



Analysis of Hydraulic Fracture Propagation in Toughness Dominant with Considering Fluid Viscosity and Inertia Parameters Interaction: Higher Order Terms

A. Asgari^{1*}, A. Golshani²

¹Department of Engineering and Technology, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

²Department of Civil and Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

ABSTRACT: In the process of hydraulic fracture, various physical parameters such as; viscosity, inertia of fluid and toughness of rock do not influence the fracture propagation identically, and it is probable that one or more of the parameters be more pronounced. Therefore, it may persuade one special regime which is named base on the dissipation of energy. In an impermeable rock, the two limiting regimes can be identified with the dominance of one or the other of the two energy dissipation mechanisms corresponding to extending the fracture in the rock and to flow of viscous fluid in the fracture, respectively. In the viscosity-dominated regime, dissipation in extending the fracture in the rock is negligible compared to the dissipation in the viscous fluid flow, and in the toughness-dominated regime, the opposite holds. It is supposed that the flow of incompressible fluid in the fracture is unidirectional and laminar. Besides, the fracture is fully fluid-filled at all times and fracture propagation is described in the framework of linear elastic fracture mechanics (LEFM). The contribution of this research is a detailed study of the evaluation parameters' effects on the propagation of hydraulic fracture an impermeable brittle rock. Here, the modified perturbation method suggested for evaluating fluid viscosity and inertia parameters interaction (FVII). The proposed method provides a good estimate of the solution in the wide range of the viscosity/inertia parameters because of the coexistence of both small parameters in the governing equations. The results showed that considering the FVII reduce the length of the crack, and the crack length decreases with increasing viscosity parameter, and the decreasing trend will be intensified by increasing the inertia of fluid. On the other hand, the effects of fluid viscosity in the hydraulic fracture injection process are more pronounced than the effects of the inertia parameter on the assumption of a laminar flow. Neglecting the effect of the FVII result in a significant error. These errors continue to increase with the increase, and may reach about 300%. At last, the results are compared with the available references, which confirms the logical process.

Review History:

Received: 2018-05-27

Revised: 2019-02-22

Accepted: 2019-09-18

Available Online: 2018-09-15

Keywords:

Hydraulic fracture

Interaction effect

Inertia

Viscosity

Modified perturbation method

1- INTRODUCTION

The best references for the technical skills and practical background of hydraulic fracturing treatments in the oil and gas industry are the compilations provided by Gidley et al [1], and Economides and Nolte [2]. In the last decades, researchers have made an effort to model the process of hydraulic fracturing both analytically and numerically; see Reference [3] for some further references. Some other investigation in the areas of analytical models for hydraulic fracturing are briefly noted in the following:

Spence and Sharp [4] presented a self-similar solution for a KGD crack propagating in an elastic, impermeable medium with finite toughness. Their model combines lubrication theory to model the flow incompressible viscous fluid in the fracture; the linear elasticity theory in plane strain to model the crack opening due to a given pressure distribution; and the fracture mechanics theory by using square-root tip

asymptote for the crack opening and propagation condition controlled by the stress intensity factor. Following Spence and Sharp's method [4], Carbonell [5] have developed a self-similar solution for the asymptotic case of zero toughness. This solution is based on the so-called SCR [6] tip asymptote which describes the asymmetric behavior of opening and pressure at near the tip of the crack tip. The numerical method originally proposed by Spence and Sharp [4] and later in refined form by Adachi [7] and Asgari [8] is appropriate to find the solution in this intermediate regime, where the effects of fluid viscosity and rock toughness are of the same order. Ongoing, many researchers, in order to simplify the analysis of the problem, consider it as one of toughness regime (waste of energy due to toughness or hardness of the rock) e.g. Garagash (2000) [9] or viscosity-dominated (loss of energy due to high viscosity of the fluid) [10, 11]. Huang et al. [12] examined the propagation of a plane-strain fracture under condition of zero-viscosity of fluid. They have improved a self-similar solution under assumption of the dominance

*Corresponding author's email: a.asgari@umz.ac.ir



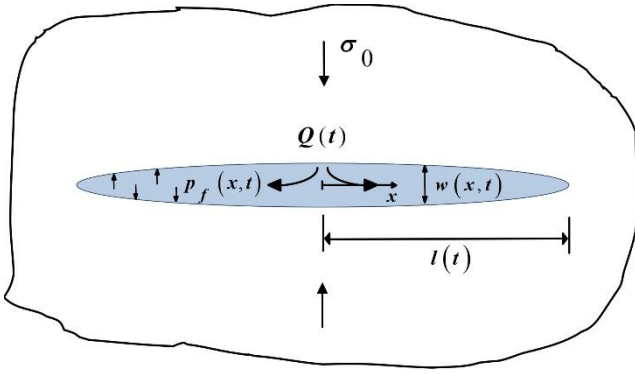


Fig. 1. Sketch of a plane-strain fluid-driven fracture.

of the fluid inertia forces as compared to the viscous drag. Some other researchers [4, 13, 14] have assumed that the fluid inertia effects on either fracture propagation or the fluid flow in the crack are negligible (even under conditions when fluid viscosity vanishes) and the fluid flow can be modeled by the lubrication theory [15]. Garagash (2006) [16] applied an explicit solution for a fracture propagating in the toughness-dominated regime when the energy dissipated in the viscous fluid flow inside the fracture is negligibly small compared to the energy expended in fracturing the solid medium. It was also shown that the established method of asymptotic expansion in the small parameter is equally applicable to study other small effects (e.g., fluid inertia) on the otherwise toughness-dominated solution. Consequently, Garagash [16] presented the scaling for the fracture propagation driven by inertial, unidirectional flow of viscous fluid, and evaluate the effect of inertia. Garagash [16] examined the inertia and viscosity parameter effects separately in the other words without considering FVII effect on the hydraulic fracture process. In this paper, the net pressure in the fracture, the crack opening, and the fracture half-length are obtained with considering the FVII effect on the toughness-dominated solution. The modified perturbation method is proposed here for evaluating the FVII effects on the otherwise toughness-dominated solution of a plane-strain hydraulic fracture.

2- MATHEMATICAL FORMULATION

2-1- Problem definition

We consider the propagation of a plane-strain crack of length $2\ell(t)$, emanating in an impermeable, linear elastic rock characterized by Young's modulus E , Poisson's ratio ν , and toughness K_{IC} , see Figure1. An incompressible fluid of viscosity μ is injected at the center of the fracture at a rate $Q(t)$, which is induced to internal fluid pressure $p_f(x,t)$ in the surfaces crack. Also, the crack is loaded by far-field confining stress σ_0 . The Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM) theory is adopted to obtain the net pressure in the fracture $P(x,t) = p_f(x,t) - \sigma_0$, the crack opening $w(x,t)$, and the fracture half-length $\ell(t)$, where t is the time and x is the position along the crack.

The analysis assumptions and boundary conditions were considered according to the Reference [16].

2-2- Governing equations

The governing equations of the model consist of a propagation criterion, an elasticity equation, and the lubrication equation. These equations can be expressed in terms of the half of the crack, $0 \leq x \leq \ell$, the crack opening, the average fluid velocity, and the fluid net pressure by accounting for the problem symmetry as follow:

2-2-1- Fluid mass:

The fluid flow in the fracture is governed by continuity of mass and momentum. Global fluid continuity requires the injected fluid volume $V(t)$ to be equal to the fracture volume; hence:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^\ell w dx = wv, \quad \int_0^\ell w dx = \frac{1}{2}V(t), \quad V(t) = \int_0^t Q dt. \tag{1}$$

2-2-2- Fluid momentum:

The unidirectional laminar fluid flow inside the crack is described by the momentum balance equation [14, 17].

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu'v}{w^2} \right) \tag{2}$$

2-2-3- Elasticity equation

Crack opening is related to the net pressure on the crack by an integral equation of the linear elasticity theory [18].

$$w(x,t) = \frac{4}{\pi E'} \int_0^\ell G\left(\frac{x}{\ell}, \frac{x'}{\ell}\right) P(x',t) dx', \tag{3}$$

$$G(\xi, \xi') = \ln \left| \frac{\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{1-\xi'^2}}{\sqrt{1-\xi^2} - \sqrt{1-\xi'^2}} \right|.$$

2-2-4- Fracture propagation

The LEFM propagation criterion for a mode I fracture, $K_I = K_{IC}$, is expressed as the tip asymptote of the crack opening [19]:

$$w = \frac{K'}{E'} (\ell - x)^{3/2} \quad \ell - x \ll \ell. \tag{4}$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \mu' = 12\mu, \quad K' = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} K_{IC}.$$

Where E' is the plane strain elastic modulus.

2-3- Dimensionless Formulation

To facilitate solution of the set of equations (1- 4), let us introduce the following scaled and normalized quantities: the coordinate $\xi = x/\ell(t) \in [0,1]$, the crack opening, the net pressure, the crack half-length, and the fluid velocity as follows:

$$w(x,t) = \varepsilon(t)L(t)\Omega(\xi,t), \quad \ell(t) = L(t)\gamma(t), \tag{5}$$

$$P(x,t) = \varepsilon(t)E'\Pi(\xi,t), \quad \varepsilon(t) = L^{-2}(t)V(t),$$

$$v(x,t) = t^{-1}L(t)\vartheta(\xi,t), \quad \bar{\Omega}(\xi,t) = \Omega(\xi,t)/\gamma(t),$$

$$\bar{\vartheta}(\xi,t) = \vartheta(\xi,t)/\gamma(t).$$

It is noted that “bar sign” corresponds to the normalized quantities.

Using the above transformations, Equations (1- 4) can be re-written in an alternative form as follows:

- Fluid mass

$$\frac{t\dot{V}}{V} \int_{\xi}^1 \bar{\Omega} d\xi + \frac{t\dot{L}}{L} \xi \bar{\Omega} + \Psi_T = \bar{\Omega} \bar{\vartheta}, \quad \int_0^1 \bar{\Omega} d\xi = \frac{1}{2\gamma^2},$$

$$\Psi_T = t \int_{\xi}^1 \left[\dot{\bar{\Omega}} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \left(\bar{\Omega} - \xi \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \xi} \right) \right] d\xi. \quad (6)$$

- Fluid momentum

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = G_n \gamma^2 \bar{\vartheta} \left[\frac{t\dot{L}}{L} \left(1 - \frac{\xi}{\bar{\vartheta}} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \right) - 1 + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} + \Phi_T \right] + G_m \frac{\bar{\vartheta}}{\Omega^2},$$

$$\Phi_T = \frac{t\dot{\gamma}}{\gamma} \left(1 - \frac{\xi}{\bar{\vartheta}} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \right) + \frac{t\dot{\bar{\vartheta}}}{\bar{\vartheta}}. \quad (7)$$

- Elasticity equation and fracture propagation

$$\bar{\Omega}(\xi, t) = L^{-1} \{ \Pi \}(\xi, t) = \frac{4}{\pi} \int_{\xi}^1 G(\xi, \xi') \Pi(\xi', t) d\xi',$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega} = G_k \gamma^{-1/2}. \quad (8)$$

The terms Φ_T and Ψ_T are time-transient parts in the continuity Equation 6 and momentum Equation 7, respectively.

Also, three dimensionless parameters G_k , G_i , and G_n in Equations 7 and 8 are expressed as:

$$G_k = \frac{K' L^{3/2}}{E' V}, G_n = \frac{\mu' L^6}{E' tV^3}, G = \frac{\rho L^4}{E' t^2 V}. \quad (9)$$

For more expressions of these dimensionless parameters in the three scaling, identified as the toughness scaling $G_k = 1$, the viscosity scaling $G_i = 1$, and the inertia scaling $G_n = 1$, refer to [16].

Consequently, $t\dot{V}/V$ and $t\dot{L}/L$ in continuity Equation 6 and momentum Equation 7 are the corresponding constant exponents, and the time derivative operator to $t\partial(\cdot)/\partial t$ in Equations 6 and 7 can be replaced by

$$t \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{t\dot{G}_k}{G_k} \right) G_k \frac{\partial}{\partial G_k} + \left(\frac{t\dot{G}_m}{G_m} \right) G_m \frac{\partial}{\partial G_m} \quad (10)$$

Where over dot denotes the differential with respect to t .

3- BASIC IDEA

In this work, the modified perturbation method is suggested to find an approximate solution to the problem of plane-strain hydraulic fracture propagating in an impermeable brittle rock. The perturbation method is applicable if dimensionless parameters can be considered as “small” quantities. Since there are three different dimensionless parameters G_k, G_i and G_n , thus we assume:

$$f(\xi, G_i) = f_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n \\ i_1, 2, \dots, n = 1, 2, 3 \text{ or } k, \mu, \rho}} (G_{i_1} G_{i_2} \dots G_{i_n} f^{(i_1 i_2 \dots i_n)}(\xi)) \quad (11)$$

$$f(\xi, G_i) = \{ \bar{\Omega}(\xi, G_i), \Pi(\xi, G_i), \bar{\vartheta}(\xi, G_i), \gamma(G_i) \},$$

$$i = k, \mu, \rho$$

4- TOUGHNESS-DOMINATED REGIME: CONSTANT INJECTION RATE

We assume the case of the toughness-dominated regime in a fracture, which results in Equation 6 $G_k = 1$. Consequently, the solution in the toughness scaling is dependent on two parameters, the dimensionless viscosity $G_i = \mathcal{M}$, and the dimensionless inertia $G_n = \mathcal{R}$.

According to the toughness scaling, Equation 11 can be reduced as follows:

$$f(\xi, \mathcal{M}, \mathcal{R}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}^m \mathcal{R}^n f_{[m,n]}(\xi) \quad (12)$$

Where $\{f_{[0,0]}, f_{[m,0]}, f_{[0,n]}, f_{[m,n]}\} \rightarrow \forall m \wedge n \in \langle N = \{1, 2, \dots\} \rangle$ are zero-viscosity-inertia term, the term, m th-order of small viscosity and zero-inertia, n th-order of small inertia and zero-viscosity, and $f_{[m,n]}$ are m and n th order of the interaction term, respectively. Substituting Equation 12 in Equations (6-8) and organizing it based on coefficients of $1, \mathcal{M}, \mathcal{R}, \mathcal{M}\mathcal{R}$, in the toughness scaling, gives:

- Zero- viscosity and inertia, $f_{[0,0]}(\xi)$

$$1: \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[0,0]} d\xi + \frac{2}{3} \xi \bar{\Omega}_{[0,0]} - \bar{\Omega}_{[0,0]} \bar{\vartheta}_{[0,0]} = 0,$$

$$\gamma_{[0,0]}^{-2} = 2 \int_0^1 \bar{\Omega}_{[0,0]} d\xi, \quad \frac{\partial \Pi_{[0,0]}}{\partial \xi} = 0, \quad (13)$$

$$\bar{\Omega}_{[0,0]}(\xi) = L^{-1} \{ \Pi_{[0,0]} \}(\xi),$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_{[0,0]} = \gamma_{[0,0]}^{-1/2}.$$

- Small viscosity, $f_{[1,0]}(\xi)$

$$\mathcal{M}: \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[1,0]} d\xi + \frac{2}{3} \xi \bar{\Omega}_{[1,0]} = \bar{\Omega}_{[1,0]} \bar{\vartheta}_{[0,0]} + \bar{\Omega}_{[0,0]} \bar{\vartheta}_{[1,0]},$$

$$\gamma_{[1,0]} = -\gamma_{[0,0]}^3 \int_0^1 \bar{\Omega}_{[1,0]} d\xi, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Pi_{[1,0]}}{\partial \xi} = \frac{\bar{\vartheta}_{[0,0]}}{\bar{\Omega}_{[0,0]}^2},$$

$$\bar{\Omega}_{[1,0]}(\xi) = L^{-1} \{ \Pi_{[1,0]} \}(\xi),$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_{[1,0]} = -\frac{1}{2} \gamma_{[1,0]} \gamma_{[0,0]}^{-3/2}.$$

- Small inertia, $f_{[0,1]}(\xi)$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: & -\frac{\gamma_{[0,1]}}{3\gamma_{[0,0]}} \left(2 \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[0,0]} d\xi + \xi \bar{\Omega}_{[0,0]} \right) \\ & + \frac{2}{3} \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[0,1]} d\xi - \bar{g}_{[0,1]} \bar{\Omega}_{[0,0]} + \left(\frac{2}{3} \xi - 3\bar{g}_{[0,0]} \right) \bar{\Omega}_{[0,1]} \\ \gamma_{[0,1]} & = -\gamma_{[0,0]}^3 \int_0^1 \bar{\Omega}_{[0,1]} d\xi, \\ \frac{\partial \Pi_{[0,1]}}{\partial \xi} & = \frac{1}{3} \gamma_{[0,0]}^2 \bar{g}_{[0,0]} \left[1 + \left(2 \frac{\xi}{\bar{g}_{[0,0]}} - 3 \right) \frac{\partial \bar{g}_{[0,0]}}{\partial \xi} \right] \\ \bar{\Omega}_{[0,1]}(\xi) & = L^{-1} \{ \Pi_{[0,1]} \}(\xi), \\ \lim_{\xi \rightarrow 1} (1-\xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_{[0,1]} & = -\frac{1}{2} \gamma_{[0,1]} \gamma_{[0,0]}^{-3/2}. \end{aligned} \tag{15}$$

- Interaction term, $f_{[1,1]}(\xi)$

$$\begin{aligned} \mathcal{MR}: & \\ \frac{1}{3\gamma_{[0,0]}^2} & \left(2 \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[0,0]} d\xi + \xi \bar{\Omega}_{[0,0]} \right) \\ \times (\gamma_{[1,1]} \gamma_{[0,0]} - \gamma_{[0,1]} \gamma_{[1,0]}) & \\ + \frac{\gamma_{[0,1]}}{3\gamma_{[0,0]}} & \left(2 \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[1,0]} d\xi + \xi \bar{\Omega}_{[1,0]} \right) \\ - \frac{2}{3} \int_{\xi}^1 & \bar{\Omega}_{[1,1]} d\xi - \frac{2}{3} \xi \bar{\Omega}_{[1,1]} \\ + \bar{g}_{[1,1]} \bar{\Omega}_{[0,0]} & + \bar{g}_{[0,0]} \bar{\Omega}_{[1,1]} \\ + \bar{g}_{[1,0]} \bar{\Omega}_{[1,0]} & + \bar{g}_{[0,1]} \bar{\Omega}_{[0,1]} = 0. \\ \gamma_{[1,1]} & = \frac{3\gamma_{[1,0]}\gamma_{[0,1]} - \gamma_{[0,0]}^3}{\gamma_{[0,0]}} \int_0^1 \bar{\Omega}_{[1,1]} d\xi, \\ \frac{\partial \Pi_{[1,1]}}{\partial \xi} & = \frac{1}{\bar{\Omega}_{[0,0]}^3} \left(\frac{\partial \bar{g}_{[1,0]}}{\partial \xi} (2\xi - 3\bar{g}_{[0,0]}) \right. \\ & \left. + \left(1 - 3 \frac{\partial \bar{g}_{[0,0]}}{\partial \xi} \right) \bar{g}_{[1,0]} \right) \\ & + \frac{2}{3} \gamma_{[0,0]} \gamma_{[1,0]} \left(\frac{\partial \bar{g}_{[0,0]}}{\partial \xi} (2\xi - 3\bar{g}_{[0,0]}) + \bar{g}_{[0,0]} \right). \\ \bar{\Omega}_{[1,1]}(\xi) & = L^{-1} \{ \Pi_{[1,1]} \}(\xi), \\ \lim_{\xi \rightarrow 1} (1-\xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_{[1,1]} & = \frac{3}{4} \gamma_{[1,0]} \gamma_{[0,1]} \gamma_{[0,0]}^{-5/2} - \frac{1}{2} \gamma_{[1,1]} \gamma_{[0,0]}^{-3/2}. \end{aligned} \tag{16}$$

The infinite set of integro-differential equations, Equations(13-16), is solved recursively, and for the sake of

brevity, the details of the solution are not presented here.

$$\bar{\Omega}_{[0,0]} = \frac{1}{2} \pi^{1/3} \sqrt{1-\xi^2}, \quad \Pi_{[0,0]} = \frac{\pi^{1/3}}{8}, \tag{17}$$

$$\bar{g}_{[0,0]} = \frac{1}{6} \xi + \frac{1}{2} \frac{\cos^{-1}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \gamma_{[0,0]} = \frac{2}{\pi^{2/3}}.$$

$$\Pi_{[1,0]} = \frac{8}{3\pi^{2/3}} \left(\frac{1}{24} + \ln(4\sqrt{1-\xi^2}) - \frac{3}{4} \frac{\xi \cos^{-1} \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right), \tag{18}$$

$$\bar{\Omega}_{[1,0]} = \frac{8}{3\pi^{2/3}} \left(\frac{2\pi - 4\xi \sin^{-1} \xi - \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) \sqrt{1-\xi^2}}{-\frac{3}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-\xi^2}^{1+\sqrt{1-\xi^2}}}{1 - \sqrt{1-\xi^2}^{1-\sqrt{1-\xi^2}}} \right)} \right), \tag{19}$$

$$\gamma_{[1,0]} = -\frac{32(1+6\ln 2)}{9\pi^{5/3}}$$

$$\Pi_{[0,1]} = \frac{1}{6\pi^{4/3}} \left(\frac{\frac{\pi^2}{4} + \frac{5\xi^2}{3} + \frac{6\xi \cos^{-1} \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}{(1+2\xi^2)(\cos^{-1} \xi)^2} - \frac{21\pi^2 - 13}{36} \right) \tag{20}$$

$$\gamma_{[0,1]} = \frac{24\pi^2 - 172}{27\pi^{7/3}}$$

$f_{[0,0]}$ and $f_{[0,1]}$ was solved similar to zero-viscosity and inertia solution, the first-order terms of small viscosity, and first-order term of small inertia solutions, respectively in the literature of Garagash (2006) [16]. Because of the complexity of higher term $\{f_{[m,0]}, f_{[0,n]}\} \rightarrow \forall m \wedge n \in \langle N = \{2, 3, \dots\} \rangle$ and interaction term $\{f_{[m,n]}\} \rightarrow \forall m \wedge n \in \langle N = \{1, 2, 3, \dots\} \rangle$, we have to implement numerical method.

