ناپیوسته (DDA)^۸ است [۱۵]. این روش یکی از راهکارهای موثر در راستای افزایش دقت نتایج المان محدود می‌باشد. در واقع شی و همکاران، روش عددی منیفلد را برای تحلیل تغییرشکل‌های ناپیوسته ارائه نمودند که یک تکنیک موثر عددی، برای حل مسائل در حوزه مکانیک جامدات بوده و در سال‌های اخیر مورد توجه بسیار پژوهشگران قرار گرفته‌است [۱۶]. در ادامه ژنگ^۹ از این روش برای تحلیل انواع متنوعی از مسائل ترک اعم از انتشار ترک [۱۷]، ترک چسبنده [۱۸]، ترک شاخه‌ای [۱۹] استفاده نمود.

در سال ۲۰۱۴ بته و همکارانش روش غنی‌سازی بوسیله توابع

- 1 Least Squares Meshless Method
- 2 Partition of Unity Method
- 3 Extended Finite Element Method
- 4 Generalized Finite Element Method
- 5 Handbook
- 6 Numerical Manifold Method
- 7 Shi
- 8 Discontinuous Deformation Analysis
- 9 Zhang

۲- معادله حاکم

با فرض جابجایی کوچک در مسائل الاستوستاتیک، می توان معادله حاکم را به صورت زیر نوشت.

$$\nabla \cdot \sigma + b = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

که در آن

$$\sigma = C : \varepsilon, \quad \varepsilon = \nabla_s u \quad (2)$$

در معادله فوق، $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ هندسه مسئله، σ تانسور تنش، ε تانسور کرنش های کوچک، b نیروی حجمی، C تانسور مدول ماده، u جابجایی، ∇ عملگر گرادیان، و ∇_s عملگر گرادیان متقارن بوده و شرایط مرزی بصورت زیر می باشند.

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_u, \quad (3)$$

$$n \cdot \sigma = \bar{t} \quad \text{on } \Gamma_t, \quad (4)$$

که در آن $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ مرز Ω و n و \bar{u} به ترتیب بردار نرمال واحد، جابجایی و نیروی سطحی می باشند. همچنین سطح ترک فاقد نیرو در نظر گرفته می شود [۲۲].

۳- غنی سازی به روش توابع درون یاب پوشش

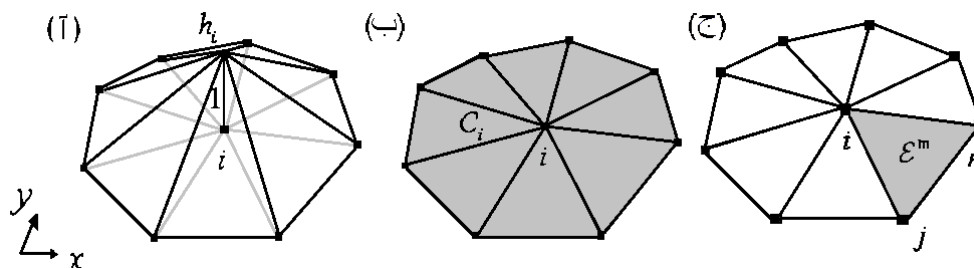
در این قسمت فرمولاسیون اجزا محدود غنی شده با استفاده از توابع درون یاب پوشش برای المان های مرتبه پایین اجزا محدود آورده شده است. چنانچه برای گسسته سازی یک حوزه از شبکه بندی با المان های استاندارد استفاده گردد، دقت پاسخ ها به نوع و ابعاد المان وابسته است. در روش غنی سازی به روش توابع درون یاب،

برای هر گره یک زیر حوزه پوششی در نظر گرفته می شود و هر زیر حوزه دارای یک تابع درون یاب با مرتبه مشخص می باشد. در این زیر حوزه ها از توابع مرتبه بالاتر نسبت به حالت استاندارد استفاده شده و لذا نتایج حل از دقت بالاتری برخوردار خواهد بود. در شکل ۱(آ) تابع h_i یک درون یاب خطی برای گره i می باشد که مقدار آن در گره i برابر ۱ و در سایر نقاط وابسته به این گره برابر صفر می باشد و المان های متصل به گره i زیر حوزه این گره محسوب می شوند. استفاده از توابع خطی برای درون یابی زیر حوزه ها، تقریب های با حجم کم محاسباتی و سرعت بالا را به دنبال خواهد داشت. ناحیه ای که برای گره i توسط تابع خطی h_i مورد درون یابی قرار می گیرد، ناحیه پوشش گره i نامیده شده و با C_i نمایش داده می شود شکل ۱(ب). ناحیه پوششی المان مثلثی m با ۳ گره i و j و k ، همانند شکل ۱(ج)، برابر با نواحی مشترک بین پوشش های C_i ، C_j و C_k است. بته و کیم [۲۰] یکی از معضلات استفاده از این روش برای المان های چهارضلعی را مشکل تکینگی اعلام نموده اند.

بعد از تعیین ناحیه پوشش گره ها، نوبت به درون یابی ناحیه های پوششی خواهد رسید. درون یابی با استفاده از چند جمله هایی با مرتبه p صورت می گیرد. مقدار درون یابی شده مجهول u در گره i با توجه به ناحیه پوششی این گره در رابطه ۵ نمایش داده شده است.

$$P_i^p[u] = u_i + [\bar{x}_i \ \bar{y}_i \ \bar{x}_i^2 \ \bar{x}_i \bar{y}_i \ \bar{y}_i^2 \ \dots \ \bar{y}_i^p] a_i \quad (5)$$

در رابطه بالا متغیرهای (\bar{x}_i, \bar{y}_i) بیانگر فاصله از گره i و بردار a_i نشان دهنده درجات آزادی اضافی مرتبط با گره i در ناحیه پوششی C_i می باشد. با توجه به توضیحات ارائه شده تقریب غنی سازی



شکل ۱. توصیف نحوه ارتباط زیر حوزه های غنی شده با استفاده از توابع درون یاب پوشش

(آ) تابع شکل خطی متداول. (ب) ناحیه پوشش یا المان های تحت تاثیر توابع درون یاب پوشش. (ج) یک المان غنی شده [۲۰]

Fig. 1. Description of sub-domains for enriched cover interpolations: (a) usual linear nodal shape function, (b) cover region or elements affected by the interpolation cover, and (c) an element.

غنی سازی استفاده می نماید، که این باعث بالابردن دقت، بدون نیاز به ریزتر کردن شبکه بندی حوزه مسئله می شود. توابعی برای مدل کردن ناپیوستگی معرفی شده و به روش غنی ساز پوشش افزوده می گردند، در نتیجه این روش قادر به تحلیل مسائل ناپیوستگی خواهد گردید. برای مدل کردن تکینگی نوک ترک در روش درون یاب پوشش همانند روش اجزاء محدود توسعه ای XFEM از توابع غنی سازی استفاده می گردد [۲۳].

در ادامه، مدل تقریب در نواحی دارای ناپیوستگی و نیز تقریب در نواحی نزدیک به نوک ترک ارائه می گردد. هم چنین معیار مناسب برای انتخاب نقاط غنی سازی در یک شبکه بندی دلخواه و با توجه هندسه ترک معرفی می گردد. علاوه بر این خلاصه ای در مورد نحوه محاسبه ضریب شدت تنش ارائه می گردد.

۴-۱- مدل سازی ترک

به منظور مدل سازی ترک در روش درون یاب پوشش ابتدا توابع مدل کننده ناپیوستگی معرفی گردیده و در نهایت نحوه افزوده شدن این توابع به روش درون یاب پوشش تشریح خواهد گردید. همان طور که پیشتر گفته شد، وجود ترک باعث ایجاد پرش جابجایی در سطح ترک می گردد. برای مدل کردن این ناپیوستگی از $H(x)$ که تابع پرش یا تابع ناپیوستگی بوده استفاده شده و در سیستم مختصات محلی بصورت زیر توصیف می گردد.

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{for } y > 0 \\ -1 & \text{for } y < 0 \end{cases} \quad (9)$$

که $H(x) = 1$ در لبه بالایی و $H(x) = -1$ در لبه پایینی ترک می باشد. اشکال ۲ و ۳ قرارداد موجود در غنی سازی بوسیله تابع پرش را برای نقاط نیازمند به فرآیند غنی سازی نشان می دهند. شکل ۲ این قرارداد را هنگامی که ترک منطبق بر لبه المان نمی باشد، نشان می دهد که نقاط با دایره دور آن توسط تابع پرش غنی سازی می شوند.

در یک حالت کلی تر مانند شکل ۳، نوک ترک روی لبه المان قرار ندارد که در این حالت ناپیوستگی نمی تواند به صورت مناسب توسط توابع $H(x)$ مدل سازی گردد. در این حالت غنی سازی پرش در نقاط با دایره دور آن صرفاً برای مدل کردن ناپیوستگی تا نقطه p کافی می باشند. نقاط مربعی با توابع غنی سازی نوک ترک که توسط

پوششی مربوط به متغیر میدانی u برای یک المان به صورت رابطه ۶ بیان می شود.

$$u = \sum_{m=1}^3 h_m u_m + H_i a_i \quad (6)$$

که در آن

$$H_i = h_i \left[\bar{x}_i \quad \bar{y}_i \quad \bar{x}_i^2 \quad \bar{x}_i \bar{y}_i \quad \bar{y}_i^2 \quad \dots \quad \bar{y}_i^p \right] \quad (7)$$

با جمع مقادیر رابطه ۷ برای گره های موجود در یک المان و ادغام روابط ۶ و ۷، رابطه ۸ بصورت زیر بازنویسی می گردد.

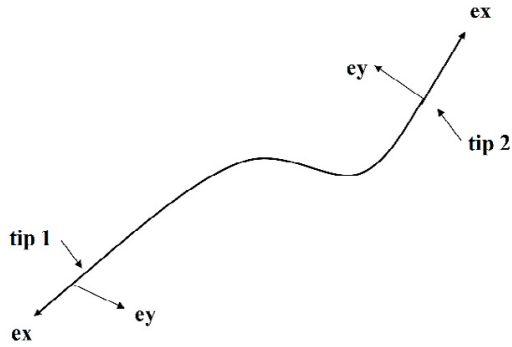
$$u = \sum_{m=1}^3 h_m P_m^p \quad (8)$$

به این ترتیب به جای استفاده از روش درون یاب استاندارد، از درون یابی مرتبه بالاتر بوسیله ی تابع چند جمله ای $h_i P_i^p$ استفاده شده است، که در آن P_i^p شامل ترم های متداول متغیر میدانی u_i به اضافه درجات آزادی مربوط به توابع پوشش می باشد. از فرمول بندی به وضوح مشهود است که علاوه بر مقادیر درون یابی استاندارد می توان با داشتن تابع غنی ساز پوشش به مراتب بالاتر درون یابی دست یافت.

یکی از مزایای اصلی روش مذکور این است که صرفاً در بخش هایی از حوزه حل مسئله که دقت مورد نظر تامین نگردیده به افزایش مرتبه تابع پوشش پرداخته و در نواحی که دقت مورد نیاز تامین می گردد، نیازی به استفاده از تابع غنی ساز نمی باشد. لازم به ذکر است که تعیین مرتبه تابع غنی ساز از اهمیت بالایی برخوردار است و اگر این مرتبه برابر صفر در نظر گرفته شود هیچ درون یابی اضافی صورت نگرفته و همان نتایج درون یابی استاندارد مطابق تقریب مورد استفاده در روش اجزاء محدود به دست خواهد آمد. فرآیندهای روش مذکور بطور کامل در مقاله بته [۲۰] بیان گردیده است.