The general solution in toughness-dominated regime can be simply obtained via Equation 12. Such as, for the dimensionless opening we have:

$$\begin{aligned} \Omega(\xi) & = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}^m \mathcal{R}^n \bar{\Omega}_{[m,n]}(\xi) \\ & \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}^m \mathcal{R}^n \gamma_{[m,n]} \end{aligned} \tag{21}$$

5- RESULTS AND DISCUSSION

In this research, the general solution of the problem is presented considering the interaction between the inertia and the viscosity parameters on the toughness scaling. If one of these parameters is considered zero, then there is no interaction between the parameters and the problem solution in this research leads to the Garagash's solution in the reference [20].

Figures 2 and 3 showed the comparison between the normalized opening, and the net pure pressure, taking into account the interaction effect between the viscosity and inertia

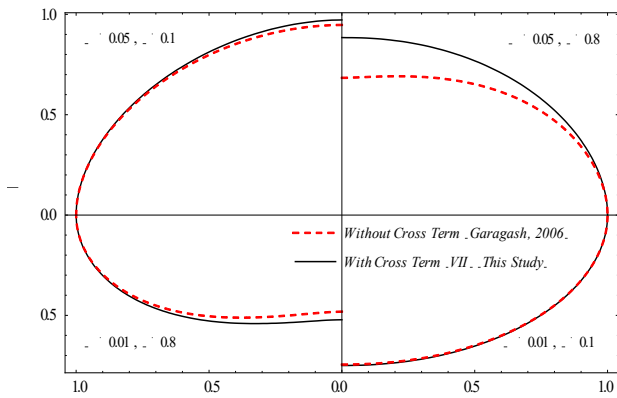


Fig. 2. Comparison of normalized opening, $\bar{\Omega}$, considering the effect of interaction between viscosity and inertia parameters (this study) and without interaction effect [16].

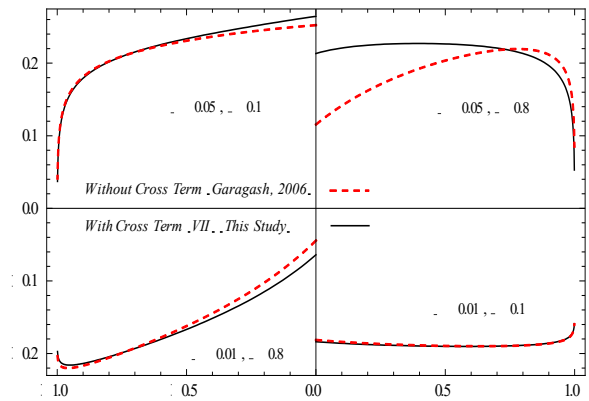


Fig. 3. Comparison of net fluid pressure, Π , considering the interaction effect between the viscosity and inertia parameters (this study) and without interaction term [16].

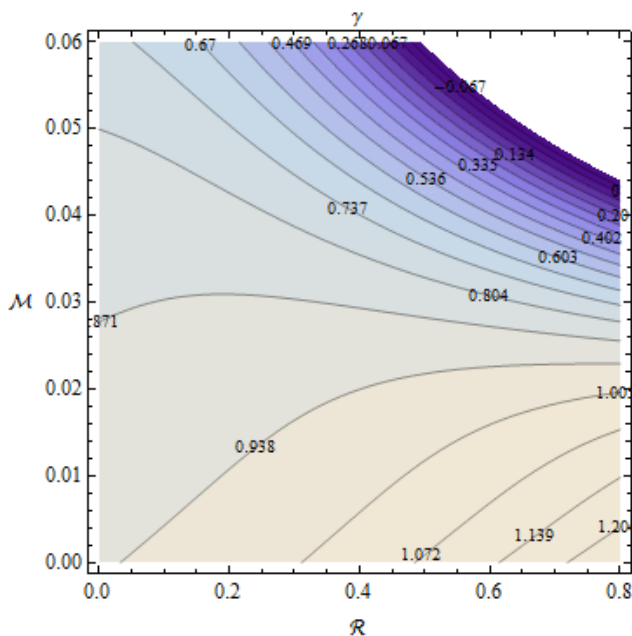


Fig. 4. contour of the crack half-length in terms of different values of viscosity and inertia parameters

parameters (this study) and without the interaction term [16]. On the other word, considering the interaction effect, it increases the size of the scaled opening and the reduction of the length of the crack.

Considering the effects of interaction term increases the normalized opening and reduces the length of the crack. Some of the outcomes of this research are as follows:

5-1- Dimensionless fracture length

Figure4 shows the contour of the crack half-length in terms of different values of viscosity and inertia parameters.

According to this figure, the crack half-length increases with the increase of the inertial parameter in the smaller values of the viscosity parameter, and change of crack half-length may become almost negligible for $\mathcal{M} = 0.0275$. For a

larger value of the viscosity parameter ($\mathcal{M} > 0.0275$), the crack half-length decreases as the inertia parameter becomes greater.

It can also be concluded that the effects of fluid viscosity in the hydraulic fracture injection process are greater than the effects of the inertial parameter. However, ignoring the effects of inertia can even cause about 300% change in the solution under a particular situation.

5-2- The net scaled fluid pressure on the crack surface

Considering the FVII, it usually causes a maximum value to occur in the process of the pressure-space curve (Figure 14). As shown in Figure 5, in a constant inertia, the difference of pressure at the tip and the inlet increases as the viscosity increases.

Increasing the inertia parameter, in the smaller amounts of viscosity, reduces the pressure nearby the injection point and the middle of the crack and increases the pressure around the tip of the crack. On the other hand, the gradual increase of viscosity, the pressure increases at the inlet and decreases in the region of the tip of the crack. These results are due to the existence of the interaction term \mathcal{M} and \mathcal{R} . Undoubtedly, the description of the mechanism of interaction between these two parameters seems very complicated and requires more research and laboratory testing with this attitude.

5-3- The Normalized opening of crack

Figure 6 shows the trend of opening, $\Omega = \gamma \bar{\Omega}$, for various values of $\mathcal{M} = \{0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$ and $\mathcal{R} = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8\}$, with considering FVII with third order $o(\mathcal{M}^3, \mathcal{R}^3)$. As shown, increasing the inertia of the fluid with zero-viscosity the crack may tend to develop a tear-drop shape, whereas, with increasing crack viscosity, the droplet form is released.

6- Conclusions

In this research, the effect of interaction of viscosity and inertia parameters on the net pressure in the fracture, the crack opening, and the fracture half-length of crack fluid in brittle rocks for different values of viscosity and inertia parameters for two-dimensional KGD crack in toughness regime using

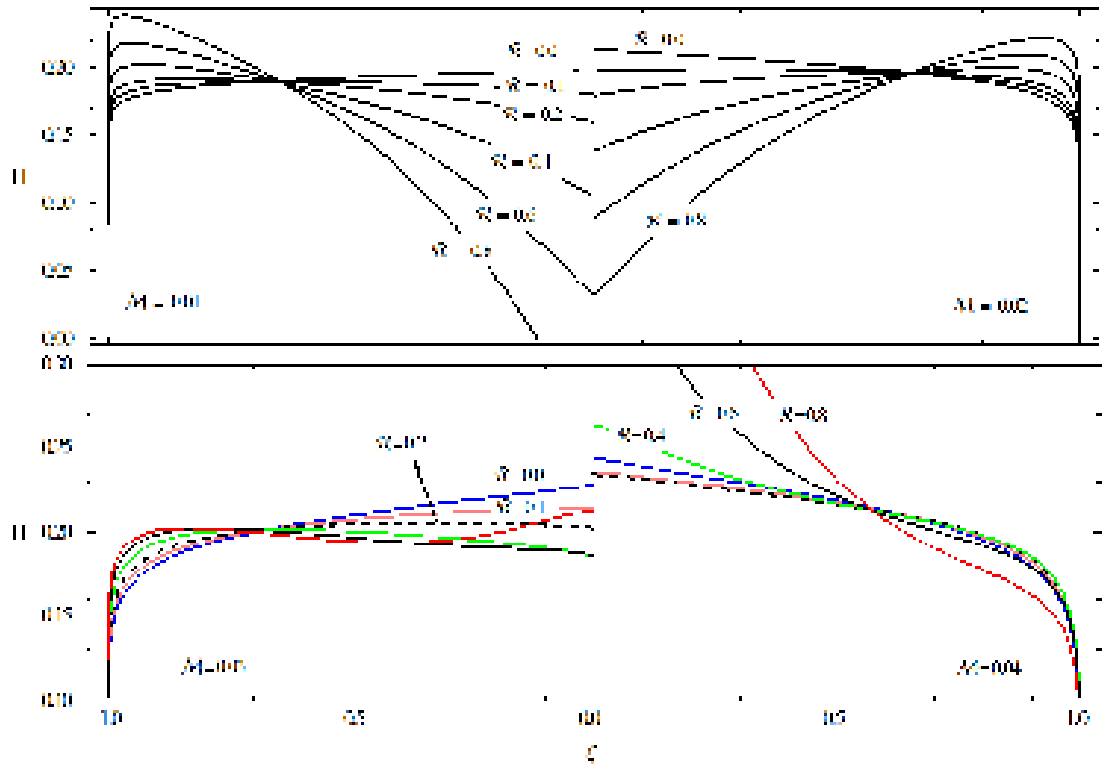


Figure 5. The trend of net fluid pressure, Π , for various values of \mathcal{R} and in terms of various values of the viscosity parameter $\mathcal{M} = \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$, with considering FVII with third-order $O(\mathcal{M}^3, \mathcal{R}^3)$

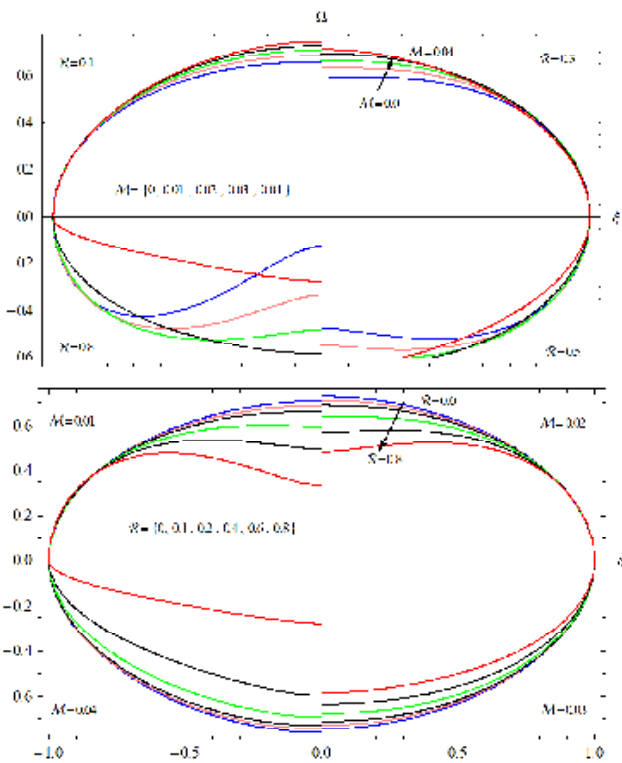


Figure 6. The trend of opening, $\Omega = \gamma\bar{\Omega}$, for various values of \mathcal{M} and \mathcal{R} , with considering FVII with third order $O(\mathcal{M}^3, \mathcal{R}^3)$

modified perturbation method was investigated. The results are briefly noted in the following:

The half-length crack decreases with increasing viscosity and the decreasing trend increases with increasing inertia parameter. In greater amounts of viscosity, an increase in the inertia parameter leads to a decrease in the half-length of the crack. On the other hand, the lowering effect of the viscosity parameter is greater than the inertia enhancing effect. Therefore, it can be concluded that the effects of fluid viscosity in the hydraulic fracture injection process are more than the effects of the inertial parameter with the assumption that the flow is laminar.

Increasing the inertia parameter, in the smaller amounts of viscosity, reduces the pressure nearby the injection point and the middle of the crack and increases the pressure around the tip of the crack. On the other hand, the gradual increase of viscosity, the pressure increases at the inlet and decreases in the region of the tip of the crack. These results are due to the existence of the interaction term \mathcal{M} and \mathcal{R} . Increasing the inertia of the fluid with zero-viscosity the crack may tend to develop a tear-drop shape, whereas, with increasing crack viscosity, the droplet form is released.

REFERENCES

- [1] J.L. Gidley, Recent advances in hydraulic fracturing, (1989).
- [2] M.J. Economides, K.G. Nolte, U. Ahmed, Reservoir stimulation, Wiley Chichester, 2000.
- [3] E. Detournay, D. Garagash, The near-tip region of a fluid-

- driven fracture propagating in a permeable elastic solid, *Journal of Fluid Mechanics*, 494 (2003) 1-32.
- [4] D. Spence, P. Sharp, Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 400(1819) (1985) 289-313.
- [5] R.S. Carbonell, Self-similar solution of a fluid-driven fracture in a zero toughness elastic solid, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A* submitted for publication, 1996.
- [6] J. Desroches, E. Detournay, B. Lenoach, P. Papanastasiou, J. Pearson, M. Thiercelin, A. Cheng, The crack tip region in hydraulic fracturing, in: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, 1994, pp. 39-48.
- [7] J.I. Adachi, *Fluid-driven fracture in permeable rock*, University of Minnesota, 2001.
- [8] A. Asgari, *Hydraulic Fracture Propagation in Brittle Rock: Based on Hydro-Mechanical Model*, Tarbait Modares University, Tehran, 2016.
- [9] D. Garagash, Hydraulic fracture propagation in elastic rock with large toughness, in: *4th North American Rock Mechanics Symposium*, American Rock Mechanics Association, 2000.
- [10] D.I. Garagash, E. Detournay, Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: small toughness solution, *Journal of Applied Mechanics*, 72 (2005) 916.
- [11] D. Garagash, E. Detournay, Viscosity-dominated regime of a fluid-driven fracture in an elastic medium, in: *IUTAM Symposium on Analytical and Computational Fracture Mechanics of Non-Homogeneous Materials*, Springer, 2002, pp. 25-29.
- [12] N. Huang, A. Szewczyk, Y. Li, Self-similar solution in problems of hydraulic fracturing, *Journal of Applied Mechanics*, 57 (1990) 877.
- [13] D. Garagash, E. Detournay, The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium, *Journal of Applied Mechanics*, 67(1) (2000) 183-192.
- [14] R. Nilson, Gas-driven fracture propagation, *Journal of Applied Mechanics*, 48(4) (1981) 757-762.
- [15] G. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics* Cambridge Univ. Press, Bentley House, London, (1967).
- [16] D.I. Garagash, Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: Asymptotics of large toughness, *Engineering Fracture Mechanics*, 73(4) (2006) 456-481.
- [17] R.A. Shapiro, *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow*, New York: Ronald Press, 2(1) (1954).
- [18] I.N. Sneddon, M. Lowengrub, P. Mathematician, *Crack problems in the classical theory of elasticity*, Wiley New York, 1969.
- [19] J.R. Rice, *Mathematical analysis in the mechanics of fracture, Fracture: an advanced treatise*, 2 (1968) 191-311.
- [20] D. Garagash, Transient solution for a plane-strain fracture driven by a shear-thinning, power-law fluid, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30(14) (2006) 1439-1475.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

A. Asgari, A. Golshani, *Analysis of Hydraulic Fracture Propagation in Toughness Dominant with Considering Fluid Viscosity and Inertia Parameters Interaction: Higher Order Terms*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 52(2) (2020) 123-130.

DOI: [10.22060/ceej.2018.14498.5673](https://doi.org/10.22060/ceej.2018.14498.5673)





تحلیل رشد ترک هیدرولیکی در مقیاس سختی با در نظر گرفتن اثر اندرکنش فراسنج های ماند و گرانیوی: ترم های مرتبه بالاتر

علی عسگری^{۱*}، علی اکبر گلشنی^۲

^۱ دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

^۲ دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۷-۰۳-۰۶

بازنگری: ۱۳۹۷-۰۵-۳۱

پذیرش: ۱۳۹۷-۰۶-۲۷

ارائه آنلاین: ۱۳۹۷-۰۹-۲۴

کلمات کلیدی:

شکست هیدرولیکی

چقرمگی

مقیاس سختی

اندرکنش ماند و گرانیوی

روش اغتشاش اصلاح شده

خلاصه: در فرآیند شکست هیدرولیکی معمولاً فراسنجهای مختلف مانند گرانیوی، جرم مخصوص سیال و چقرمگی محیط اثرات مشابه و یکسانی بر چگونگی رشد ندارند و ممکن است یک یا چند تا از فراسنجهای اهمیت بیشتری داشته باشند؛ در نتیجه منجر به یک یا چند رژیم خاص خواهد شد. رژیمها بر اساس روند هدر رفت انرژی نام گذاری می شوند که مهم ترین آن ها عبارتند از: اول) رژیم سختی که بیشترین انرژی تزریق سیال از طریق شکافتن سنگ به دلیل چقرمگی اتلاف می شود (دوم) رژیم گرانیوی که بیشترین اتلاف توان ورودی سیال ناشی از حرکت سیال لزج در ترک است. در این نوشتار به بررسی رشد ترک هیدرولیکی دو بعدی، در حالت کرنش صفحه ای در یک محیط کشسان پرداخته می شود. سیال به صورت غیرقابل تراکم و نیوتنی فرض می شود و هم چنین رشد ترک در قالب مکانیک شکست خطی کشسان بررسی می شود. هدف از این پژوهش، دستیابی به اثرات انواع فراسنجهای از قبیل چقرمگی، گرانیوی، جرم مخصوص سیال و هم چنین اثربخشی اندرکنش بین برخی از فراسنجهای به طور خاص اثرات توأم گرانیوی و جرم مخصوص سیال برای یک ترک دو بعدی در رژیم سختی است. برای ارزیابی اندرکنش بین فراسنجهای اشاره شده یک روش اصلاح شده-روش اغتشاش-ارائه شده است. این روش قابلیت تحلیل مسائل مشابه با دیگر هندسه و رژیم را دارد. نتایج نشان می دهد که در نظر گرفتن ترم اندرکنشی باعث برآورد کمتری از طول ترک خواهد شد و طول ترک با افزایش گرانیوی کاهش می یابد و روند کاهشی با افزایش فراسنج جرم مخصوص (مانند) شدت می یابد. از طرف دیگر، اثرات گرانیوی سیال در فرآیند تزریق شکست هیدرولیکی بیشتر از اثرات فراسنج ماند با فرض جریان آرام می باشد. مسلماً، در نظر گرفتن اثرات ماند می تواند خطای چشم گیری را وارد کند. این خطاها با افزایش فراسنج ماند، افزایش می یابد و ممکن است به ۳۰٪ نیز برسد. به طور کلی نتایج با مستندات موجود مقایسه شده است که روند منطقی در آن ها را تصدیق می کند.