۴- مدل سازی ترک بوسیله روش عددی توابع درون یاب پوشش

در مدل الاستیک خطی شکست، وجود ترک باعث ایجاد پرش جابجایی در سطح ترک و تکینگی تنش در نوک ترک می شود. در این قسمت روش درون یاب پوشش برای مدل سازی حوزه و حل مسائل ناپیوسته توسعه داده شده است. همان طور که بیان گردید روش غنی ساز پوشش برای افزایش دقت در حوزه مسئله از ترم های



شکل ۴. محور محلی برای مختصات قطبی دو نوک ترک
 Fig. 4. local axis for the polar coordinates of the two crack tips

$$\{F_i(r, \theta)\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (11)$$

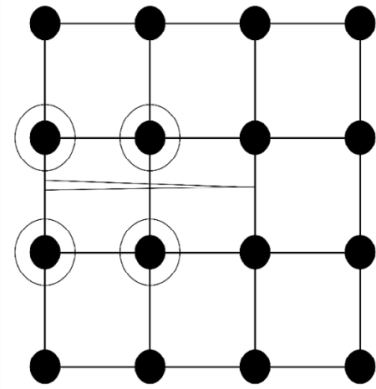
که در آن (r, θ) مختصات قطبی نوک ترک می باشند. قابل ذکر است، اولین قسمت فرمول فوق $\sqrt{r} \sin(\theta/2)$ ، مربوط به ناپیوستگی در سطح ترک بوده در حالی که سه قسمت دیگر پیوسته می باشند. در مقاله حاضر برای حل مسائل از المان‌های مثلثی مرتبه پایین اجزا محدود استفاده شده است. از این رو فرمولاسیون فوق برای ترک دلخواه در شبکه بندی با المان‌های مثلثی بصورت زیر تعمیم داده می شود.

$$u^h = \sum_{i \in I} u_i \phi_i + \sum_{j \in J} b_j \phi_j H(x) + \sum_{k \in K_1} \phi_k \left(\sum_{l=1}^3 c_k^{l1} F_l^1(x) \right) + \sum_{k \in K_2} \phi_k \left(\sum_{l=1}^3 c_k^{l2} F_l^2(x) \right) \quad (12)$$

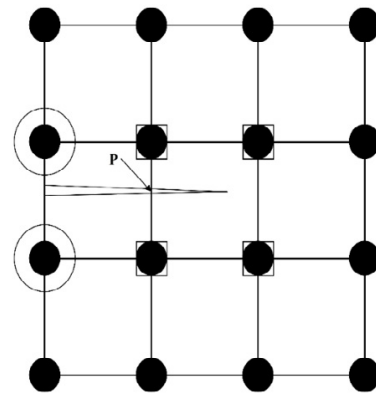
که در آن K_1 و K_2 مجموعه ای از نقاط برای نوک اول و دوم ترک می باشند. تعریف دقیق این دو مجموعه و همچنین مجموعه J در مرجع [۲۵] آورده شده است. توابع $F_l^1(x)$ و $F_l^2(x)$ یکسان بوده و با توجه به سیستم محلی هر دو نوک ترک (r_1, θ_1) و (r_2, θ_2) بصورت شکل ۴ تعریف می گردند.

۴-۲- الگوریتم روش پیشنهادی

در این قسمت نحوه عملکرد روش پیشنهادی ارائه شده است. ابتدا حوزه مسئله و تمامی مشخصات هندسی آن اعم از مرزها و



شکل ۲. عدم انطباق ترک و شبکه بندی، غنی سازی نقاط دایره بوسیله تابع ناپیوستگی غنی سازی
 Fig. 2. Crack not aligned with a mesh, the circled nodes are enriched with the cover function



شکل ۳. عدم انطباق ترک با شبکه بندی غنی سازی، نقاط دایره با تابع ناپیوستگی و نقاط مربعی با توابع غنی سازی نوک ترک جهت مدل سازی یکپارچه ناپیوستگی کل ترک
 Fig. 3. Crack not aligned with a mesh, the circled nodes are enriched with the discontinuous function and the squared nodes with the tip enrichment functions

بلچیکو و بلک پیشنهاد گردیده غنی سازی می گردند [۲۵].

برای گسسته سازی نشان داده شده در شکل ۳، از تقریب به فرم زیر استفاده می گردد.

$$u^h = \sum_{i \in I} u_i \phi_i + \sum_{j \in J} b_j \phi_j H(x) + \sum_{k \in K} \phi_k \left(\sum_{l=1}^4 c_k^l F_l(x) \right) \quad (10)$$

که در آن I مربوط به توابع پوشش غنی ساز، J مجموعه نقاط دایره ای و K مجموعه نقاط مربعی می باشد. همچنین تابع $F_l(x)$ بصورت زیر تعریف می گردد.

در این تحقیق از مزایای این روش در حل مسائل دارای ناپیوستگی استفاده شده است لذا با توجه به سوابق اشاره شده می توان در جرات تابع را با توجه به میزان خطای حاصل از تحلیل اولیه به هر المان اختصاص داد. بدین معنی که تحلیل اولیه با یک شبکه بندی نسبتا درشت و به روش عادی انجام شده و میزان خطای حاصل از تحلیل محاسبه گردد، در گام بعدی به جای افزایش تراکم شبکه بندی و ریزتر کردن بی رویه المان ها (که حجم بالای محاسبات را در پی خواهد داشت) جهت افزایش دقت، می توان از توابع غنی ساز پوشش استفاده نمود. در نواحی با خطای بیشتر، از تابع پوشش درجه بالاتر استفاده خواهد گردید. نویسندگان مقاله در پژوهش های پیشین خود از این روش برای تحلیل مسائل بدون ناپیوستگی استفاده نموده و نتایج قابل قبولی را به دست آوردند [۲۴]. در این مقاله برای اولین بار این روش برای حل مسائل دارای ناپیوستگی استفاده شده و در المان های درگیر با ترک از توابع غنی ساز مناسب که قادر به مدل سازی ناپیوستگی می باشند، استفاده شده است.