۱- مقدمه

محیطهای سنگی متخلخل زیرزمینی، مخزن سیالات ارزشمندی هم چون آبهای زیرزمینی، نفت، گاز مایع و گاز طبیعی می باشند. دسترسی به این مخازن از طریق حفر چاه صورت می گیرد. به منظور افزایش استخراج نفت و گاز در اکثر موارد از روش شکست هیدرولیکی استفاده می شود. در عملیات شکست هیدرولیکی، یکی از روشهای پرکاربرد و ویژه در مهندسی ژئومکانیک، سیال خاصی با فشار به داخل قسمت محصور شده از چاه پمپ می شود؛ این فشار تا زمان

* نویسنده عهده دار مکاتبات: a.asgari@umz.ac.ir

ایجاد شکستگیهای جدید و یا باز شدن آن ها افزایش خواهد یافت. فشار سیال مورد نیاز جهت گسترش شکستگی و مدت زمان ادامه یافتن ترکها، به تنش حاکم برجا، دبی جریان، گرانیوی و ماند سیال، اختلاف فشار بین مخزن و چاه، چقرمگی و نفوذپذیری محیط و غیره بستگی دارد. به طور کلی سیالاتی که برای شکست هیدرولیکی به کار گرفته می شوند ترکیبی از مواد شیمیایی و مصالح ویژه ای هستند که بسته به مراحل انجام شکست، این ترکیبات و مصالح از لحاظ خصوصیات شیمیایی و فیزیکی تغییر می کنند و گرانیوی این سیالها ممکن است تا ۱۰۰۰ برابر آب برسد [۱].



در شرایط عملی، تحت فرآیند شکست هیدرولیکی فراسنج‌هایی از قبیل تنش‌های برجا در سنگ، خصوصیات محیط سنگی، عملکرد سیال تزریق و غیره به‌طور گسترده‌ای تغییر می‌کنند و هیچ یک از فراسنج‌های هندسی ترک چندان در میدان قابل اندازه‌گیری نیستند. بنابراین طراحی و کنترل فرآیند شکست هیدرولیکی تکیه بر الگوهای ریاضی و عددی پیچیده خواهد بود.

پرسش‌ها و مسائل مهمی که در این پژوهش مطرح می‌شود عبارتند از: شکست هیدرولیکی تا چه طولی رشد می‌کند؛ چگونه می‌توان موجب امتداد یافتن آن تا منابع مورد نظر شد؛ چه رابطه‌ای بین ارتفاع و بازشدگی و طول ترک آن وجود دارد؛ فشار در سطوح ترک چگونه تغییر خواهد کرد؛ چه فراسنج‌هایی تأثیرات بیشتری می‌گذارد تا باعث افزایش بهره‌برداری شود. سوالات زیاد دیگری می‌توان مطرح شود که در این نوشتار به برخی از آن‌ها پاسخ داده خواهد شد. مسلماً با توجه به هزینه‌های بالای انجام شکست هیدرولیکی ارائه پاسخ به برخی از پرسش‌ها و مسائل مطرح شده به اقتصادی شدن طرح کمک می‌کند.

۲- پیشینه پژوهش

بهترین مراجع برای مهارت‌های فنی و پیشینه عملی شکست هیدرولیکی در زمینه صنایع نفت و گاز توسط گدلی [۲] و اکونومز و همکارانش [۱] تهیه شده‌است.

جای تعجب نیست اگر گفته شود طی دهه‌های اخیر، پژوهشگران تلاش‌های فراوانی بر روی الگو سازی فرآیند شکست هیدرولیکی انجام داده‌اند. در این بخش به برخی از این تلاش‌ها و مطالعات در زمینه‌های الگو سازی‌های تحلیلی و عددی اشاره می‌شود. بخش مهمی از این پژوهش‌ها مختص به گسترش روش‌های تحلیلی و یا شبه‌تحلیلی^۱ است، که اغلب به منظور پیش‌بینی رشد ترک‌های هیدرولیکی در شرایط ژئولوژیک متغیر و پیچیده که تحت آن عملیات استخراج نفت صورت می‌گیرد، استفاده می‌شوند [۷-۳]، اگرچه، بررسی با روش‌های تحلیلی و یا نیمه‌تحلیلی بر روی یک شکست با هندسه ساده (صفحه‌ای یا دیسک شکل) در یک سنگ هموزن با تنش برجای یکنواخت بسیار پیچیده است که به طبیعت الگو سازی ریاضی مسئله برمی‌گردد [۸] و ممکن است برای دستیابی به چنین حل‌هایی، نیاز به ایده آل سازی و فرض کردن رشد شکست

هیدرولیکی در یک رژیم خاص باشد. با وجود این محدودیت‌ها، الگوهای ایده آل سازی شده از دو جهت اهمیت دارند: اول اینکه، آن‌ها معیاری^۲ برای مقایسه با شبیه سازی‌ها و روش‌های عددی هستند و دوم اینکه یک ابزار برای بررسی اثرات فراسنج‌های مختلف در یک رژیم خاص هستند. مسلماً در یک مساله فیزیکی همه فراسنج‌ها موثر معمولاً دارای اهمیت یکسان نیستند. وقتی برخی از فراسنج‌ها از اهمیت بیشتری نسبت به بقیه برخوردار باشند منجر به رژیم خاصی می‌شوند. توضیح بیشتر اینکه در فرآیند شکست هیدرولیکی معمولاً فراسنج‌های مختلف مانند گرانروی و ماند سیال و چقرمگی محیط اثرات مشابه و یکسانی بر خروجی‌ها ندارد و ممکن است یک یا چند تا از فراسنج‌ها اهمیت بیشتری داشته باشند؛ در نتیجه منجر به یک یا چند رژیم خاص خواهد شد و در نهایت بر میزان رشد ترک و بازشدگی آن اثر متفاوت داشته باشند. هدف از این پژوهش، مطالعه و بررسی فرآیند گسترش ترک‌های هیدرولیکی با در نظر گرفتن اثرات فراسنج‌های: گرانروی سیال^۳، ماند سیال^۴، چقرمگی جسم^۵، بر گسترش ترک‌ها می‌باشد. ویژگی خاص و مهمی که در این تحقیق اضافه شده، وارد کردن اثر اندرکنش بین فراسنج‌های ماند و گرانروی می‌باشد. الگوهایی که پیش از این ارائه شدند با این فرض هستند که یا اثر ماند را در یک مسئله در نظر نگرفتند و یا اثر گرانروی. برای حل مسئله با در نظرگیری اثرات اندرکنشی بین فراسنج‌های گرانروی و ماند در مقیاس سختی، روش اغتشاش اصلاح شده ارائه می‌شود.

پژوهش‌های زیادی بر روی چگونگی تأثیر فراسنج‌های مختلف شکست هیدرولیکی در رژیم‌های مختلف با روش‌های تحلیلی و عددی انجام شده‌است که در ادامه، به توضیح برخی از آن‌ها پرداخته می‌شود [۱ و ۲۷-۹].

در میان الگوهای تحلیلی یا نیمه‌تحلیلی، ذکر کارهای اولیه انجام شده در مراجع [۳۳-۲۸] از اهمیت خاصی برخوردار است. این پژوهشگران، یکی از الگوهای ساده را مورد توجه قرار دادند، اما فرضیات بسیار ساده کننده‌ای را در مورد متغیرهای مساله بالاخص بازشدگی ترک و فشار سیال استفاده کردند. مجموعه برخی از این

- 2 Benchmark
- 3 Fluid viscosity
- 4 Fluid inertia
- 5 Solid toughness

1 Semi-analytical method

SCR^{۱۱} [۴۰] نامیده می شود. در این روش رفتار مجانبی بازشدگی و فشار در نزدیکی نوک ترک تشریح شده است.

اگرچه یک روش عددی توسط اسپنس و شارپ [۱۲] برای حل مسئله در یک رژیم مابین سختی و گرانروی ارائه و بعدها توسط آداجی [۱۹] بازبینی شد ولی بسیاری از پژوهشگران برای ساده تر شدن تحلیل مسئله، آن را به صورت یکی از رژیم‌های سختی (هدررفت انرژی ناشی از چقرمگی یا سختی بالای سنگ) [۸] یا گرانروی (هدررفت انرژی ناشی از گرانروی بالای سیال) [۹ و ۱۲] و [۱۷] در نظر گرفتند.

هوانگ و همکارانش [۴۱]، رشد ترک هیدرولیکی را به صورت کرنش مسطح و با صرف نظر از گرانروی سیال بررسی کردند. آن‌ها از حل خودمتمشابه [۴۲] با فرض غالب بودن نیروی ماند سیال در مقایسه نیروی گرانروی سیال استفاده کردند. برخی دیگر از پژوهشگران از اثر ماند سیال بر رشد ترک هیدرولیکی صرف نظر کردند [۹ و ۱۲] که در این شرایط می توان جریان سیال را با نگره لزجت بچلر [۴۳] مدل کرد.

گاراگاش [۴۴] به مطالعه فرآیند رشد ترک هیدرولیکی نزدیکی نوک آن در یک محیط کشسان با چقرمگی دلخواه پرداخت. در حالت خاص، ایشان با در نظرگیری پس افتادگی سیال، به جستجوی حل آن متمرکز شدند. نقطه شروع تحلیل او به دست آوردن حل برای ترک پیش رونده توسط سیال در محیط نیمه بی نهایت^{۱۱} بود.

گاراگاش [۴۵] یک راه حل خودمتمشابه مجانب شونده^{۱۲} را برای گسترش ترک صفحه ای KGD در محیط کشسان نفوذناپذیر و با فرض چقرمگی بالا^{۱۳} و ثابت بودن نرخ تزریق سیال (سیال نیوتنی) ارائه کرد. در این راه حل بازشدگی ترک با استفاده از حد ریشه دوم^{۱۴} و فشار در نوک از تابع تکینگی لگاریتمی^{۱۵} به صورت همبسته با دیگر معادله‌های حاکم تعیین گردید.

همچنین گاراگاش در سال ۲۰۰۶ [۴۶] یک راه حل صریح برای انتشار ترک هیدرولیکی KGD در رژیم سختی ارائه داد. گاراگاش فرض کرد که فراسنج گرانروی در مقابل چقرمگی سنگ کوچک باشد

الگوها را در نوشته های مراجع [۳۶-۳۴] نیز می توان پیدا کرد.

اسپنس و شارپ [۱۲] یک راه حل خودمتمشابه^۱ برای بررسی گسترش ترک KGD^۲ در یک محیط کشسان نفوذناپذیر با چقرمگی محدود^۳ ارائه کردند. آن‌ها با تعیین معادله‌های همبسته بین معادله جریان سیال ویسکوز و تراکم‌ناپذیر در ترک با استفاده از نگره روانسازی، معادله کشسانی در حالت کرنش مسطح برای الگوسازی بازشدگی ترک تحت توزیع فشار مشخص، رابطه رشد ترک با استفاده از حد ریشه دوم در نوک^۴ برای بازشدگی ترک، و معیار رشد ترک^۵ با استفاده از فاکتور شدت تنش^۶، مساله را تحلیل کردند.

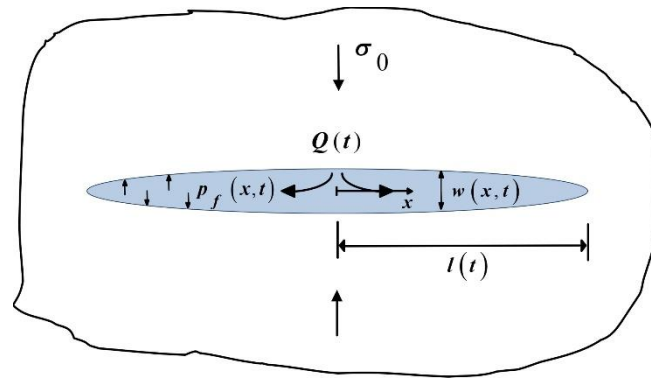
بایوت و همکارانش [۳۷] به بررسی فرآیند شکست هیدرولیکی با استفاده از معادله‌های لاگرانژ از مکانیک کلاسیک پرداختند. تحلیل آن‌ها بر روی یک ترک بیضوی شکل با سیال نیوتنی متمرکز شد. آن‌ها فشار سیال، بازشدگی و طول ترک را با کمک راه حل خود متمشابه، با شرط جریان ورودی ثابت تعیین کردند.

نیلسون [۳۸] راه حل مربوط به ترک در حالت کرنش مسطح (KGD) را توسعه داد. ایشان شکل ساده تری از معادله پیوستگی در ناحیه راس ترک را به کار بست. معادله‌های به روش متغیر متمشابه^۷ با مختصات مکانی مقیاس شده و طول ترک واقعی، تحلیل شد. همچنین در دهانه ترک^۸ فشار ثابت فرض شد و چقرمگی محیط به دو صورت در نظر گرفته شد. در حالت چقرمگی صفر^۹، حل نیلسون، راس ترک را با شکل نوک تیز، و همچنین فاصله ای بین جلوی سیال و نوک ترک (پس‌افتادگی سیال) پیش بینی کرد. در حالت چقرمگی محدود، هیچ فاصله ای را بین جلوی سیال و نوک ترک در نظر نگرفت و شکل نوک ترک گرد شده و فشار سیال محدود می شود (ناسازگار با معادله روانسازی).

به دنبال روش اسپنس و شارپ [۱۲]، کاربونل [۳۹] راه حل خودمتمشابه برای حالت مجانبی با چقرمگی صفر معرفی کرد. این حل بر اساس روشی است که حل مجانب‌شونده در محل نوک ترک

- 1 Self-similar solution
- 2 Khristianovic and Zheltov; Geertsma and de Klerk (KGD or KZGD)
- 3 Finite toughness
- 4 Square-root tip asymptote
- 5 Propagation condition
- 6 Stress intensity factor
- 7 Similarity variable
- 8 Crack inlet
- 9 Zero toughness

- 10 Tip asymptote
- 11 Semi-infinite fluid-driven crack
- 12 Asymptotic self-similar solution
- 13 Large toughness
- 14 Square-root asymptote
- 15 Logarithmic singularity



شکل ۱. الگوی شکست هیدرولیکی در حالت کرنش صفحه‌ای
Fig. 1. Sketch of a plane-strain fluid-driven fracture.

۳- فرمول‌بندی ریاضی و حل آن

۳-۱- تعریف مسئله

مطابق با شکل ۱، ترک هیدرولیکی بطول $2l(t)$ در یک محیط سنگی شکننده با مدول یانگ E ، ضریب پواسون ν و چقرمگی K_{IC} در نظر گرفته می‌شود. بدلیل تقارن این ترک، نیمی از الگو در تحلیل منظور می‌گردد. سیال با گرانشی μ و با دبی $Q(t)$ تزریق می‌شود. تزریق این سیال باعث فشار داخلی $P_f(x,t)$ در سطوح ترک می‌شود. با توجه به اینکه محیط تحت تنش محدودکننده σ_0 قرار دارد؛ در نتیجه فشار خالص در داخل ترک برابر با $P(x,t) = P_f(x,t) - \sigma_0$ است. نگره مکانیک شکست کشسان خطی (LEFM) برای تعیین بازشدگی ترک $w(x,t)$ ، فشار خالص $P(x,t)$ و رشد ترک $l(t)$ بر حسب زمان t و مختصات محلی x به‌کار گرفته می‌شود.

مفروضات اصلی برای الگوی در نظر گرفته در این پژوهش، به صورت زیر خلاصه می‌شود:

- الگوی ترک به صورت دو بعدی KGD، فرض شده‌است.
- ترک در تمام لحظات کاملاً از سیال پر شده‌است و هیچ‌گونه پس افتادگی^۱ بین سیال و نوک ترک وجود ندارد.
- محیط به‌صورت کشسان و همگن فرض می‌شود و همچنین فرض می‌شود محیط نفوذناپذیر است و اتلاف سیال در فرآیند تزریق ناشی از نشت وجود ندارد.
- به‌دلیل وجود فشار هیدرولیکی سیال در سطوح ترک و ناچیز بودن تنش برشی در آن سطوح مود شکست کششی فرض شده‌است.
- فشار سیال در طول ترک ثابت نیست. در واقع، فشار با یک

(مقیاس سختی) و اثرات فراسنج ماند را در آن در نظر نگرفت. آنچه مسلم است در فرآیند شکست هیدرولیکی هر دو فراسنج گرانشی و ماند بر روی طول، فشار و بازشدگی ترک موثر است؛ بنابراین در این پژوهش، با ارائه الگوی جدیدی به بررسی تاثیر این دو پارامتر در کنار هم پرداخته‌شد. این موضوع در پژوهش‌های گذشته بررسی نشد و به‌عنوان نوآوری در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفت. در ادامه، برای حل این مسئله از روش اغتشاش (به‌کارگرفته شده توسط گاراگاش) استفاده شد. برای به‌کار گرفتن این روش در مسئله جدید، نیاز به بازبینی دارد. در این پژوهش، اصلاحی بر روی روش اغتشاش نیز انجام شد که می‌توان از نوآوری‌های این پژوهش برشمرد.

عسگری و همکارانش در سال ۲۰۱۶ [۲۶] به کمک روش سری هموتوبی اثرات دو فراسنج گرانشی و ماند بر روی رشد ترک را بررسی کردند. در آن پژوهش برای حل معادله‌های انتگرالی پی در پی، از روش عددی نیوتن-کاتس استفاده شد. حل این معادله‌های در ترم‌های بالاتر بسیار پیچیده و گاهی غیرقابل حل است. بنابراین در این پژوهش با تغییر اساسی در روش حل کلی مسئله و روش حل معادله‌های انتگرالی تا حد زیادی باعث بهبود تحلیل گردید.

از لحاظ عملی، استخراج گرما از مخازن زمین گرمایی توسط تزریق سیال با گرانشی کم انجام می‌شود [۴۶]. همچنین در شرایط آزمایشگاهی، رژیم حاکم همواره سختی محیط خواهد بود حتی اگر یک سیال بسیار گرانشی به کار گرفته‌شود [۴۷]. بنابراین این کاربردها، نیاز به تحلیل شکست هیدرولیکی در رژیم سختی را ضروری می‌سازد.

۳-۲-۱- پیوستگی و بقای جرم

جریان سیال در ترک با قانون بقای جرم و اندازه حرکت مدل می شود. در این حالت حجم سیال ورودی یا تزریقی ($V(t)$) برابر است با حجم باز شده ترک:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^\ell w dx = wv, \quad \int_0^\ell w dx = \frac{1}{2} V(t), \quad V(t) = \int_0^t Q dt. \quad (1)$$

۳-۲-۲- معادله حرکت سیال

فرض می شود که حرکت سیال در جهت رشد ترک امتداد می یابد و جریان سیال در ترک آرام و سیال غیرقابل تراکم است [۹] و [۴۹].