۵- مثال های عددی

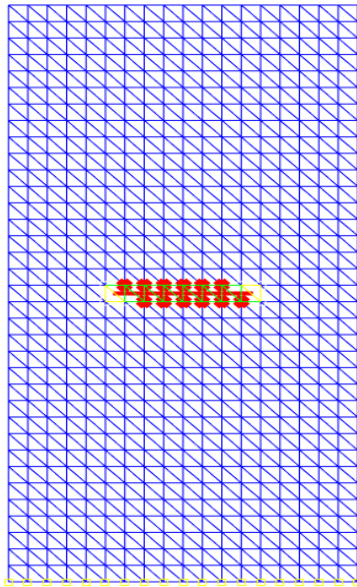
به منظور صحت یابی روش پیشنهادی در این بخش از مقاله چندین مسئله استاندارد در حوزه مسائل ترک مدل سازی شده است. سه مسئله ترک مرکزی، مورب و لبه تحلیل و ضریب شدت تنش برای هر یک از مسائل محاسبه شده است. تمامی مسائل در حالت کرنش مسطح می باشند. مقایسه حل دقیق و نتایج حاصل از روش پیشنهادی، حکایت از توانمندی قوی و مناسب بودن آن در حل مسائل حوزه های ناپیوسته دارد.

۵-۱- مثال ترک مرکزی تحت نیروی کششی

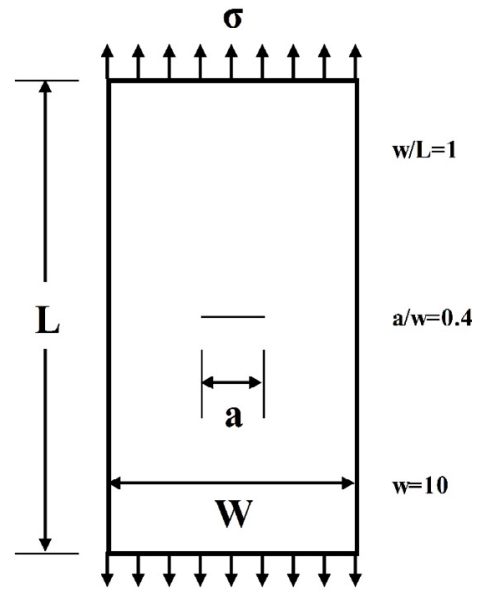
مثال اول شامل یک صفحه با ترک مرکزی تحت نیروی کششی در وجه بالایی و پایینی همانند شکل ۵ می باشد. پارامترهای مکانیکی حوزه حل مسئله شامل مدول الاستیسیته $E = 3 \times 10^7 \text{ psi}$ ، نسبت پواسون $\nu = 0.25$ ، تنش اعمالی $\sigma = 1.0 \text{ psi}$ و معادلات مربوطه از نوع کرنش مسطح است. موقعیت ترک در $y = 0.0$ از $x = -2.0, +2.0$ بوده و مشخصات کامل مسئله در شکل ۵ نمایش داده شده است.

هندسه مسئله $[-10.0, 10.0] \times [-5.0, 5.0]$ می باشد. در این

حوزه های داخلی معرفی می گردد. در گام بعدی با توجه به هندسه مسئله شبکه بندی پیشنهادی ایجاد می گردد. این شبکه بندی شامل مشخصات کامل تمامی المان ها و موقعیت تمامی گره ها می باشد. سپس هندسه ترک به مسئله اعمال و تعریف می گردد. در گام بعدی موقعیت تمام المان ها با توجه به موقعیت ناپیوستگی تقسیم بندی می گردد. برای این منظور از الگوریتمی استفاده شده که قادر است با توجه به هندسه ترک، المان ها را به سه گروه، المان نوک ترک، المان لبه ترک و المان های فاقد ترک دسته بندی نماید. یعنی برنامه با توجه به مختصات گره ها و بررسی هندسه ترک این دسته بندی را انجام می دهد. همان طور که قبلا در مورد روش توابع درون یاب پوشش مطرح شد این روش قادر است در تک تک گره ها از توابع غنی سازی با درجات متفاوت استفاده کند. پس از دسته بندی المان ها در مرحله بعدی توابع تقریب غنی سازی با توجه به نوع المان به تابع تقریب اولیه افزوده می گردد. یعنی برای المانی که فاقد ناپیوستگی بوده صرفا توابع پوشش درون یاب به توابع تقریب افزوده می گردد. برای المان هایی که توسط ترک قطع گردیده از توابع هوساید جهت مدل سازی ناپیوستگی استفاده می شود و برای المان هایی که شامل نوک ترک هستند جهت مدل سازی تکینگی نوک ترک از توابع قطبی طبق رابطه ۱۱ استفاده می گردد. در نهایت پس از اعمال توابع غنی ساز مربوط به هر گره (با توجه به مختصات ترک)، ماتریس سختی تمامی المان ها محاسبه می گردد و با اسمبل کردن ماتریس های سختی و بردار سمت راست، ماتریس سختی کل و بردار سمت راست کل حاصل می گردد. پس از اعمال شرایط تکیه گاهی (مرزها) طبق فرضیات مسئله مورد بررسی، مسئله تحلیل شده و نتایج حاصل ارائه می گردد. همان طور که در مقاله ذکر شده است، در گام نخست مقدار تابع پوشش غنی ساز برابر یک در نظر گرفته می شود. یعنی به تمامی گره ها به جز گره هایی که به هندسه ترک مربوط می باشند تابع درون یاب پوشش مرتبه یک اختصاص داده می شود. در مرحله دوم تحلیل، جهت افزایش دقت (بدون نیاز به ریز کردن شبکه مش بندی) از تابع غنی سازی پوشش مرتبه بالاتر استفاده گردیده، و مسئله یکبار با استفاده توابع غنی ساز پوشش درجه دو و بار دیگر با توابع غنی ساز پوشش درجه سه تحلیل می گردد. بدیهی است با توجه به قابلیت های روش مذکور، بدون نیاز به ریز کردن شبکه بندی و صرفا با افزایش درجه تابع غنی سازی دقت تحلیل افزایش یابد.



شکل ۶. شبکه‌بندی مسئله ترک مرکزی
Fig. 6. Meshes for central crack



شکل ۵. مسئله ترک مرکزی
Fig. 5. Central Crack problem

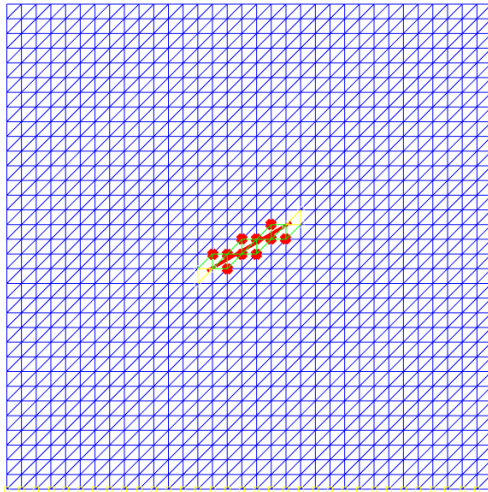
جدول ۱. نتایج تحلیل مسئله ترک مرکزی [۲۵]
Table 1. the result of the central crack problem

روش مورد استفاده	K_I (Mpa.m ^{0.5})	خطا%
حل مرجع [۲۶]	۲/۷۶۴۱	-
روش XFEM [25]	۲/۷۰۹۶	٪۱/۹
روش Interpolation cover-1	۲/۷۲۰۱	٪۱/۵
روش Interpolation cover-2	۲/۷۳۶۱	٪۱/۱
روش Interpolation cover-3	۲/۷۴۱۱	٪۱/۰۱

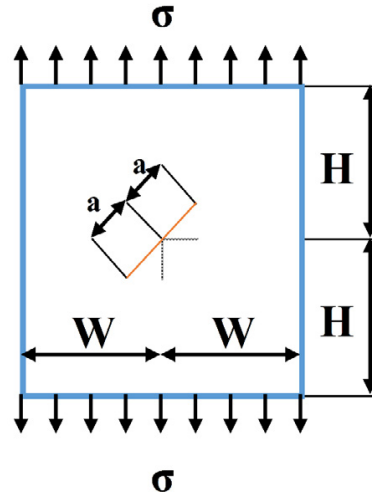
شامل ۱۶۰۶ گره با ۶۴ گره غنی سازی در هر نوک ترک می‌باشند. حل دقیق با استفاده از یک ضریب تصحیح هندسه محدود برابر $(K_I = 2.7641 \text{ MPa}\sqrt{m})$ بیان شده است [۲۶]. با توجه به اینکه روش توابع درون‌یاب پوشش می‌تواند بدون نیاز به ریز کردن شبکه بندی و صرفاً با افزودن توابع درون‌یاب پوشش در نقاطی که به دقت کافی نرسیده‌اند، دقت مورد نیاز را تامین نماید. لذا حوزه حل مسئله با شبکه ای شامل ۶۸۰ گره با ۱۶ نقطه غنی سازی در هر نوک ترک، با روش پیشنهادی تحلیل گردیده و نتایج برای سه حالت توابع پوشش درجه اول، دوم و سوم به ترتیب $K_I = 2.7201$ ، $K_I = 2.7411$ ، $K_I = 2.7361$ ارائه شده که میزان خطای تقریب آن به ترتیب برابر ۱/۵۵، ۱/۱، ۱/۱۰ و ۱/۱۰ درصد مطابق جدول ۱ می‌باشد. از مقایسه میزان خطای روش پیشنهادی و روش اجزاء محدود توسعه

مثال به منظور افزایش دقت، بدون نیاز به ریز کردن شبکه بندی می‌توان با استفاده از توابع درون‌یاب پوشش دقت مورد نیاز حوزه مسئله را تامین نمود. در واقع در نقاطی که دقت مطلوب تامین نگردیده، می‌توان از توابع درون‌یاب پوشش متناسب با میزان دقت مورد نیاز بهره برد. در این تحقیق از توابع درون‌یاب پوشش درجه اول، دوم و سوم استفاده شده است. توابع مدل‌سازی ترک در المان‌های حاوی نوک و دامنه ترک جهت نشان دادن ناپیوستگی استفاده شده تا بتوان بدون توجه به هندسه ترک، شبیه‌سازی مسائل ناپیوستگی را انجام داد.

بلچیکو و همکارانش در مرجع [۲۵] این مسئله را با دو نوع شبکه‌بندی به روش XFEM تحلیل نموده‌اند. شبکه اول شامل ۴۰۲ گره با ۲۵ نقطه غنی سازی در هر نوک ترک و شبکه دوم



شکل ۸. شبکه‌بندی منظم بدون توجه به هندسه ترک
Fig. 8. Regular meshing regardless of crack geometry



شکل ۷. مسئله ترک مرکزی مایل هندسه ترک
Fig. 7 . An infinite plate with an inclined central crack under tension.