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu v}{w^2} \right) \quad (2)$$

با صرف نظر کردن از ترم سمت چپ و یا ناچیز فرض کردن اثر ماند ($\rho = 0$) معادله روانسازی^۳، رابطه ۲ به معادله پویزنی^۴ به صورت زیر در می آید [۴۳]:

$$v = -\frac{w^2}{\mu'} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3)$$

لازم به ذکر است که در ادامه این پژوهش از معادله ی کلی ۲ استفاده شده است که در کارهای گذشته از معادله ۳ و یا از رابطه ۲ با فرض گرانیوی صفر استفاده شده است.

۳-۲-۳- معادله کشسانی

معادله کشسانی، یک رابطه انتگرالی است که بازشدگی ترک را با فشار خالص سیال داخل ترک مربوط می سازد. رابطه انتگرالی به شکل رابطه ۴ و به صورت یک معادله انتگرالی منفرد است. فرض رابطه این است که ترک به شکل شبه استاتیکی رشد می کند [۵۰].

$$w(x, t) = \frac{4}{\pi E'} \int_0^\ell G\left(\frac{x}{\ell}, \frac{x'}{\ell}\right) P(x', t) dx', \quad (4)$$

$$G(\xi, \xi') = \ln \left| \frac{\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{1-\xi'^2}}{\sqrt{1-\xi^2} - \sqrt{1-\xi'^2}} \right|.$$

۳-۲-۴- معیار انتشار ترک

مطابق با مکانیک شکست کشسان خطی برای مود شکست اول، $K_I = K_{IC}$ ، بازشدگی ترک در نوک با عبارت حدی ریشه دوم بیان می شود [۵۱]:

معادله کشسانی انتگرالی به میزان جابجایی منوط می شود. بنابراین تحلیل همبسته است و مسئله به صورت هیدرومکانیکی است.

• انتشار ترک در قالب مکانیک شکست خطی^۱ توصیف می شود. در این صورت معیار رشد ترک با برابر قرار دادن چقرمگی محیط با فاکتور شدت تنش در نوک ترک، مشخص می شود. در فرض LEFM از تغییر شکل های غیرکشسان در ناحیه مستعد جلوی ترک^۲ صرف نظر می شود چرا که در محیط شکننده این ناحیه بسیار کوچک است. این نکته قابل ذکر است که در نظر گرفتن پس افتادگی سیال و ناحیه مستعد جلوی ترک عملکرد مشابهی دارند. به طور کلی معمولاً اثرات این ناحیه بر رشد ترک بدلیل کوچک بودن ابعاد آن در مقایسه با مقادیر گسترش ترک و بزرگی تنش برجا در نظر گرفته نمی شود و یا اثرات آن به صورت سختی موثر اعمال می شود [۴۸].

• فرض می شود که نسبت بازشدگی ترک به طول ترک بسیار کوچک است در نتیجه می توان جریان سیال را یک بعدی در نظر گرفت. همچنین با توجه به عدد رینولدز کم و یا بسیار بزرگ، جریان سیال آرام فرض می شود.

• هیچ گونه تغییرحالتی در سیال رخ نمی دهد و سیال همواره نیوتنی و تراکم ناپذیر فرض شده است.

• به دلیل کوچک بودن شعاع چاه نسبت به طول ترک از اثرات آن صرف نظر می شود.

• رشد ترک در جهت تنش بیشینه و امتداد چاه موازی با تنش کمینه است.

دیگر فرضیات مسئله و شرایط مرزی آن مطابق مقاله گاراگاش [۴۶] نظر گرفته می شود.

۳-۲-۲- معادله های حاکم

معادله های حاکم در الگوی شکست هیدرولیکی شامل معیار رشد ترک، معادله الاستیسیته و معادله حرکت سیال است. این معادله های بر حسب طول نیم ترک ℓ ، بازشدگی ترک w ، سرعت متوسط سیال v ، و فشار خالص سیال P ، با در نظر گرفتن شکل متقارن الگوی ترک KGD بیان می شوند.

3 Lubrication approximation

4 Poiseuille equation

1 Linear elastic fracture mechanics (LEFM)

2 Process zone

$$G_k = \frac{K' L^{3/2}}{E' V}, G_\mu = \frac{\mu' L^6}{E' t V^3}, G_p = \frac{\rho L^4}{E' t^2 V}. \quad (11)$$

این فراسنج ها بی بعد هستند و به آن فراسنج های مقیاس شده می گویند. برای توضیحات بیشتر این فراسنج ها و روابط بین آنها می توانید به مرجع [۸] رجوع کنید.

در صورتی که مقیاس سختی مدنظر باشد آنگاه $G_k = 1$ و اگر مقیاس گرانی و یا ماند ملاک باشد آنگاه به ترتیب $G_p = 1$ و $G_\mu = 1$ در نظر گرفته می شود.

در نهایت $t\dot{L}/L$ و $t\dot{V}/V$ در معادله های ۸ و ۹ را می توان با عملگر زمان مطابق با به کارگیری رابطه زیر جایگزین کرد.

$$t \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{t\dot{G}_k}{G_k} \right) G_k \frac{\partial}{\partial G_k} + \left(\frac{t\dot{G}_\mu}{G_\mu} \right) G_\mu \frac{\partial}{\partial G_\mu} + \left(\frac{t\dot{G}_p}{G_p} \right) G_p \frac{\partial}{\partial G_p} \quad (12)$$

که در آن علامت نقطه در بالای فراسنج های مقیاسی به منظور مشتق آن نسبت به زمان t است. جدول ۱، روابط بین کمیت های مقیاس شده با فراسنج های اصلی مسئله را در سه رژیم گرانی، سختی و ماند نشان می دهد. تمام حالت های مقیاس شده در رژیم های مختلف باهم رابطه دارند که در بخش بعدی به تفسیر راجع آن پرداخته خواهد شد.

۳-۳-۱- ارتباط مقیاس ها

سه مقیاس اشاره شده در بخش قبل شکل های خاصی از بیان یک دسته و یک نوع معادله های یکسان است. در واقع مقیاسی برای حل مسئله به کار گرفته می شود که اثر فراسنج مربوط به آن مقیاس غالب باشد. مقیاس کردن چیزی جزء ارتباط دادن بین فراسنج های اساسی مسئله نیست بنابراین دور از انتظار نیست که فراسنج های بی بعد و مقیاس شده مطابق با روابط زیر در رژیم های مختلف باهم ارتباط داشته باشند.

$$K_m = M_k^{-1/4}, R_k = M_k^{2/3} R_m, M = M K^4 \quad (13)$$

همچنین می توان ارتباطی بین مقیاس های مختلف طولی و فراسنج های کوچک در رژیم های متعدد یافت.

$$\frac{L_m}{L_R} = K_m^{2/3} = M_k^{-1/6}, \frac{L_k}{L} = K^{-2/3}, \frac{L_R}{L} = M^{1/6} \quad (14)$$

$$\frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_R} = K_m^{-4/3} = M_k^{1/3}, \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon} = K^{4/3}, \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon} = M^{-1/3} \quad (15)$$

$$w = \frac{K'}{E'} (\ell - x)^{1/2} \quad \ell - x \ll \ell. \quad (5)$$

که در روابط بالا، E' ، μ' و K' به صورت زیر است:

$$E' = \frac{E}{1 - \nu^2}, \mu' = 12\mu, K' = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} K_{IC}. \quad (6)$$

۳-۳-۳- فرمول های بی بعد

برای ساده سازی حل دسته معادله های معادله های ۱ تا ۵ یک سری تغییر متغیرهایی به صورت زیر به کار گرفته می شوند. این تغییر متغیرها معادله های را بی بعد و مقیاس می کنند که نتیجتاً حل مسئله ساده تر می شود [۹، ۱۲، ۴۶، ۵۲ و ۵۳].

$$w(x, t) = \varepsilon(t) L(t) \Omega(\xi, t), P(x, t) = \varepsilon(t) E' \Pi(\xi, t), \ell(t) = L(t) \gamma(t), \quad (7)$$

$$\varepsilon(t) = L^{-2}(t) \nu(t), \quad \nu(x, t) = t^{-1} L(t) \vartheta(\xi, t),$$

$$\bar{\Omega}(\xi, t) = \Omega(\xi, t) / \gamma(t), \quad \bar{\vartheta}(\xi, t) = \vartheta(\xi, t) / \gamma(t).$$

که در آن $\xi = x/\ell(t) \in [0, 1]$ ، $\Omega(\xi, t)$ ، $\Pi(\xi, t)$ و $\gamma(t)$ به ترتیب مختصات مکانی، بازشدگی ترک، فشار خالص و ضریب نیم طول مقیاس شده ترک می باشد. این نکته قابل ذکر است که "علامت بار" نشانه مقیاس سازی مجدد آن کمیت است.

با به کارگیری تغییر متغیرهای فوق، معادله های ۱ تا ۵ به صورت زیر در می آیند:

• معادله بقای جرم

$$\frac{t\dot{V}}{V} \int_{\xi} \bar{\Omega} d\xi + \frac{t\dot{L}}{L} \xi \bar{\Omega} + \Psi_T = \bar{\Omega} \bar{\vartheta}, \quad \int_0^1 \bar{\Omega} d\xi = \frac{1}{2\gamma^2}, \quad (8)$$

$$\Psi_T = t \int_{\xi} \left[\dot{\bar{\Omega}} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \left(\bar{\Omega} - \xi \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \xi} \right) \right] d\xi.$$

• معادله حرکت

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = G_R \gamma^2 \bar{\vartheta} \left[\frac{t\dot{L}}{L} \left(1 - \frac{\xi}{\bar{\vartheta}} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \right) - 1 + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} + \Phi_T \right] + G_m \frac{\bar{\vartheta}}{\Omega^2}, \quad (9)$$

$$\Phi_T = \frac{t\dot{\gamma}}{\gamma} \left(1 - \frac{\xi}{\bar{\vartheta}} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \right) + \frac{t\dot{\bar{\vartheta}}}{\bar{\vartheta}}.$$

• معادله ی کشسانی و معیار انتشار ترک

$$\bar{\Omega}(\xi, t) = L^{-1} \{ \Pi \} (\xi, t) = \frac{4}{\pi} \int_{\xi} G(\xi, \xi') \Pi(\xi', t) d\xi', \quad (10)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega} = G_k \gamma^{-1/2}.$$

که در آن Ψ_T و Φ_T ترم های گذرا بخش معادله پیوستگی ۸ و اندازه حرکت ۹ هستند.

همچنین G_k ، G_μ و G_p در معادله های ۹ و ۱۰ به صورت زیر بیان می شوند:

جدول ۱. کمیت ها در مقیاس های مختلف سختی، گرانی و ماند
Table 1. Quantities corresponding to toughness, viscosity and inertia scalings

نوع مقیاس و رژیم	سختی، k	گرانی، m	ماند، ρ
ε فراسنج کوچک	$\varepsilon_k = \left(\frac{K'^4}{E'^4 V}\right)^{1/3}$	$\varepsilon_m = \left(\frac{\mu'}{E' t}\right)^{1/3}$	$\varepsilon_p = \frac{\rho^{1/2} V^{1/2}}{E'^{1/2} t}$
L طول مقیاس شده	$L_k = \left(\frac{E' V}{K'}\right)^{2/3}$	$L_m = \left(\frac{E' V^3 t}{\mu'}\right)^{1/6}$	$L_p = \left(\frac{E' V t^2}{\rho}\right)^{1/4}$
G _k کمیت سختی	۱	$K'_m = \frac{K'}{E'} \left(\frac{E' t}{\mu' V}\right)^{1/4}$	$K'_p = \frac{K'}{E'} \left(\frac{E' t^2}{\rho V^{5/3}}\right)^{3/8}$
G _m کمیت گرانی	$\mathcal{M}_k = \frac{\mu' V}{E' t} \left(\frac{E'}{K'}\right)^4$	۱	$\mathcal{M}_p = \frac{\mu' E'^{1/2} t^2}{\rho^{3/2} V^{3/2}}$
G _p کمیت ماند	$\mathcal{R}_k = \frac{\rho E'^{5/3} V^{5/3}}{K'^{8/3} t^2}$	$\mathcal{R}_m = \frac{\rho V}{\mu'^{2/3} E'^{1/3} t^{4/3}} \left(\frac{E'}{V}\right)^{1/4}$	۱

۳-۴- ایده و روش حل

در این پژوهش، از روش اغتشاش اصلاح شده^۲ برای یافتن جواب تقریبی انتشار صفحه ای ترک هیدرولیکی استفاده می شود. این روش در این پژوهش برای حل معادله های همبسته و غیرخطی با وجود چند فراسنج پیشنهاد می شود. روش اغتشاش کلاسیک برای حل معادله های غیرخطی موقعی به کار می رود که در آن معادله های یک فراسنج کوچک وجود داشته باشد [۵۴]. بنابراین، با توجه به فراسنج های بی بعد G_k، G_i و G_n، می توان فرض کرد:

$$f(\xi, G_i) = f_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n \\ i_{1,2,\dots,n} = 1,2,3 \text{ or } k, \mu, \rho}} (G_{i_1} G_{i_2} \dots G_{i_n} f^{(i_1 i_2 \dots i_n)}(\xi)) \quad (20)$$

$$f(\xi, G_i) = \{\bar{\Omega}(\xi, G_i), \Pi(\xi, G_i), \bar{\theta}(\xi, G_i), \gamma(G_i)\}, \quad i = k, \mu, \rho$$

که در آن f(ξ, G_i) تابع مجهولات مسئله است.

۳-۵- حل در مقیاس سختی

همان طور که اشاره شد، در مقیاس سختی، G_k = 1 است و متعاقباً حل در مقیاس سختی، با استفاده از روش اغتشاش به دو فراسنج گرانی و ماند M_k و ماند R_k بستگی دارد که برای راحتی کار اندیس k را از دو فراسنج حذف می کنیم. بنابراین رابطه ۲۰ در حل مقیاس سختی به صورت زیر کاهش می یابد:

ارتباط بین فاکتورهای مقیاسی ε's و L's و فراسنج های گسترشی^۱ K's, M's و R's را نیز می توان با مقیاسی زمانی نیز در نظر گرفت. با یک بررسی بر روی گروه های مقیاس شده می توان نشان داد که به ازای هر یک از گروه ها می توان یک مقیاس زمانی تعریف کرد. این نکته قابل ذکر است که در اینجا فرض می شود که حجم ورودی سیال تابع خطی نسبت به زمان است و به عبارت دیگر دبی ورودی همواره مقداری ثابت و برابر Q₀ است.

$$t_m = \frac{\mu'}{E'}, \quad t_k = \frac{K'^4}{E'^4 Q_0}, \quad t_p = \frac{\rho Q_0}{E'} \quad (16)$$

با این سه مقیاس زمان می توان فاکتورهای مقیاسی را به دست آورد.

$$\varepsilon_m = \left(\frac{t_m}{t}\right)^{1/3}, \quad \varepsilon_k = \left(\frac{t_k}{t}\right)^{1/3}, \quad \varepsilon_p = \left(\frac{t_p}{t}\right)^{1/2} \quad (17)$$

$$L_m = \left(\frac{t_m}{t}\right)^{-2/3} \bar{L}_m, \quad L_k = \left(\frac{t_k}{t}\right)^{-2/3} \bar{L}_k, \quad L_p = \left(\frac{t_p}{t}\right)^{-3/4} \bar{L}_p \quad (18)$$

که در آن $\bar{L}_m, \bar{L}_k, \bar{L}_n$ مقیاس طول ثابت هستند که از رابطه زیر حاصل می شود:

$$\bar{L}_m = \left(\frac{\mu' Q_0}{E'}\right)^{1/2}, \quad \bar{L}_k = \left(\frac{K'}{E'}\right)^2, \quad \bar{L}_p = \left(\frac{\rho Q_0^2}{E'}\right)^{1/2} \quad (19)$$

\mathcal{MR} :

$$\frac{1}{3\gamma_{[0,0]}^2} \left(2 \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[0,0]} d\xi + \xi \bar{\Omega}_{[0,0]} \right) (\gamma_{[1,1]} \gamma_{[0,0]} - \gamma_{[0,1]} \gamma_{[1,0]}) \quad (28)$$

$$+ \frac{\gamma_{[0,1]}}{3\gamma_{[0,0]}^2} \left(2 \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[1,0]} d\xi + \xi \bar{\Omega}_{[1,0]} \right) - \frac{2}{3} \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[1,1]} d\xi - \frac{2}{3} \xi \bar{\Omega}_{[1,1]} + \bar{q}_{[1,1]} \bar{\Omega}_{[0,0]} + \bar{q}_{[0,0]} \bar{\Omega}_{[1,1]} + \bar{q}_{[1,0]} \bar{\Omega}_{[1,0]} + \bar{q}_{[0,1]} \bar{\Omega}_{[0,1]} = 0$$

$$\gamma_{[1,1]} = \frac{3\gamma_{[1,0]}\gamma_{[0,1]} - \gamma_{[0,0]}^3 \int_0^1 \bar{\Omega}_{[1,1]} d\xi}{\gamma_{[0,0]}}$$

$$\frac{\partial \Pi_{[1,1]}}{\partial \xi} = \frac{1}{\bar{\Omega}_{[0,0]}^3} \left(-\bar{q}_{[0,1]} \bar{\Omega}_{[0,0]} + 2\bar{q}_{[0,0]} \bar{\Omega}_{[0,1]} + \frac{\gamma_{[0,0]}^2}{3} \left[\frac{\partial \bar{q}_{[1,0]}}{\partial \xi} (2\xi - 3\bar{q}_{[0,0]}) + \left(1 - 3 \frac{\partial \bar{q}_{[0,0]}}{\partial \xi} \right) \bar{q}_{[1,0]} \right] \right) + \frac{2}{3} \gamma_{[0,0]} \gamma_{[1,0]} \left(\frac{\partial \bar{q}_{[0,0]}}{\partial \xi} (2\xi - 3\bar{q}_{[0,0]}) + \bar{q}_{[0,0]} \right)$$

$$\bar{\Omega}_{[1,1]}(\xi) = L^{-1} \{ \Pi_{[1,1]} \}(\xi), \quad \lim_{\xi \rightarrow 1} (1-\xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_{[1,1]} = \frac{3}{4} \gamma_{[1,0]} \gamma_{[0,1]} \gamma_{[0,0]}^{-5/2} - \frac{1}{2} \gamma_{[1,1]} \gamma_{[0,0]}^{-3/2}$$

به دلیل حجیم بودن معادله‌های ترم‌های بالاتر از آوردن آن در اینجا خوداری شده‌است. دسته معادله‌های انتگرالی-دیفرانسیلی فوق به صورت متوالی از رابطه ۲۵ تا ۲۸ حل می‌شوند. برای مختصرسازی در اینجا مجدداً از آوردن جزئیات و روند حل آن‌ها نیز صرف نظر شده‌است.

$$\bar{\Omega}_{[0,0]} = \frac{1}{2} \pi^{1/3} \sqrt{1-\xi^2}, \quad \Pi_{[0,0]} = \frac{\pi^{1/3}}{8}, \quad \bar{q}_{[0,0]} = \frac{1}{6} \xi + \frac{1}{2} \frac{\cos^{-1}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \gamma_{[0,0]} = \frac{2}{\pi^{2/3}} \quad (29)$$

$$\Pi_{[1,0]} = \frac{8}{3\pi^{2/3}} \left(\frac{1}{24} + \ln(4\sqrt{1-\xi^2}) - \frac{3}{4} \frac{\xi \cos^{-1} \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right), \quad (30)$$

$$\bar{\Omega}_{[1,0]} = \frac{8}{3\pi^{2/3}} \left(2\pi - 4\xi \sin^{-1} \xi - \left(\frac{5}{6} - \ln 2 \right) \sqrt{1-\xi^2} - \frac{3}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{1-\xi^2}}{1 - \sqrt{1-\xi^2} - \sqrt{1-\xi^2}} \right) \right),$$

$$\gamma_{[1,0]} = -\frac{32(1+6\ln 2)}{9\pi^{5/3}}$$

$$\Pi_{[0,1]} = \frac{1}{6\pi^{4/3}} \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{5\xi^2}{3} + \frac{6\xi \cos^{-1} \xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{(1+2\xi^2)(\cos^{-1} \xi)^2}{1-\xi^2} - \frac{21\pi^2 - 13}{36} \right) \quad (31)$$

$$\gamma_{[0,1]} = \frac{24\pi^2 - 172}{27\pi^{7/3}}$$

ترم‌های $f_{[0,0]}(\xi)$ ، $f_{[1,0]}(\xi)$ و $f_{[0,1]}(\xi)$ به ترتیب ترم گرانروی-مانند صفر، ترم گرانروی کوچک و ماند صفر و ترم گرانروی صفر و ماند کوچک هستند که در مرجع [۸] به تفسیر در مورد حل آن‌ها بحث و بررسی شده‌است. برای تعیین ضرایب ترم‌های بالاتر از بسط ۲۱، به طور مثال برای مقادیر $m, n \geq 2$ و $f_{[1,1]}(\xi)$ محاسبه این ترم‌ها به دلیل برخورد با انتگرال‌های تکینه، به روش تحلیلی بسیار پیچیده و غیرممکن به نظر می‌رسد؛ بنابراین در اینجا این انتگرال‌ها به روش عددی با کمک کد نوشته شده با نرم‌افزار Mathematica محاسبه

$$f(\xi, \mathcal{M}, \mathcal{R}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}^m \mathcal{R}^n f_{[m,n]}(\xi) \quad (21)$$

که در آن $\{f_{[0,0]}, f_{[m,0]}, f_{[0,n]}, f_{[m,n]}\} \rightarrow \forall m \wedge n \in \langle N = \{1, 2, 3, \dots\} \rangle$ به ترتیب از چپ به راست، ترم گرانروی-مانند صفر، ترم m از گرانروی کوچک و ماند صفر، ترم n از گرانروی صفر و ماند کوچک و ترم اندرکنش^۱ از مرتبه $[m, n]$ هستند.