جدول ۲. نتایج تحلیل مسئله ترک لبه
Table 2 . the result of the edge crack problem

روش	KI
حل مرجع [۲۵]	۰/۹۳۷۲
روش XFEM [۲۹]	۰/۹۵۴
روش عددی منیفلد [۲۹]	۰/۹۳۳
روش پیشنهادی	۰/۹۳۸

یکنواخت $\sigma = 1.0$ بر صفحه اعمال می‌گردد. از آنجایی که طول ترک در مقایسه با ابعاد صفحه کوچک می‌باشد نتایج فرمول‌های فوق می‌تواند به‌عنوان جواب صحیح در نظر گرفته‌شود.

برای محاسبات انجام شده زاویه ترک مایل 30° درجه در نظر گرفته شده و به ترتیب سه تابع پوشش درون‌یاب مرتبه اول و دوم و سوم بروی دامنه مسئله اعمال گردیده‌است. در گام بعدی ضریب شدت تنش با زوایای $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ محاسبه شده و نتایج حاصل در شکل ۹ نمایش داده شده‌است. همانطور که در شکل ۹ مشخص است نتایج حاصل از روش پیشنهادی با حل دقیق و روش المان‌های لانه زنبوری منیفلد^۱ تطابق کامل دارد [۲۸].

در مرجع [۲۸] از 3560 المان در حالت $\beta = 0$ و از 3562 المان برای حالت $\beta = 75^\circ$ استفاده شده‌است، و همانطور که در شکل ۹

داده‌شده مطابق جدول ۱ مشخص است روش پیشنهادی قادر به مدل‌سازی مسائل ناپیوستگی با دقت مناسب و حجم محاسباتی کمتر (تعداد درجات آزادی کمتر) می‌باشد.

۵-۲- مثال ترک مرکزی مایل در یک صفحه نامحدود تحت نیروی کششی

این مسئله شامل یک صفحه نامحدود با یک ترک مرکزی مایل تحت نیروی کششی همانند شکل ۷ قرار دارد. جواب دقیق این مسئله در مرجع [۲۷] بصورت زیر بیان گردیده‌است که در آن زاویه ترک از سطح افق می‌باشد.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \varphi, \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin \varphi \cos \varphi \quad (13)$$

برای مدل کردن ترک در این مثال، طول و عرض صفحه واحد در نظر گرفته شده‌است. نصف طول ترک $a = 0.1$ بوده و تنش

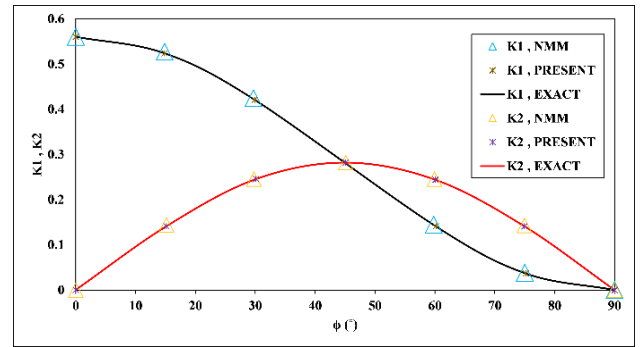
ایزوتروپ می باشد. مدول یانگ $E = 1$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ می باشد. ضریب شدت تنش با توجه به جواب دقیق مسئله بصورت $K_I = 9.372$ می باشد. در مرجع [۲۹] ضریب شدت تنش برای مود اول با استفاده از روش X-FEM محاسبه گردیده و نتایج مطابق جدول زیر ارائه گردیده است. هم چنین مسئله مذکور با روش پیشنهادی تحلیل گردیده که در آن تمام المانها با توابع پوشش درون یاب درجه ۱ تا ۳ غنی سازی شده اند.

مقایسه بین ضریب شدت تنش نرمال شده برای مود اول با استفاده از روش X-FEM و روش عددی پیشنهادی و جواب دقیق در جدول ۲ نشان داده شده است. همان طور که مشخص است نتایج از دقت بسیار بالایی برخوردار می باشند [۲۹].

۶- نتیجه گیری

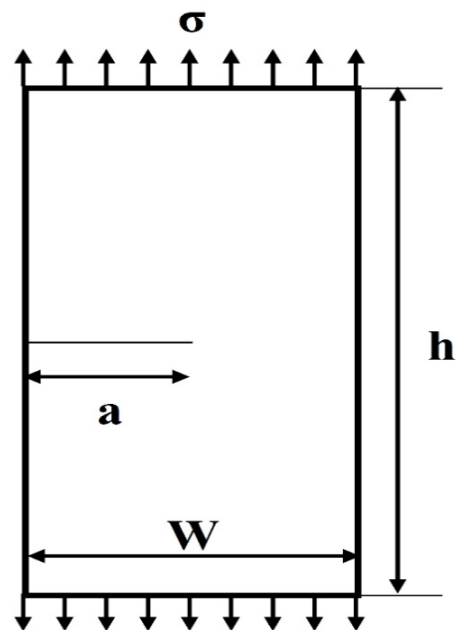
در روش اجزا محدود برای حل مسائل با ناپیوستگی در حوزه، اغلب نیاز به انطباق هندسی مرز المان و ترک می باشد. در نتیجه، به دلیل محدودیت های شبکه بندی ناپیوستگی در مزر شبکه بندی لحاظ می گردد، بنابراین مسائل ترک با یک شبکه بندی استاندارد قابل تحلیل نبوده و برای مدل سازی ناپیوستگی همواره ملاحظات شبکه بندی با توجه به هندسه ترک به عنوان معضل اساسی مطرح می باشد. فرآیند مدل سازی همواره نیازمند به ریز کردن شبکه بندی در مرز ترک، برای پوشش کامل مرز ترک توسط المانها و افزایش دقت است. هم چنین گاهی برای بالا بردن دقت تحلیل، کل حوزه مسئله نیاز به تعریف دارد. در روش توابع درون یاب پوشش، بدون نیاز به ریز کردن شبکه بندی و صرفا با افزایش درجه توابع غنی ساز پوشش می توان دقت تحلیل را افزایش داد. هم چنین این روش بدون توجه به هندسه ترک و ملاحظات شبکه بندی، قادر به استفاده از یک مش بندی منظم برای حل مسائل ناپیوستگی می باشد. در واقع این روش قادر است ناپیوستگی در داخل المان را مدل سازی نماید.