با به کارگیری معادله ۱۲، معادله‌های ۸ تا ۱۰ در مقیاس سختی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\int_{\xi}^1 \bar{\Omega} d\xi + \frac{2}{3} \xi \bar{\Omega} + \Psi_r = \bar{\Omega} \bar{q}, \quad \int_0^1 \bar{\Omega} d\xi = \frac{1}{2\gamma^2}, \quad (22)$$

$$\Psi_r = -\frac{1}{3} \int_{\xi}^1 \left[\mathcal{R} \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \mathcal{R}} + \frac{\mathcal{R}}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \mathcal{R}} \left(\bar{\Omega} - \xi \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \xi} \right) \right] d\xi.$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = \frac{1}{3} \mathcal{R} \gamma^2 \bar{q} \left[1 + \frac{\mathcal{R}}{\gamma \bar{q}} \frac{\partial(\gamma \bar{q})}{\partial \mathcal{R}} + \left(\left(2 - \frac{\mathcal{R}}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial \mathcal{R}} \right) \frac{\xi}{\bar{q}} - 3 \right) \frac{\partial \bar{q}}{\partial \xi} - \mathcal{M} \frac{\bar{q}}{\bar{\Omega}} \right]. \quad (23)$$

$$\bar{\Omega}(\xi, t) = L^{-1} \{ \Pi \}(\xi, t), \quad \lim_{\xi \rightarrow 1} (1-\xi)^{-1/2} \bar{\Omega} = \gamma^{-1/2}. \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه ۲۱ در معادله‌های ۲۲ تا ۲۴ و مرتب کردن آن‌ها بر اساس ضرایب \mathcal{M}, \mathcal{R} و $\mathcal{M} \mathcal{R}$ در مقیاس سختی $G_k = 1$ داریم:

ترم گرانروی-مانند صفر $f_{[0,0]}(\xi)$:

$$1: \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[0,0]} d\xi + \frac{2}{3} \xi \bar{\Omega}_{[0,0]} - \bar{\Omega}_{[0,0]} \bar{q}_{[0,0]} = 0, \quad \gamma_{[0,0]}^{-2} = 2 \int_0^1 \bar{\Omega}_{[0,0]} d\xi, \quad \frac{\partial \Pi_{[0,0]}}{\partial \xi} = 0, \quad (25)$$

$$\bar{\Omega}_{[0,0]}(\xi) = L^{-1} \{ \Pi_{[0,0]} \}(\xi), \quad \lim_{\xi \rightarrow 1} (1-\xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_{[0,0]} = \gamma_{[0,0]}^{-1/2}$$

ترم اول گرانروی کوچک و ماند صفر $f_{[1,0]}(\xi)$:

$$\mathcal{M}: \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[1,0]} d\xi + \frac{2}{3} \xi \bar{\Omega}_{[1,0]} = \bar{\Omega}_{[1,0]} \bar{q}_{[0,0]} + \bar{\Omega}_{[0,0]} \bar{q}_{[1,0]}, \quad (26)$$

$$\gamma_{[1,0]} = -\gamma_{[0,0]}^3 \int_0^1 \bar{\Omega}_{[1,0]} d\xi, \quad \frac{\partial \Pi_{[1,0]}}{\partial \xi} = \frac{\bar{q}_{[0,0]}}{\bar{\Omega}_{[0,0]}^2},$$

$$\bar{\Omega}_{[1,0]}(\xi) = L^{-1} \{ \Pi_{[1,0]} \}(\xi), \quad \lim_{\xi \rightarrow 1} (1-\xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_{[1,0]} = -\frac{1}{2} \gamma_{[1,0]} \gamma_{[0,0]}^{-3/2}$$

ترم اول گرانروی صفر و ماند کوچک $f_{[0,1]}(\xi)$:

$$\mathcal{R}: -\frac{\gamma_{[0,1]}}{3\gamma_{[0,0]}^2} \left(2 \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[0,0]} d\xi + \xi \bar{\Omega}_{[0,0]} \right) + \frac{2}{3} \int_{\xi}^1 \bar{\Omega}_{[0,1]} d\xi - \bar{q}_{[0,1]} \bar{\Omega}_{[0,0]} + \left(\frac{2}{3} \xi - 3\bar{q}_{[0,0]} \right) \bar{\Omega}_{[0,1]} \quad (27)$$

$$\gamma_{[0,1]} = -\gamma_{[0,0]}^3 \int_0^1 \bar{\Omega}_{[0,1]} d\xi, \quad \frac{\partial \Pi_{[0,1]}}{\partial \xi} = \frac{1}{3} \gamma_{[0,0]}^2 \bar{q}_{[0,0]} \left[1 + \left(2 \frac{\xi}{\bar{q}_{[0,0]}} - 3 \right) \frac{\partial \bar{q}_{[0,0]}}{\partial \xi} \right]$$

$$\bar{\Omega}_{[0,1]}(\xi) = L^{-1} \{ \Pi_{[0,1]} \}(\xi), \quad \lim_{\xi \rightarrow 1} (1-\xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_{[0,1]} = -\frac{1}{2} \gamma_{[0,1]} \gamma_{[0,0]}^{-3/2}$$

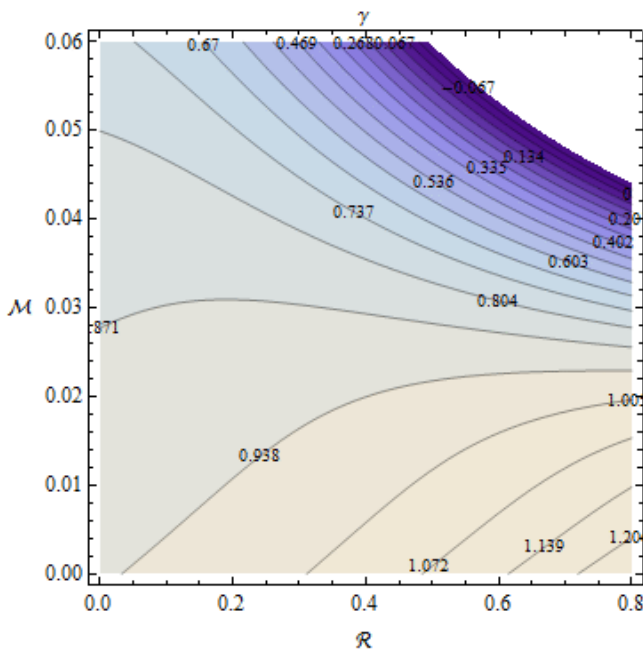
ترم اندرکنش مرتبه ی اول $f_{[1,1]}(\xi)$:

جدول ۲. ضرایب محاسبه شده از ترم $O(\mathcal{M}^m, \mathcal{R}^n)$ ، $m, n \rightarrow \{0, 1, \dots, 5\}$ در معادله ۲۱ از نیمه طول مقیاس شده $\gamma_{[m,n]}$.

Table 2. Numerical values of coefficients of the $O(\mathcal{M}^m, \mathcal{R}^n)$ terms ($m, n \rightarrow \{0, 1, \dots, 5\}$) in the expansion [Eq. (21)] of crack half-length $\gamma_{[m,n]}$

$\gamma_{[m,n]}$	$n \downarrow$	$m \rightarrow$	*	۱	۲	۳	۴	۵
*			۰.۹۳۲۳۸۸	-۲.۷۲۱۹۴۹	۳۷.۰۰۰۴۲۴	-۶۷۱.۹۷۸۳	۱۴۰۰۳.۹۰۱۴	-۳۱۶۱۶.۱۶۱
۱			۰.۱۶۶۲۱۴	-۳.۷۶۲۴۵۶	۹۶.۳۰۵۳۵۰	-۲۵۶۸.۹۳۰۹	۷۰۱۰۶.۲۸۶	
۲			۰.۱۵۴۰۲۸	-۶.۷۵۴۰۶۹	۲۴۴.۶۶۴۵۹۷	-۸۲۹۹.۶۳۷۵		
۳			۰.۲۰۰۶۶۰۵	-۱۳.۰۰۱۰۶۹	۶۰۵.۴۴۴۰۲۳	-۲۴۶۹۵.۸۷۵		
۴			۰.۳۰۵۲۹۹۷	-۲۵.۹۲۴۰۵۷				
۵			۰.۵۰۲۸۳۴۱					

* این مقادیر در مرجع [۸] محاسبه شده است.



شکل ۲. کنتور طول ترک مقیاس شده بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانروی و ماند

Fig. 2. contour of the crack half-length in terms of different values of viscosity and inertia parameters

نتیجه گرفت که میزان طول ترک در مقادیر کوچک تری از فراسنج گرانروی با افزایش فراسنج ماند با شرط $\mathcal{R} \ll 1$ افزایش می یابد و برای $\mathcal{M} = 0.0275$ تقریباً تغییرات ناچیز است. برای حالت مقادیر بزرگتر $\mathcal{M} > 0.0275$ با افزایش فراسنج ماند میزان طول ترک

خواهند شد و سپس برای تعیین تابع حاصل از انتگرال از تکنیک درون یابی^۱ استفاده می شود. در نهایت با تعیین این ترم ها، میزان بازشدگی، طول رشد و فشار بر روی ترک تعیین می شود. به طور مثال بازشدگی مقیاس شده از رابطه زیر تعیین می شود:

$$\Omega(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}^m \mathcal{R}^n \bar{\Omega}_{[m,n]}(\xi) \times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{M}^m \mathcal{R}^n \gamma_{[m,n]} \quad (32)$$

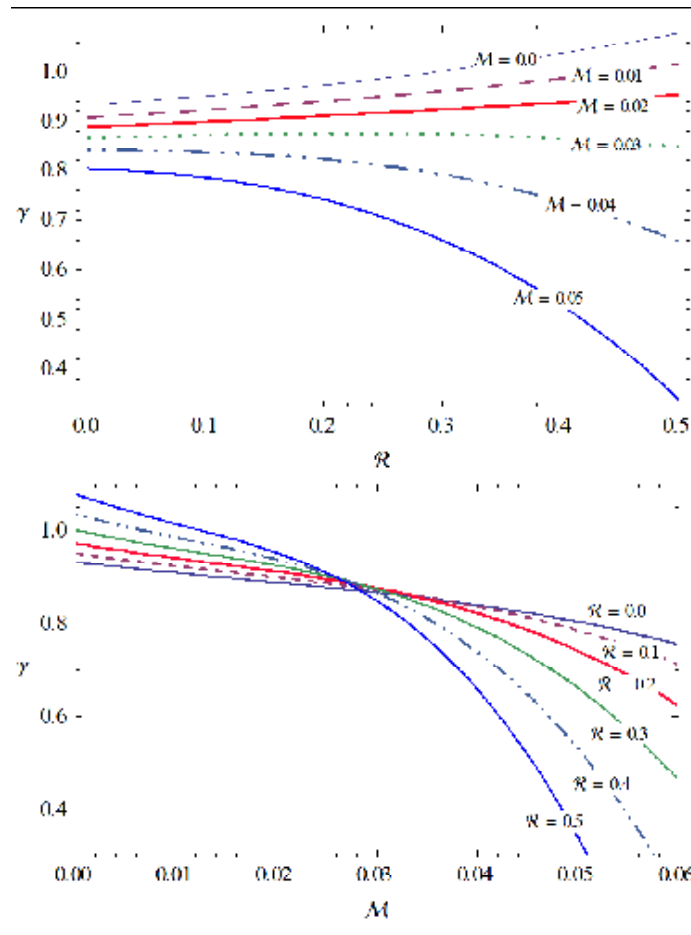
۴- نتایج و بحث

در این پژوهش، راه حل کلی مسئله با در نظر گرفتن اندرکنش بین فراسنج های ماند و گرانروی در مقیاس سختی ارائه شد؛ بنابراین اگر یکی از فراسنج های ماند و یا گرانروی صفر در نظر گرفته شود؛ آنگاه هیچ اندرکنشی بین فراسنج ها وجود ندارد و راه حل مسئله در این تحقیق منجر به حل ارائه شده در مرجع گاراگاش [۴۶] می شود. نتایج تفسیری این پژوهش به شرح زیر است:

۴-۱- ضریب طول نیم ترک مقیاس شده

نتایج بر حسب ترم های مختلفی از مقادیر n و m برای ضریب طول نیم ترک مقیاس شده در جدول ۲ آورده شده است. همچنین شکل ۲ کنتور طول مقیاس شده بر حسب مقادیر مختلف فراسنج های گرانروی و ماند را نشان می دهد. از این شکل می توان

1 interpolation



شکل ۳. روند تغییرات ضریب طول نیم ترک مقیاس شده، γ ، بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج ها گرانیوی، \mathcal{M} ، و ماند، \mathcal{R} ، با در نظرگیری اثر اندرکنشی

Fig. 3. Variation of dimensionless crack half-length, γ , versus dimensionless viscosity, \mathcal{M} and inertia parameter, \mathcal{R} , considering cross term.

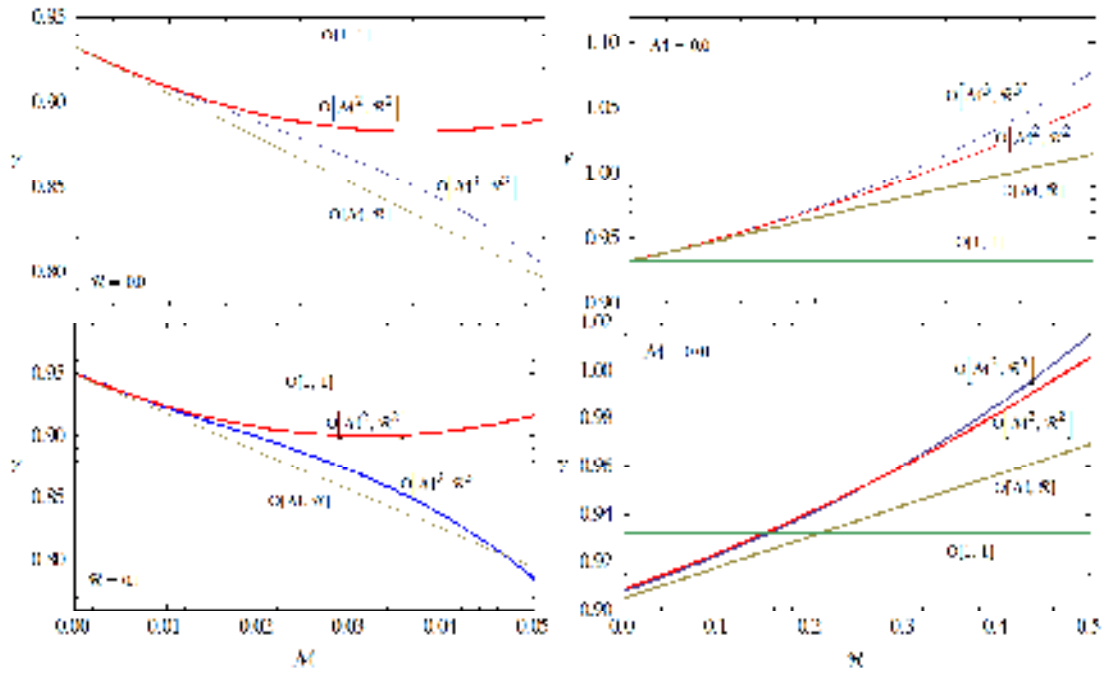
اثرات فراسنج ماند با فرض جریان آرام می باشد. اگرچه نادیده گرفتن اثرات ماند حتی می تواند در شرایط خاصی خطایی معادل ۳۰٪ به تحلیل مسئله وارد کند.

شکل ۴، ضریب طول نیم ترک مقیاس شده، γ ، بر حسب فراسنج ماند با درجه تقریب مختلف $O(\mathcal{M}^m, \mathcal{R}^n)$ ، $m, n \rightarrow \{0, 1, \dots, 3\}$ در مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانیوی و ماند را نشان می دهد. همان طور که می بیند، ضریب طول نیم ترک مقیاس شده در تقریب مرتبه صفر به صورت ثابت است و فراسنج ها هیچ گونه اثری بر روی میزان رشد نخواهد گذاشت. ترم های بالاتر اثرات این فراسنج ها را در نظر می گیرند.

شکل ۵، مقایسه ای بین ضریب طول مقیاس شده، γ ، با در نظر گرفتن اثر ترم اندرکنشی (این پژوهش) و بدون این اثر [۸] در

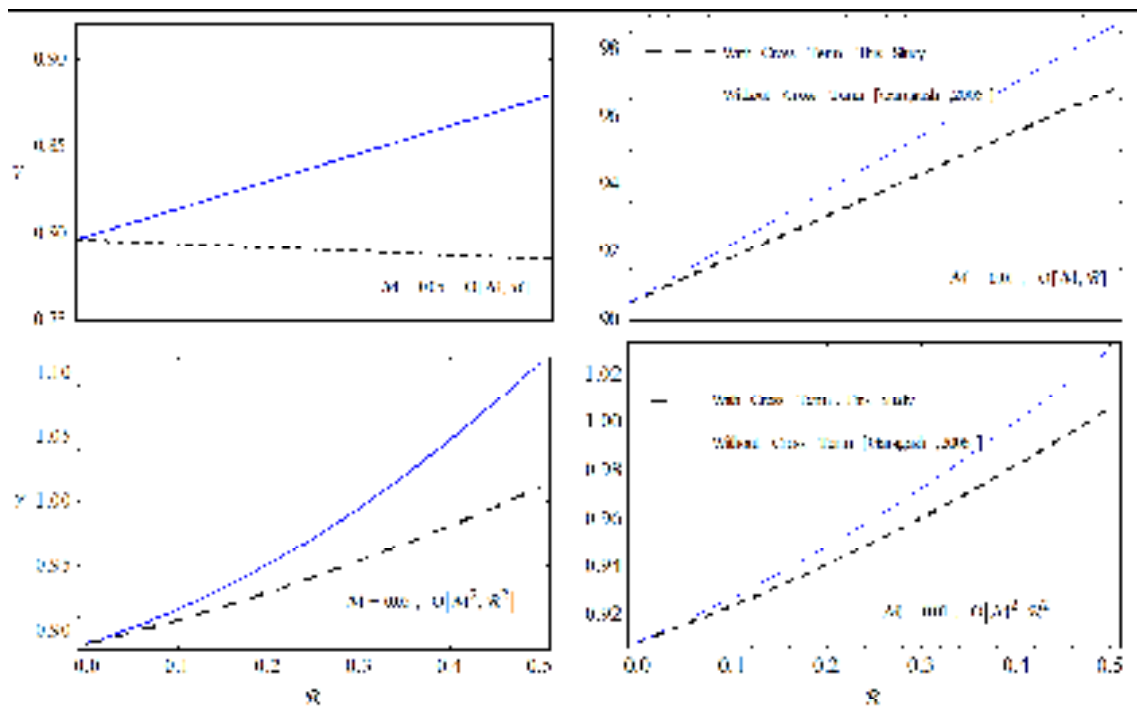
حالت کاهشی دارد.