در مقاله حاضر، از روش توابع غنی ساز پوشش برای حل مسائل ناپیوستگی مانند ترک استفاده شده است. توابع غنی ساز پوشش مرتبه اول، دوم و سوم به منظور افزایش دقت حل در حوزه مسئله، بدون نیاز به ریز کردن شبکه بندی بکار گرفته شده است. ناپیوستگی مربوط به جابجایی در سطح ترک با استفاده از توابع هویساید اعمال می گردد. به منظور بررسی وضعیت تکینگی در اطراف نوک ترک و نیز مقایسه



شکل ۹. محاسبه ضریب شدت تنش برای زوایای مختلف ϕ

Fig. 9. Computed SIFs for different inclined angle ϕ



شکل ۱۰. مسئله ترک لبه [۲۸]

Fig. 10. The geometry of the edge crack problem

مشاهده می گردد، نتایج حاصل با جواب دقیق مطابقت دارد. در روش پیشنهادی این مقاله مسئله با ۲۱۷۸ المان تحلیل گردیده و نتایج حاصل هم خوانی مناسبی با هر دو روش مرجع [۲۵] و حل دقیق دارند.

۵. ۳. مثال ترک لبه

یک صفحه با ترک لبه و تحت اثر نیروی کششی در دو انتها را طبق شکل ۱۰ در نظر بگیرید. هندسه صفحه و ترک در شکل ۱۰ با مشخصات $w = 7$, $h = 16$, $a/w = 1/2$ نمایش داده شده است. این مسئله حالت کرنش مسطح بوده و متریال آن از نوع همگن و

طول مسئله، m	h	روش پیشنهادی با سایر روش‌ها، از توابع غنی سازی نوک ترک مشابه
ضریب شدت تنش برای مود اول ترک	K_I	با روش XFEM استفاده شده‌است. سه مثال عددی استاندارد برای
ضریب شدت تنش برای مود دوم ترک	K_{II}	محاسبه ضریب شدت تنش بررسی گردیده و نتایج حاصل حکایت از
نصف طول ترک	a	توانمندی روش ارائه شده در حل مسائل ترک دارد. لازم به ذکر آن‌که
عرض مسئله، m	w	برتری روش بدلیل محدودیت اطلاعات موجود از سایر پژوهش‌ها صرفاً
موقعیت ترک، m	y	با مقایسه تعداد درجات آزادی صورت گرفته‌است.
تابع تقریب نوک ترک	$F_I(x)$	از دیگر قابلیت‌های روش توابع درون‌یاب پوشش، می‌توان به
مجموعه نقاط دایره‌ای	J	قابلیت مدل‌سازی هندسه‌های پیچیده اشاره نمود که تاثیر بسزایی
مجموعه نقاط مربعی	K	در افزایش دقت و کاهش حجم محاسباتی دارد. در روش پیشنهادی،
موقعیت ترک، m	x	توابع شبیه‌سازی ناپیوستگی به روش درون‌یاب پوشش افزوده
موقعیت ترک، m	h	گردیده تا بدون نیاز به ریزتر کردن شبکه بندی و توجه به هندسه
تانسور مدول ماده، N/m^2	C	ترک، مسائل با حوزه ناپیوسته تحلیل گردد. در نتیجه قادر به استفاده
جابجایی، m	u	از یک شبکه بندی منظم برای تحلیل مسائل بوده و نیازی به تظریف
بردار نرمال واحد	n	شبکه بندی برای افزایش دقت تحلیل نمی‌باشد. هم‌چنین به علت
جابجایی، m	\bar{u}	استفاده از توابع غنی سازی از یک شبکه بندی نسبتاً درشت تر برای
نیروی سطحی، N	\bar{t}	حل مسئله استفاده می‌شود که این خود کاهش درجات آزادی و در
	علائم یونانی	نتیجه کاهش حجم محاسباتی را در پی خواهد داشت.
تانسور تنش، N / m^2	σ	نتایج در حیطه مسائل دو بعدی نشان‌دهنده دقت بسیار مناسب
تانسور کرنش	ϵ	و بالای روش پیشنهادی می‌باشد. در همه مثال‌های حل شده،
نیروی حجمی، N	b	ضریب شدت تنش نزدیک به حل دقیق و روش‌های پیشنهادی سایر
عملگر گرادیان متقارن	∇_s	پژوهشگران بوده و همانطور که مشاهده گردید با تعداد درجات آزادی
عملگر گرادیان	∇	کمتر، خطا در حد مطلوب مورد نظر می‌باشد.
حوزه مسئله، m^2	Ω	
مرز مسئله، m	Γ	
مختصات قطبی نوک ترک	(r, θ)	
نسبت پواسون	ν	
زاویه ترک، درجه	φ	
زاویه ترک، درجه	β	
	زیرنویس	
شرایط مرزی ضروری	u	درجات آزادی اضافی
شرایط مرزی طبیعی	t	گره
تقارن در عملگر	s	ناحیه پوششی
شماره گره	i	درون‌یاب خطی برای گره i
شماره گره	j	تابع پرش
شماره گره	k	توابع غنی‌ساز پوشش
		۷- فهرست علائم
		علائم انگلیسی
		E مدول الاستیسیته، N/m^2
		(\bar{x}_i, \bar{y}_i) فاصله از گره i ، m
		a_i درجات آزادی اضافی
		i گره
		C_i ناحیه پوششی
		h_i درون‌یاب خطی برای گره i
		$H(x)$ تابع پرش
		I توابع غنی‌ساز پوشش

search algorithm. *Scientia Iranica*, 2017. 24(1): p. 143-152.