شکل ۳، روند تغییرات ضریب طول نیم ترک، γ ، بر حسب مقادیر مختلفی از گرانیوی، $\mathcal{M} = \{0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05\}$ ، و ماند، $\mathcal{R} = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ ، با در نظر گرفتن اثر اندرکنش بین فراسنج های ذکر شده را نشان می دهد. با توجه به این شکل، طول نیم ترک مقیاس شده با افزایش گرانیوی کاهش می یابد و روند کاهشی با افزایش فراسنج ماند شدت می یابد. به عبارت دیگر با افزایش \mathcal{R} شیب تغییرات نمودار $\gamma - \mathcal{M}$ افزایش می یابد. در مقادیر بزرگتری از گرانیوی، افزایش فراسنج ماند منجر به کاهش طول نیم ترک مقیاس شده می شود. از طرف دیگر، اثر کاهنده فراسنج گرانیوی بیشتر از اثر افزایشنده ماند است؛ بنابراین می توان نتیجه گرفت که اثرات گرانیوی سیال در فرآیند تزریق شکست هیدرولیکی بیشتر از



شکل ۴. ضریب طول نیم ترک مقیاس شده، γ ، بر حسب فراسنج ماند با درجه تقریب مختلف $O(\mathcal{M}^m, \mathcal{R}^n)$ ، $m, n \rightarrow \{0, 1, \dots, 3\}$ ، در مقادیر مختلفی از فراسنج‌های گرانیوی و ماند اشاره شده در گراف

Fig. 4. Variation of dimensionless crack half-length, γ , versus inertia parameter, \mathcal{R} , and dimensionless viscosity, \mathcal{M} with various order approximation of $O(\mathcal{M}^m, \mathcal{R}^n)$, $m, n \rightarrow \{0, 1, \dots, 3\}$.



شکل ۵. مقایسه طول نیم ترک مقیاس شده، γ ، با در نظر گرفتن اثر اندرکنش بین فراسنج‌های گرانیوی و ماند (این تحقیق) و بدون اثر اندرکنشی [۸] در درجه تقریب مختلف.

Fig. 5. Comparison of dimensionless crack half-length, γ , considering the effect of interaction between viscosity and inertia parameters (this study) and without interaction effect [8] in various order approximation.

جدول ۳. ضرایب محاسبه شده از ترم $O(\mathcal{M}^m, \mathcal{R}^n)$ ، $m, n \rightarrow \{0, 1, \dots, 5\}$ در معادله ۲۱ از فشار خالص مقیاس شده در محل تزریق سیال $\Pi_{0[m,n]}$

Table 3. Numerical values of coefficients of the $O(\mathcal{M}^m, \mathcal{R}^n)$ terms ($m, n \rightarrow \{0, 1, \dots, 5\}$) in the expansion [Eq. (21)] of net pressure $\Pi_{0[m,n]}$ at the inlet.

$\Pi_{0[m,n]}$	$n \rightarrow$	$m \rightarrow$	*	۱	۲	۳	۴	۵
*	*	*	۰.۱۸۳۰۷۴	۱.۷۷۵۲۱۹	-۱۸.۹۴۰۴۰۰	۳۱۴.۹۴۵۷۶۳	-۶۳۱۱.۳۵۱۴	۱۳۹۴۰۶.۹۸۰
۱	۱	۱	-۰.۱۹۵۴۶۴	۲.۴۴۴۳۶۷	-۵۳.۴۵۷۳۲۹	۱۳۳۲.۳۶۱۹۰		
۲	۲	۲	-۰.۱۴۴۱۸۱۶	۵.۰۵۰۹۳۲	-۱۶۲.۳۲۰۵۹	۵۱۴۹.۰۳۳۲۴		
۳	۳	۳	-۰.۲۰۵۱۱۹	۱۱.۶۱۷۹۳۵	-۴۹۵.۶۰۷۶۱	۱۹۰۷۷.۱۲۳۹		
۴	۴	۴	-۰.۳۸۱۵۵۱۹					
۵	۵	۵	-۰.۸۱۶۷۵۳					

* این مقادیر در مرجع [۸] محاسبه شده است.

عددی محاسبه خواهند شد. ذکر این نکته ضروری است که در روش اغتشاش برای تعیین ترم های بالاتر نیاز به داشتن تابعی از ترم های پایین تر جواب ها است، بنابراین برای تعیین تابع حاصل از حل عددی انتگرال از تکنیک درونیایی استفاده می شود و با این روش تابع مراتب پایین تر را با درجه ای از تقریب تعیین می کنیم.

شکل ۱۰ تغییرات فشار خالص سیال داخل ترک، Π ، در محل تزریق بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانیوی، \mathcal{M} ، و ماند، \mathcal{R} را نشان می دهد. در یک مقدار ثابت از فراسنج ماند \mathcal{R} ، با افزایش فراسنج گرانیوی \mathcal{M} ، میزان فشار خالص در محل تزریق افزایش می یابد. سیر صعودی با افزایش فراسنج ماند و گرانیوی شدت می یابد.

همچنین از شکل ۱۰ می توان نتیجه گرفت که در یک مقدار ثابت از فراسنج گرانیوی، با افزایش فراسنج ماند، مقادیر فشار در محل تزریق هم به صورت افزایشی و هم به صورت کاهش می یابد. افزایش یا کاهش بسته به مقدار فراسنج ها دارد. یعنی در مقادیر بزرگتری از این فراسنج ها سیر افزایشی است و برعکس.

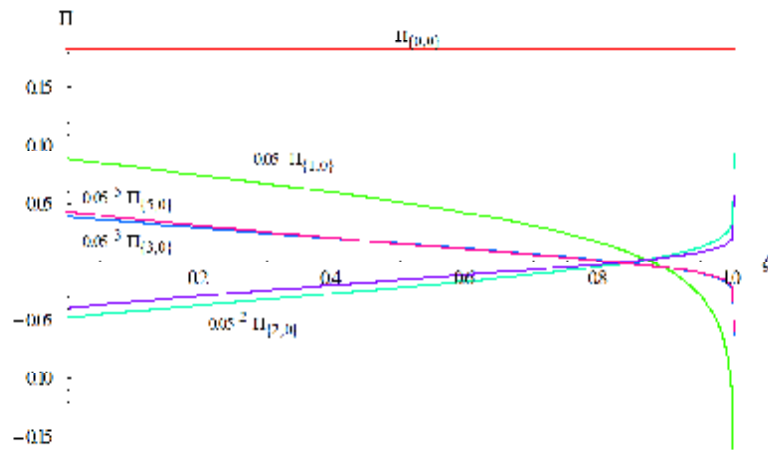
شکل های ۱۱ و ۱۲ به ترتیب فشار خالص مقیاس شده سیال بر روی سطوح ترک، Π ، از حل مرتبه سه با فراسنج ماند صفر و گرانیوی مختلف $\mathcal{M} = \{0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$ و فراسنج گرانیوی صفر و ماند مختلف $\mathcal{R} = \{0, 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$ را نشان می دهد.

درجه تقریب های مختلف را نشان می دهد. در این شکل به خوبی قابل مشاهده است که اختلافات بین دو پژوهش با افزایش یکی از فراسنج های ماند و یا گرانیوی افزایش می یابد. با توجه به شکل اشاره شده، در نظر گرفتن ترم مضروبی باعث برآورد کمتری از طول ترک خواهد شد. همچنین از این شکل قابل استنباط است که با افزایش درجه تقریب این اختلافات تا اندازه ای کاهش می یابد.

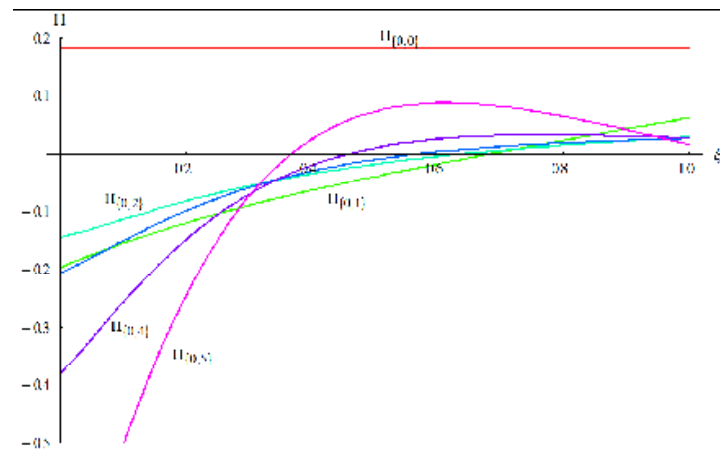
۴-۲- فشار خالص مقیاس شده سیال بر روی سطوح ترک

مقادیر فشار خالص سیال در نقطه محل تزریق ترک، $\Pi_{0[m,n]}$ ، بر حسب ترم های مختلفی از مقادیر n و m در جدول ۳ آورده شده است. اگرچه این جدول، یک افزایش در مقادیر فشار، با افزایش درجه n و m نشان می دهد ولی بدلیل فرض کوچک ماندن فراسنج های گرانیوی و ماند، توان مرتبه n و یا m آن ها بسیار کوچک هستند و اثرات ترم های بالاتر به تناسب کاهش می یابد. شکل های ۶ تا ۹ به ترتیب، ترم های مرتبه صفر، ترم های اندرکنشی از مرتبه اول تا سوم فشار خالص سیال داخل ترک، Π ، را نشان می دهد.

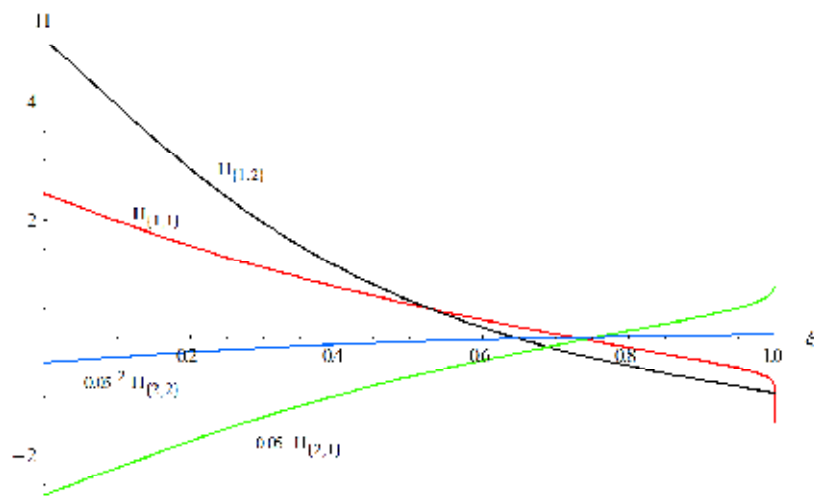
محاسبه ضرایب ترم های بالاتر به دلیل پیچیدگی دسته معادله های مربوط به ترم های اندرکنشی و برخورد با انتگرال های تکینه به روش تحلیلی غیرممکن است بنابراین در اینجا این انتگرال ها به روش



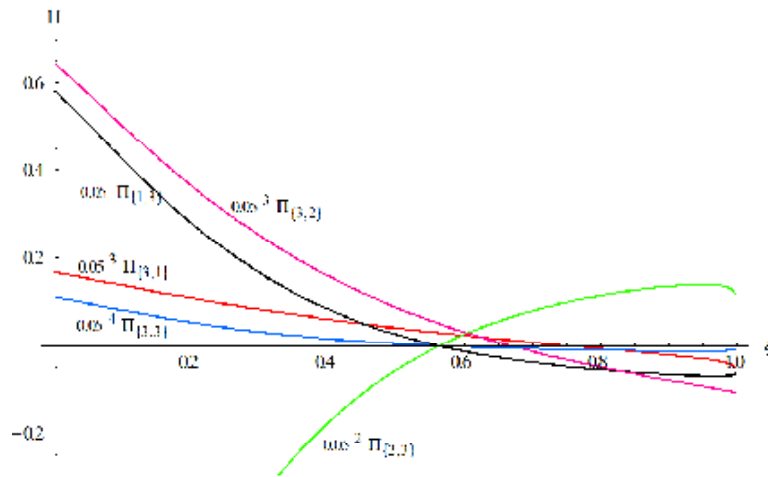
شکل ۶. ترم های مرتبه صفر و بدون مانند مرتبه های اول تا پنجم فشار خالص سیال داخل ترک، Π .
 Fig. 6. Zero- to the fifth-order terms of net-pressure, Π , the inside of crack for zero- inertia



شکل ۷. ترم های مرتبه صفر و بدون گرانیوی مرتبه های اول تا پنجم فشار خالص سیال داخل ترک، Π .
 Fig. 7. Zero- to the fifth-order (zero-viscosity) terms of net-pressure, Π , the inside of crack

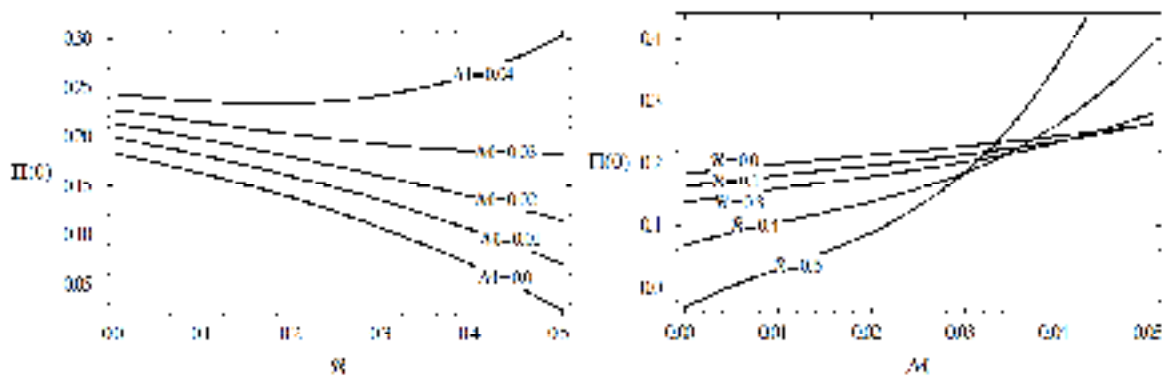


شکل ۸. ترم های اندرکنشی مرتبه اول و دوم فشار خالص سیال داخل ترک، Π .
 Fig. 8. First and second order Cross terms of net-pressure, Π , the inside of crack



شکل ۹. ترم های اندرکنشی مرتبه سوم فشار خالص سیال داخل ترک، Π .

Fig. 9. Third order Cross terms of net-pressure, Π , the inside of crack



شکل ۱۰. تغییرات فشار خالص سیال داخل ترک، Π ، در محل تزریق بر حسب مقادیر مختلفی از فرانسج های گرانروی M ، و ماند، R .

Fig. 10. Dependence of dimensionless net pressure, Π , at the inlet on the dimensionless viscosity M , and inertia R .

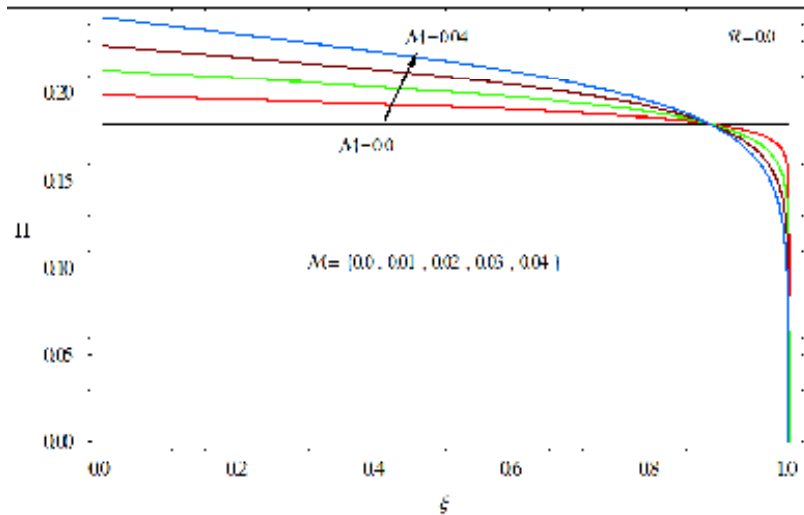
باعث می شود که یک مقدار بیشینه در روند منحنی فشار-مکان به وجود بیاید (شکل های ۱۳ و ۱۴). مطابق با شکل ۱۳، با افزایش گرانروی اختلاف بین فشار نوک و محل تزریق در یک ماند ثابت افزایش می یابد.

افزایش فرانسج ماند در مقادیر کوچک تری از گرانروی موجب کاهش فشار در اطراف محل تزریق و میانه ترک و افزایش فشار در اطراف نوک ترک می شود، و در نواحی گرانروی $M \approx 0.03$ از روند خاصی پیروی نمی کند در حالیکه با افزایش تدریجی گرانروی مثلاً در $M \approx 0.04$ میزان فشار در محل تزریق افزایش و در نواحی نوک ترک کاهش می یابد. این نتایج به دلیل وجود ترم اندرکنشی R و

نتایج این شکل ها نیز در مرجع [۸] نیز آورده شده است. از آنجایی یکی از دو فرانسج صفر در نظر گرفته شد، بنابراین اندرکنشی بین فرانسج ها وجود ندارد به عبارت دیگر تمام ضرایب ترم های اندرکنش برابر با صفر است.

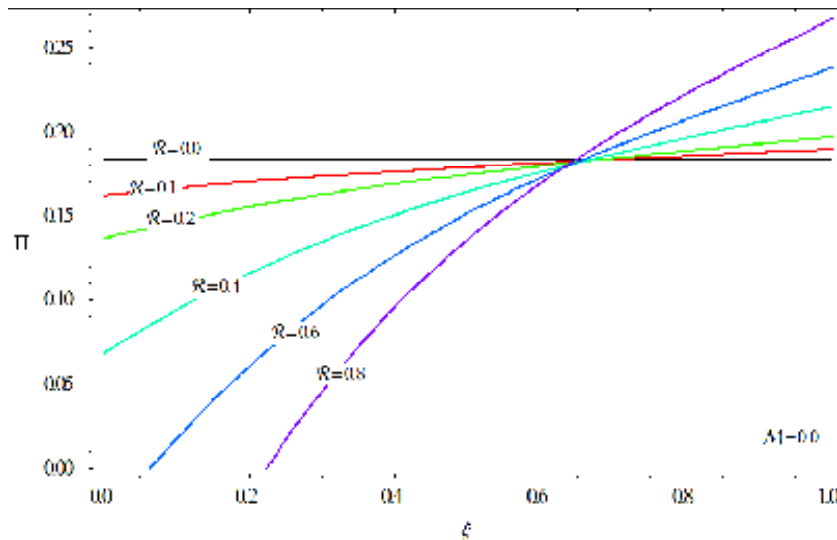
با توجه به شکل ۱۱، فشار خالص در جهت رشد ترک در حالت یک سیال با گرانروی ناچیز و بدون ماند، $R=0$ ، کاهش می یابد. در صورتی که در یک سیال غیرگرانروی و با ماند پایین روند فشار خالص به صورت افزایشی خواهد بود (شکل ۱۲). این اثر مطابق با قاعده برنولی قابل توجیه است [۴۱].