- [10] Belytschko, T., Y. Lu, and L. Gu, Crack propagation by element-free Galerkin methods. *Engineering Fracture Mechanics*, 1995. 51(2): p. 295-315.
- [11] Melenk, J.M. and I. Babuška, The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1996. 139(1-4): p. 289-314.
- [12] Moës, N., J. Dolbow, and T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 1999. 46(1): p. 131-150.
- [13] Strouboulis, T., I. Babuška, and K. Copps, The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2000. 181(1-3): p. 43-69.
- [14] Strouboulis, T., K. Copps, and I. Babuška, The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2000. 47(8): p. 1401-1417.
- [15] Shi, G.h. and R.E. Goodman, Generalization of two-dimensional discontinuous deformation analysis for forward modelling. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1989. 13(4): p. 359-380.
- [16] Ghasemzadeh, H., M. Ramezanzpour, and S. Bodaghpour, Dynamic high order numerical manifold method based on weighted residual method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2014. 100(8): p. 596-619.
- [17] Zheng, H. and D. Xu, New strategies for some issues of numerical manifold method in simulation of crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2014. 97(13): p. 986-1010.
- [18] Terada, K., et al., Finite cover method for progressive failure with cohesive zone fracture in heterogeneous solids and structures. *Computational Mechanics*, 2007. 39(2): p. 191-210.

مربوط به مود اول ترک

I

مربوط به مود دوم ترک

II

مراجع

- [1] Trädegård, A., F. Nilsson, and S. Östlund, FEM-remeshing technique applied to crack growth problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1998. 160(1-2): p. 115-131.
- [2] Bouchard, P.-O., F. Bay, and Y. Chastel, Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2003. 192(35-36): p. 3887-3908.
- [3] Heintz, P., On the numerical modelling of quasi-static crack growth in linear elastic fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2006. 65(2): p. 174-189.
- [4] Khoei, A., H. Azadi, and H. Moslemi, Modeling of crack propagation via an automatic adaptive mesh refinement based on modified superconvergent patch recovery technique. *Engineering Fracture Mechanics*, 2008. 75(10): p. 2921-2945.
- [5] Liu, W.K., S. Jun, and Y.F. Zhang, Reproducing kernel particle methods. *International journal for numerical methods in fluids*, 1995. 20(8-9): p. 1081-1106.
- [6] Atluri, S.N. and T. Zhu, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational mechanics*, 1998. 22(2): p. 117-127.
- [7] Belytschko, T., Y.Y. Lu, and L. Gu, Element-free Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 1994. 37(2): p. 229-256.
- [8] Arzani, H., A. Kaveh, and M. Dehghan, Adaptive node moving refinement in discrete least squares meshless method using charged system search. *Scientia Iranica*, 2014. 21(5): p. 1529-1538.
- [9] Arzani, H., A. Kaveh, and M. Taheri Taromsari, Optimum two-dimensional crack modeling in discrete least-squares meshless method by charged system

- Adaptive Finite Element Enrichment using Interpolation Cover Functions. *Computational Methods in Engineering*, 2019. 37(2): p. 79-96.
- [25] Belytschko, T. and T. Black, Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International journal for numerical methods in engineering*, 1999. 45(5): p. 601-620.
- [26] Ewalds, H. and E. WANHILL, *Fracture Mechanics*, Ed. Edward Arnold, 1986. 10.
- [27] Karihaloo, B.L., *Fracture mechanics & structural concrete*. Longman Scientific and Technical, 1995.
- [28] Zhang, H. and S. Zhang, Extract of stress intensity factors on honeycomb elements by the numerical manifold method. *Finite elements in analysis and design*, 2012. 59: p. 55-65.
- [29] Mousavi, S., E. Grinspun, and N. Sukumar, Harmonic enrichment functions: A unified treatment of multiple, intersecting and branched cracks in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011. 85(10): p. 1306-1322.
- [19] Zheng, H., F. Liu, and X. Du, Complementarity problem arising from static growth of multiple cracks and MLS-based numerical manifold method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015. 295: p. 150-171.
- [20] Kim, J. and K.-J. Bathe, The finite element method enriched by interpolation covers. *Computers & Structures*, 2013. 116: p. 35-49.
- [21] Kim, J. and K.-J. Bathe, Towards a procedure to automatically improve finite element solutions by interpolation covers. *Computers & Structures*, 2014. 131: p. 81-97.
- [22] Wawrzynek, P.A. and A.R. Ingraffea, An interactive approach to local remeshing around a propagating crack. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1989. 5(1): p. 87-96.
- [23] Zhang, H., et al., Numerical analysis of 2-D crack propagation problems using the numerical manifold method. *Engineering analysis with boundary elements*, 2010. 34(1): p. 41-50.
- [24] Arzani, H. and E. Khoshbavar Rad, Automatic

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

H. Arzani, E. Khoshbavar Rad, *The Analyzing of the Discontinuity Problem by Enriched Interpolation Covers*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 52(2) (2020) 371-382.

DOI: [10.22060/ceej.2019.13840.5487](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.13840.5487)