در نظر گرفتن اثر توام فرانسج های ماند و گرانروی به طور معمول



شکل ۱۱. فشار خالص سیال داخل ترک، Π ، بی ماند $\mathcal{R} = 0$ بر حسب مقادیر مختلفی از فرانسج ها گرانروی، \mathcal{M} .

Fig. 11. (Constant injection rate, zero inertia) Net-pressure, Π , the inside of crack for various values of \mathcal{M} .



شکل ۱۲. فشار خالص سیال داخل ترک، Π ، بی گرانروی $\mathcal{M} = 0$ بر حسب مقادیر مختلفی از فرانسج ماند، \mathcal{R} .

Fig. 12. (Constant injection rate, zero viscosity) Net-pressure, Π , the inside of crack for various values of \mathcal{R} .

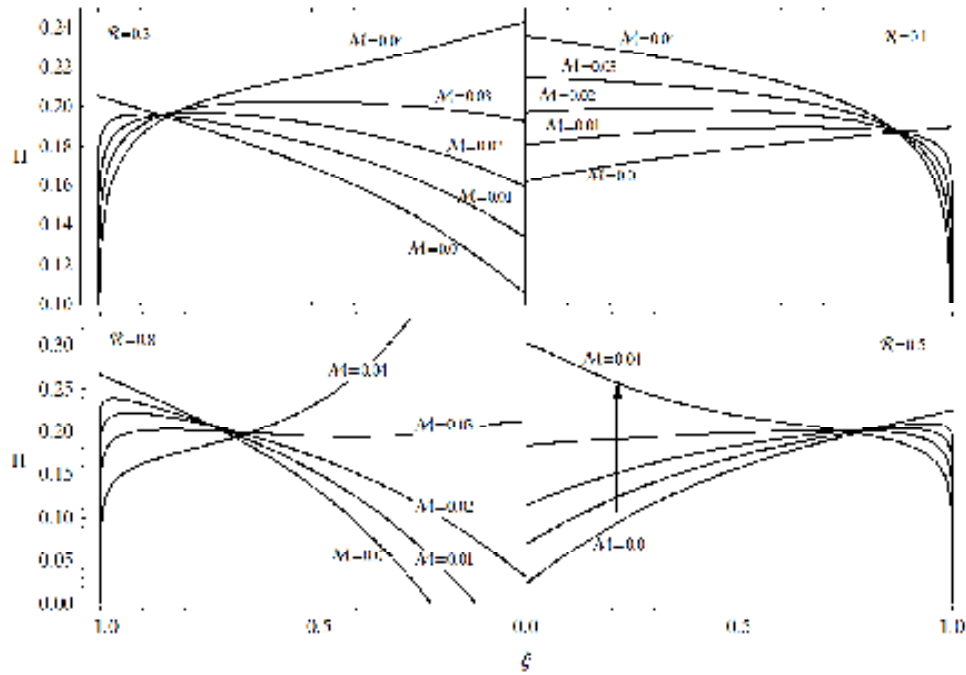
تزریق ترک وجود دارد. یعنی با افزایش درجه \mathbf{n} و \mathbf{m} این مقادیر، $\bar{\Omega}(0)$ ، افزایش می یابد، ولی در نهایت اثرات ترم های بالاتر به دلیل کوچک فرض کردن فرانسج های \mathcal{M} و \mathcal{R} کاهش می یابد.

شکل های ۱۵ و ۱۶ مقایسه ای بین بازشدگی مقیاس شده مجدد، $\bar{\Omega}$ ، و فشار خالص سیال داخل ترک، Π ، با در نظر گرفتن اثر اندرکنش بین فرانسج های گرانروی و ماند (این پژوهش) و بدون اثر اندرکنشی از مرتبه اول $O(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ را نشان می دهد. افزایش فرانسج ها منجر به افزایش اختلافات بین دو پژوهش خواهد شد. در

\mathcal{M} است که مسلماً توصیف مکانیسم اندرکنش بین این دو فرانسج کار بسیار پیچیده به نظر می رسد و مستلزم پژوهش های بیشتر و انجام تست های آزمایشگاهی با این نگرش است.

۳-۴- بازشدگی مقیاس شده ترک

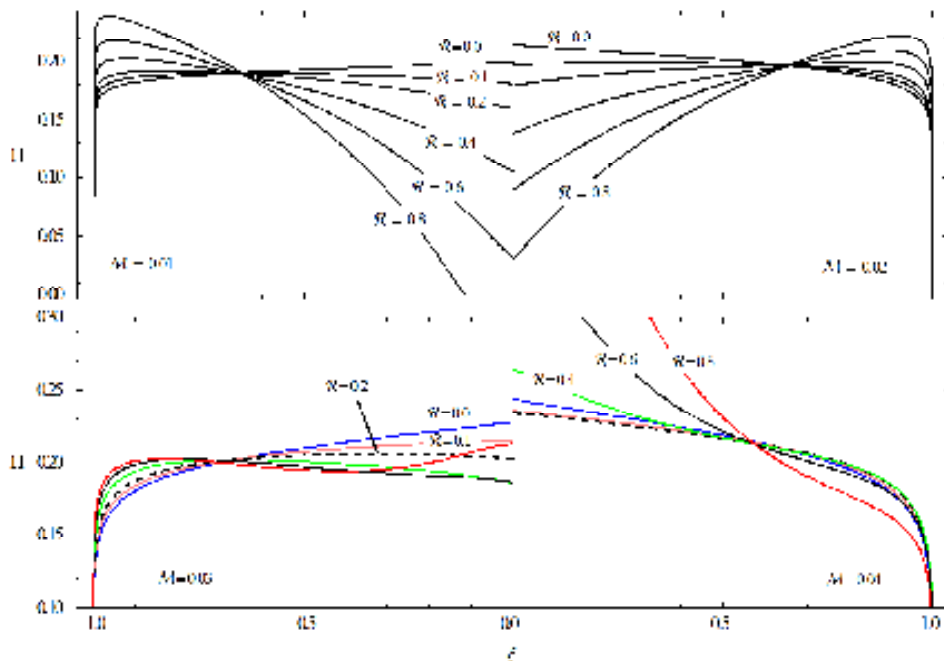
به طور مشابه، مقادیر بازشدگی مقیاس شده در نقطه محل تزریق ترک، $\bar{\Omega}(0)$ ، بر حسب ترم های مختلفی از مقادیر \mathbf{n} و \mathbf{m} در جدول ۴ آورده شده است. همانطور که مشاهده می شود، فرآیند مشابه ای همانند ترم های فشار، در مقادیر بازشدگی مقیاس شده در نقطه محل



شکل ۱۳. روند تغییرات فشار خالص سیال داخل ترک، Π ، بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج گرانروی، \mathcal{M} ، در فراسنج ماند، $\mathcal{R} = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8\}$ ، با در نظرگیری اثر اندرکنشی تا مرتبه $O(\mathcal{M}^3, \mathcal{R}^3)$

Fig. 13. The trend of net fluid pressure, Π , for various values of \mathcal{M} and in terms of various values of the viscosity parameter,

$$\mathcal{R} = \{0.1, 0.3, 0.5, 0.8\}, \text{ with considering FVII with third order } O(\mathcal{M}^3, \mathcal{R}^3)$$



شکل ۱۴. روند تغییرات فشار خالص سیال داخل ترک، Π ، بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج ماند، \mathcal{R} ، در فراسنج گرانروی، $\mathcal{M} = \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}$ ، با در نظرگیری اثر اندرکنشی تا مرتبه $O(\mathcal{M}^3, \mathcal{R}^3)$

Fig. 14. The trend of net fluid pressure, Π , for various values of \mathcal{R} and in terms of various values of the viscosity parameter

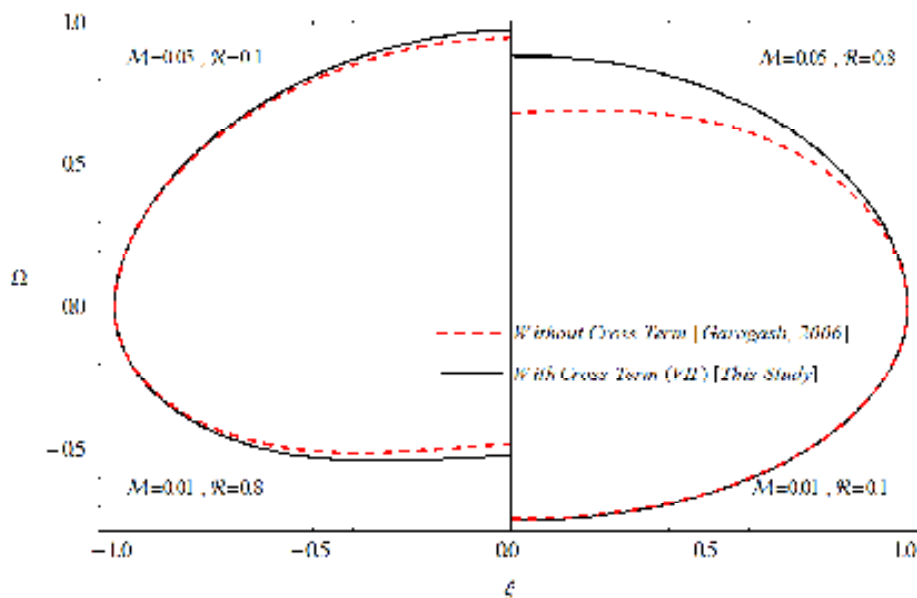
$$\mathcal{M} = \{0.01, 0.02, 0.03, 0.04\}, \text{ with considering FVII with third order } O(\mathcal{M}^3, \mathcal{R}^3)$$

جدول ۴. ضرایب محاسبه شده از ترم $O(\mathcal{M}^m, \mathcal{R}^n)$ ، $m, n \rightarrow \{0, 1, \dots, 4\}$ ، در معادله ۲۱ از بازشدگی مقیاس شده در محل تزریق سیال $\bar{\Omega}_{0[m,n]}$

Table 4. Numerical values of coefficients of the $O(\mathcal{M}^m, \mathcal{R}^n)$ terms ($m, n \rightarrow \{0, 1, \dots, 5\}$) in the expansion [Eq. (21)] of normalized opening $\bar{\Omega}_{0[m,n]}$ at the inlet.

$\bar{\Omega}_{0[m,n]}$	$n \downarrow$	$m \rightarrow$	۰*	۱	۲	۳	۴	۵
۰*			۰.۷۳۲۲۹۶	۵.۰۵۱۷۵۱	-۴۸.۷۲۱۸۰۲	۷۷۸.۶۲۱۲۹۹	-۱۵۲۲۶.۹۸۰	۳۳۰.۸۶۷.۷۰۴
۱			-۰.۳۷۶۴۶۴	۵.۰۰۹۰۰۴	-۱۱۱.۸۹۸۴۱	۲۷۸۸.۵۸۶۱۸		
۲			-۰.۲۵۹۱۴۲	۹.۱۴۳۶۰۵	-۲۹۵.۶۳۳۱۴	۹۳۸۳.۱۴۱۹۴		
۳			-۰.۳۲۴۵۲۵	۱۸.۳۴۸۸۸۳	-۷۸۱.۴۴۲۲۰	۲۹۹۹۹.۳۸۴۵		
۴			-۰.۵۱۷۱۳۲					
۵			-۰.۹۳۶۸۱۹					

* این مقادیر در مرجع [۸] محاسبه شده است.



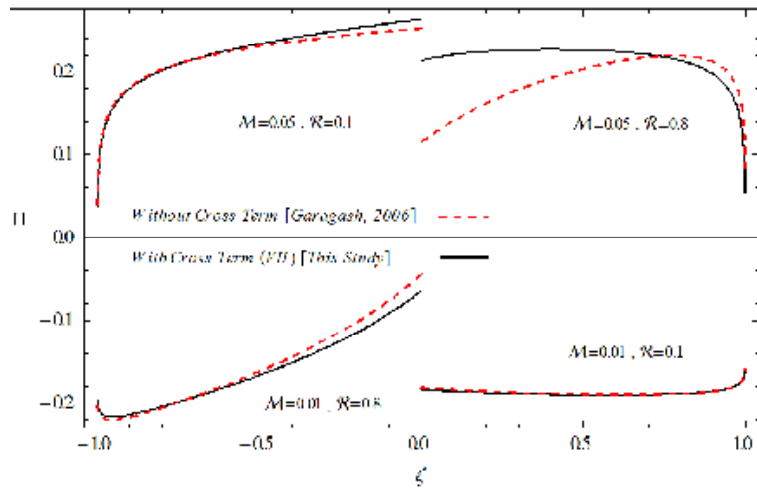
شکل ۱۵. مقایسه بازشدگی مقیاس شده مجدد، $\bar{\Omega}$ ، با در نظر گرفتن اثر اندرکنش بین فرانسج‌های گرانروی و ماند (این تحقیق) و بدون اثر اندرکنشی از مرتبه اول $O(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ [۸].

Fig. 15. Comparison of normalized opening, $\bar{\Omega}$, considering the effect of interaction between viscosity and inertia parameters (this study) and without interaction effect [8].

$\bar{\Omega}$ ، را نشان می دهد. در تمام این ترم ها شرط مرزی در نوک ترک (میزان بازشدگی در آن نقطه برابر با صفر است) ارضا شده است. محاسبه ضرایب این ترم های با حل پیوسته معادله های حاکم در حالت مقیاس شده از روش اغتشاش اصلاح شده تعیین شده است. این نکته قابل ذکر است که ترم های ماند صفر و یا گرانروی صفر توسط

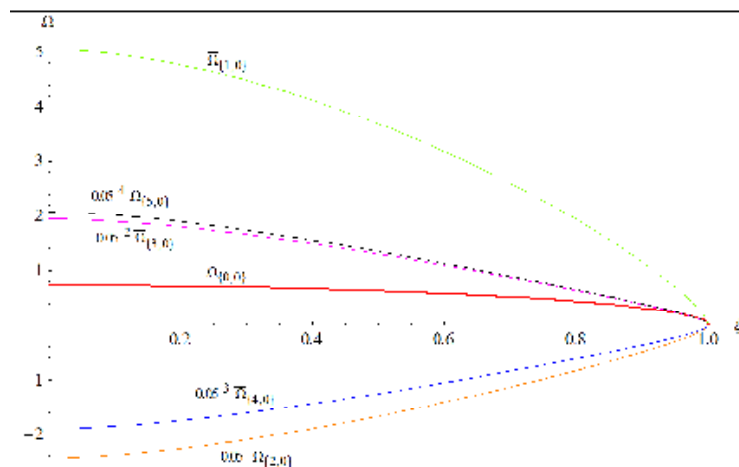
نظر گرفتن اثر توام باعث افزایش میزان بازشدگی مقیاس شده مجدد $\bar{\Omega}$ و کاهش طول ترک γ می شود و به عبارت دیگر ممکن است اختلافات بین نتایج در مورد بازشدگی مقیاس شده $\bar{\Omega} = \gamma \bar{\Omega}$ کاهش یابد.

شکل های ۱۷ تا ۲۰ به ترتیب، ترم های مرتبه صفر، ترم های اندرکنشی از مرتبه اول تا سوم بازشدگی مقیاس شده مجدد ترک،



شکل ۱۶. مقایسه فشار خالص سیال داخل ترک، Π ، با در نظر گرفتن اثر اندرکنش بین فرانسج‌های گرانروی و ماند (این تحقیق) و بدون اثر اندرکنشی از مرتبه اول $O(\mathcal{M}, \mathcal{R})$.

Fig. 16. Comparison of net fluid pressure, Π , considering the interaction effect between the viscosity and inertia parameters (this study) and without interaction term [8].



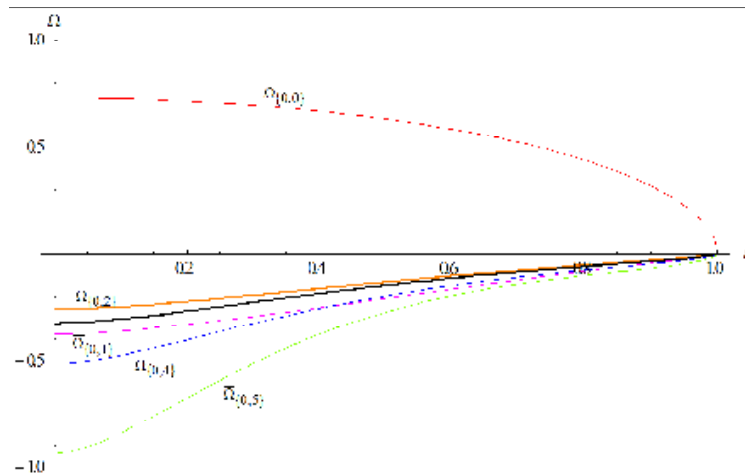
شکل ۱۷. ترم های مرتبه صفر و بدون ماند مرتبه های اول تا پنجم بازشدگی مقیاس شده مجدد، $\bar{\Omega}$.

Fig. 17. Zero- to the fifth-order terms of normalized opening, $\bar{\Omega}$, for zero-inertia

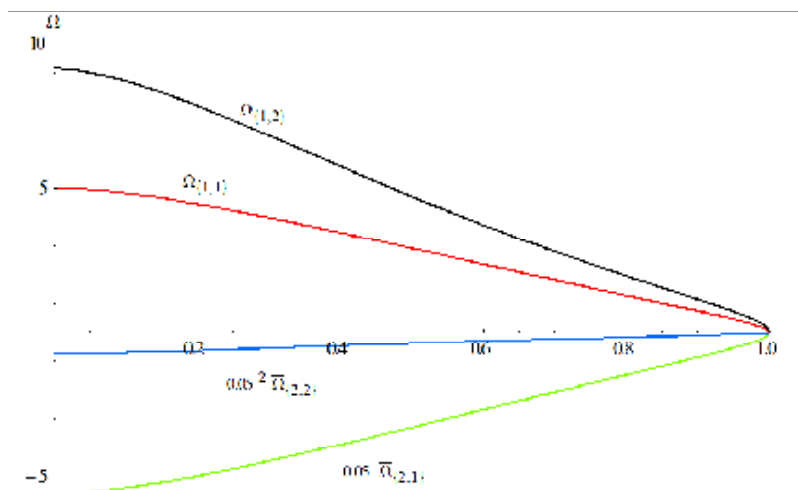
فرانسج ماند \mathcal{R} ، با افزایش فرانسج گرانروی \mathcal{M} ، مقادیر بازشدگی در محل تزریق هم به صورت افزایشی و هم کاهش می‌یابد. نتایج شکل‌های ۲۲ و ۲۳ در مرجع [۸] آورده شده‌است. به طور کلی افزایش گرانروی سیال موجب افزایش بازشدگی و کاهش میزان رشد (مطابق با شکل ۳) با فرض ماند صفر خواهد شد. همان‌طور که اشاره شد، مطابق با شکل ۱۲ افزایش ماند سیال میزان فشار خالص سیال در محل تزریق کاهش و در حوالی نوک ترک افزایش می‌یابد. سطوح پرفشار ترک باعث افزایش بازشدگی در آن ناحیه خواهند شد. از

گاراگاش [۸] تعیین شده‌است. در این تحقیق ترم های اندرکنشی نیز برآورد شده‌است که در ادامه به چگونگی اثر بخشی این ترم ها بر روی میزان بازشدگی از لحاظ کیفی و کمی پرداخته می‌شود.

شکل ۲۱ تغییرات بازشدگی ترک، $\bar{\Omega} = \gamma \bar{\Omega}$ ، در محل تزریق بر حسب مقادیر مختلفی از فرانسج های گرانروی، \mathcal{M} ، و ماند، \mathcal{R} ، را نشان می‌دهد. در یک مقدار ثابت از فرانسج گرانروی \mathcal{M} ، با افزایش فرانسج ماند \mathcal{R} ، میزان بازشدگی در محل تزریق کاهش می‌یابد. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که در یک مقدار ثابت از



شکل ۱۸. ترم های مرتبه صفر و بدون گرانروی مرتبه های اول تا پنجم بازشدگی مقیاس شده مجدد، $\bar{\Omega}$.
Fig. 18. Zero- to the fifth-order terms of normalized opening, $\bar{\Omega}$, for zero- viscosity



شکل ۱۹. ترم های اندرکنشی مرتبه اول و دوم بازشدگی مقیاس شده مجدد، $\bar{\Omega}$.
Fig. 19. First and second order cross terms of normalized opening, $\bar{\Omega}$ in expansion solution.

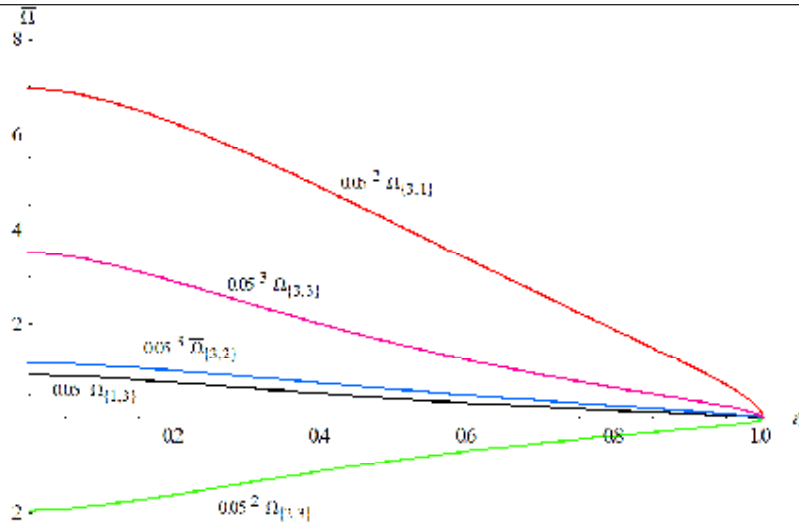
فراسنج نشان می دهد. همان طور که اشاره شد افزایش ماند در سیال بدون گرانروی باعث دنبلی شدن شکل ترک خواهد شد که با افزایش گرانروی ترک از دنبلی شکل شدن خارج می شود.

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش اثر اندرکنش فراسنج های گرانروی و ماند در میزان انتشار، بازشدگی و فشار سیال داخلی ترک در سنگ های شکننده برای مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانروی \mathcal{M} و ماند

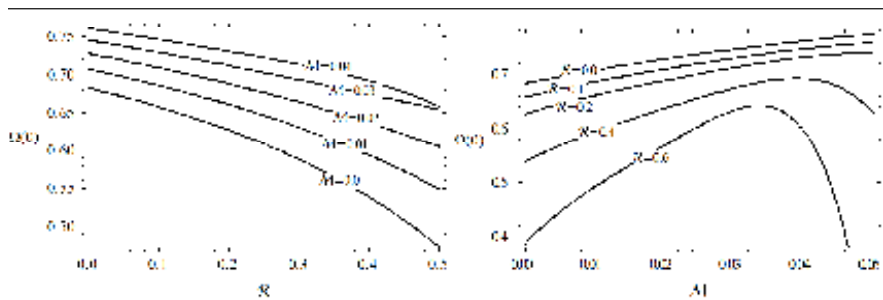
طرفی محدودیت شرایط مرزی در نوک ترک وجود دارد و نهایتاً ترک در مقادیر بزرگتری از فراسنج ماند به صورت دنبلی شکل در خواهد آمد (مطابق با شکل ۲۳). مسلماً، در عملیات شکست هیدرولیکی در مرحله تزریق در نظر نگرفتن اثرات ماند می تواند خطای چشم گیری را وارد کند. این خطاها با افزایش فراسنج ماند، افزایش می یابد.

شکل ۲۴ میزان بازشدگی مقیاس شده ترک، $\Omega = \gamma \bar{\Omega}$ ، از حل مرتبه سه به ازای مقادیر مختلفی از ماند گرانروی $\mathcal{R} = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8\}$ و



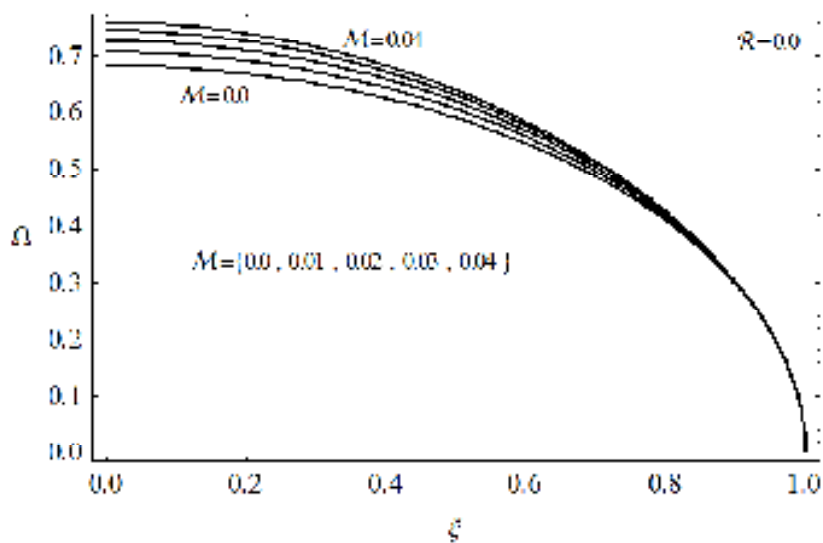
شکل ۲۰. ترم های اندرکنشی مرتبه سوم بازشدگی مقیاس شده مجدد، $\bar{\Omega}$.

Fig. 20. Third order cross terms of normalized opening, $\bar{\Omega}$ in expansion solution.



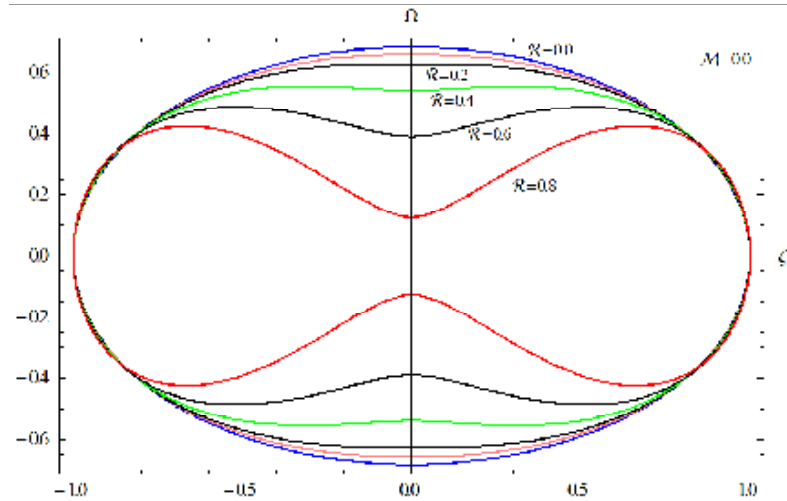
شکل ۲۱. تغییرات بازشدگی ترک، $\Omega = \gamma \bar{\Omega}$ ، در محل تزریق بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانروی، \mathcal{M} ، و ماند، \mathcal{R} .

Fig. 21. Variation of opening, $\Omega = \gamma \bar{\Omega}$ at the inlet verses the dimensionless viscosity \mathcal{M} , and inertia \mathcal{R} .



شکل ۲۲. بازشدگی ترک، $\Omega = \gamma \bar{\Omega}$ ، بدون ماند $\mathcal{R} = 0$ بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانروی، \mathcal{M} .

Fig. 22. Opening, $\Omega = \gamma \bar{\Omega}$, for various values of \mathcal{M} with zero-inertia, $\mathcal{R} = 0$.



شکل ۲۳. بازشدگی ترک، $\Omega = \gamma\bar{\Omega}$ ، بی گرانروی $M = 0$ بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج ماند، \mathcal{R} .

Fig. 23. Opening, $\Omega = \gamma\bar{\Omega}$, for various values of \mathcal{R} , with zero-viscosity, $\mathcal{M} = 0$.

گرانروی ناچیز و بدون ماند، $\mathcal{R} = 0$ ، کاهش می یابد. در صورتی که در یک سیال غیرگرانروی و با ماند پایین روند فشار خالص به صورت افزایشی خواهد بود. این اثر مطابق با قاعده برنولی قابل توجیه است. در نظر گرفتن اثر توام فراسنج های ماند و گرانروی به طور معمول باعث می شود که یک مقدار بیشینه در روند منحنی فشار-مکان بوجود بیاید. با افزایش گرانروی اختلاف بین فشار نوک و محل تزریق در یک ماند ثابت افزایش می یابد.

د) در یک مقدار ثابت از فراسنج گرانروی \mathcal{M} ، با افزایش فراسنج ماند \mathcal{R} ، میزان بازشدگی در محل تزریق کاهش می یابد. همچنین می توان نتیجه گرفت که در یک مقدار ثابت از فراسنج ماند \mathcal{R} ، با افزایش فراسنج گرانروی \mathcal{M} ، مقادیر میزان بازشدگی در محل تزریق هم به صورت افزایشی و هم کاهش می یابد.

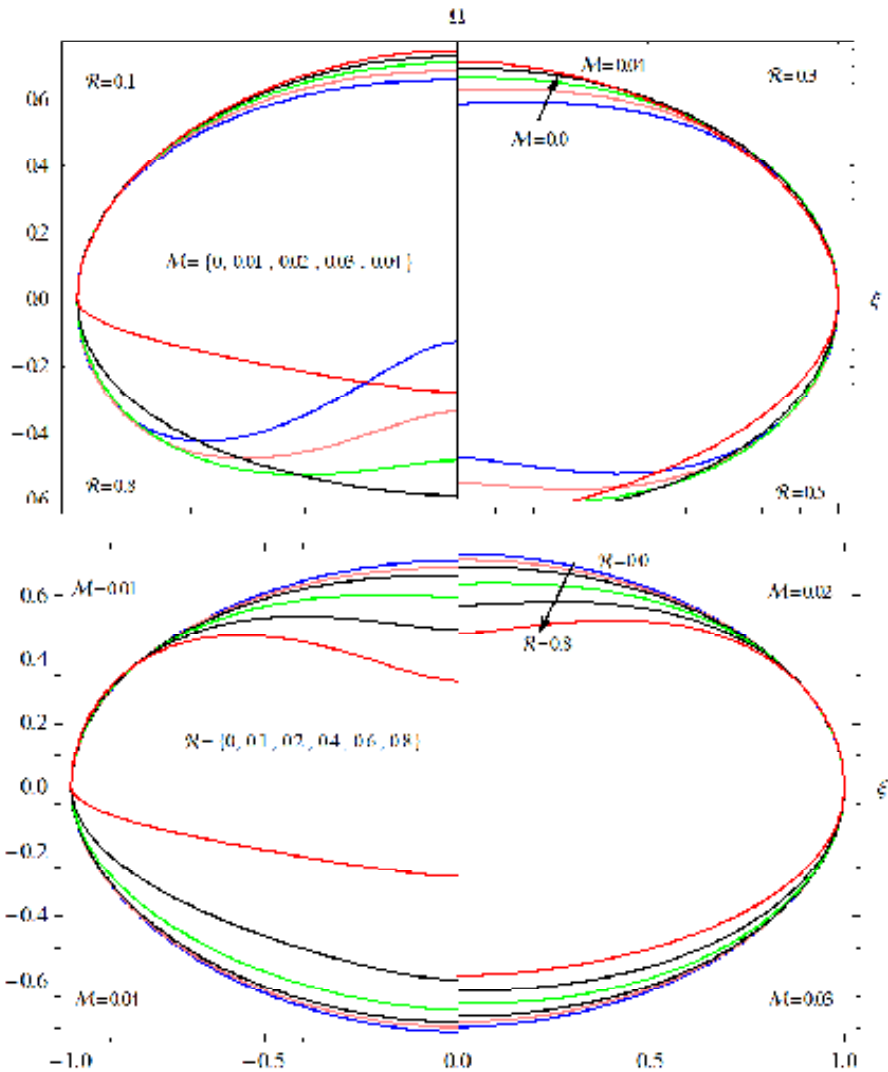
ه) افزایش ماند سیال میزان فشار خالص سیال در محل تزریق کاهش و در حوالی نوک ترک افزایش می یابد. سطوح پرفشار ترک باعث افزایش بازشدگی در آن ناحیه خواهند شد. از طرفی محدودیت شرایط مرزی در نوک ترک وجود دارد و در نهایت ترک در مقادیر بزرگتری از فراسنج ماند به صورت دنبلی شکل در خواهد آمد. افزایش ماند در سیال بدون گرانروی باعث دنبلی شدن شکل ترک خواهد شد که با افزایش گرانروی ترک از دنبلی شدن خارج می شود. برای ادامه پژوهش در این بخش، می توان اثرات توام دیگر فراسنج ها هم چون چقرمگی و ماند را در رژیم گرانروی بررسی کرد.

\mathcal{R} برای ترک دو بعدی KGD در مقیاس سختی با استفاده از روش تحلیلی اغتشاش گسترش یافته بررسی شد. نتایج آن به صورت زیر خلاصه می شود:

الف) ضریب طول نیم ترک با افزایش گرانروی کاهش می یابد و روند کاهشی با افزایش فراسنج ماند شدت می یابد. در مقادیر بزرگتری از گرانروی، افزایش فراسنج ماند منجر به کاهش طول نیم ترک می شود. از طرف دیگر، اثر کاهنده فراسنج گرانروی بیشتر از اثر افزایشنده ماند است؛ بنابراین می توان نتیجه گرفت که اثرات گرانروی سیال در فرآیند تزریق شکست هیدرولیکی بیشتر از اثرات فراسنج ماند با فرض جریان آرام می باشد. مسلماً، در نظر گرفتن اثرات ماند می تواند خطای چشم گیری را وارد کند. این خطاها با افزایش فراسنج ماند، افزایش می یابد و ممکن است به ۳۰٪ نیز برسد. بنابراین این مورد می تواند اهمیت این پژوهش را به خوبی نشان دهد.

ب) در یک مقدار ثابت از فراسنج ماند \mathcal{R} ، با افزایش فراسنج گرانروی \mathcal{M} ، میزان فشار خالص در محل تزریق افزایش می یابد. سیر صعودی با افزایش فراسنج ماند و گرانروی شدت می یابد. همچنین می توان نتیجه گرفت که در یک مقدار ثابت از فراسنج گرانروی، با افزایش فراسنج ماند، مقادیر فشار در محل تزریق هم به صورت افزایشی و هم کاهش می یابد. افزایش یا کاهش بستگی به مقدار فراسنج ها دارد.

ج) فشار خالص در جهت رشد ترک در حالت یک سیال با



شکل ۲۴. روند تغییرات بازشدگی ترک، $\Omega = \gamma \bar{\Omega}$ ، بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج های گرانروی \mathcal{M} ، و ماند \mathcal{R} ، با در نظرگیری اثر اندرکنشی تا مرتبه $O(\mathcal{M}^3, \mathcal{R}^3)$

Fig. 24. The trend of opening, $\Omega = \gamma \bar{\Omega}$, for various values of \mathcal{M} and \mathcal{R} , with considering FVII with approximation of $O(\mathcal{M}^3, \mathcal{R}^3)$

مراجع

- [1] M.J. Economides, K.G. Nolte, U. Ahmed, Reservoir stimulation, Wiley Chichester, 2000.
- [2] J.L. Gidley, Recent advances in hydraulic fracturing, (1989).
- [3] R.J. Clifton, A.S. Abou-Sayed, A variational approach to the prediction of the three-dimensional geometry of hydraulic fractures, in: SPE/DOE Low Permeability Gas Reservoirs Symposium, Society of

همچنین در نظر گرفتن اثرات نشست و یا عقب افتادگی سیال از نوک در کنار اثرات اندرکنش فراسنج ها چقرمگی، گرانروی و ماند می تواند به عنوان یک موضوع پژوهشی مطرح شود.

۶- تقدیر و تشکر

نویسندگان از راهنمایی های ارزنده پروفسور دمیتری گاراگاش (Dmitry Garagash) از دانشگاه Dalhousie کانادا در دوره فرصت مطالعاتی برای واضح تر شدن روند این پژوهش سپاسگزارند.

- numerical solution of a two-dimensional hydraulic fracture, *International journal of solids and structures*, 36(31) (1999) 4869-4888.
- [15] A. Savitski, E. Detournay, Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions, *International journal of solids and structures*, 39(26) (2002) 6311-6337.
- [16] D.I. Garagash, E. Detournay, Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: small toughness solution, *Journal of Applied Mechanics*, 72 (2005) 916.
- [17] D. Garagash, E. Detournay, Viscosity-dominated regime of a fluid-driven fracture in an elastic medium, in: *IUTAM Symposium on Analytical and Computational Fracture Mechanics of Non-Homogeneous Materials*, Springer, 2002, pp. 25-29.
- [18] D. Garagash, E. Detournay, An analysis of the influence of the pressurization rate on the borehole breakdown pressure, *International journal of solids and structures*, 34(24) (1997) 3099-3118.
- [19] J.I. Adachi, *Fluid-driven fracture in permeable rock*, University of Minnesota, 2001.
- [20] J. Adachi, E. Detournay, Self similar solution of a plane strain fracture driven by a power law fluid, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 26(6) (2002) 579-604.
- [21] J.I. Adachi, E. Detournay, Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock, *Engineering Fracture Mechanics*, 75(16) (2008) 4666-4694.
- [22] P.A. Charlez, *Rock mechanics: petroleum applications*, Editions Technip, 1997.
- [23] D. Mendelsohn, A review of hydraulic fracture modeling-part I: general concepts, 2D models, motivation for 3D modeling, *Journal of energy resources technology*, 106(3) (1984) 369-376.
- [24] P. Valko, M. Economides, *Hydraulic Fracturing Mechanics*, in, John Wiley and Sons, New York, USA, 1995.
- [25] A. Asgari, A. Golshani, *Hydraulic Fracture Propagation in Impermeable Elastic Rock With Large Toughness: Considering Fluid Inertia Parameter* Petroleum Engineers, 1981.
- [4] A. Ingraffea, T. Boone, Simulation of hydraulic fracture in poroelastic rock, *Numerical Methods in Geomechanics* (Innsbruck 1988), Balkema, Rotterdam, (1988) 95-105.
- [5] S.H. Advani, T. Lee, J. Lee, Three-dimensional modeling of hydraulic fractures in layered media: part I-finite element formulations, *Journal of energy resources technology*, 112(1) (1990) 1-9.
- [6] J. Sousa, B. Carter, A. Ingraffea, Numerical simulation of 3D hydraulic fracture using Newtonian and power-law fluids, in: *International journal of rock mechanics and mining sciences & geomechanics abstracts*, Elsevier, 1993, pp. 1265-1271.
- [7] K. Shah, B. Carter, A. Ingraffea, Hydraulic fracturing simulation in parallel computing environments, in: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts*, 1997, pp. 474.
- [8] D.I. Garagash, Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: Asymptotics of large toughness, *Engineering Fracture Mechanics*, 73(4) (2006) 456-481.
- [9] R. Nilson, Gas-driven fracture propagation, *J. Appl. Mech.:(United States)*, 48 (1981).
- [10] D. Spence, D. Turcotte, Magma driven propagation of cracks, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth* (1978-2012), 90(B1) (1985) 575-580.
- [11] E. Detournay, D. Garagash, The near-tip region of a fluid-driven fracture propagating in a permeable elastic solid, *Journal of Fluid Mechanics*, 494 (2003) 1-32.
- [12] D. Spence, P. Sharp, Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 400(1819) (1985) 289-313.
- [13] J.R. Lister, Buoyancy-driven fluid fracture: the effects of material toughness and of low-viscosity precursors, *J. Fluid Mech*, 210 (1990) 263-280.
- [14] R. Carbonell, J. Desroches, E. Detournay, A comparison between a semi-analytical and a

- [36] M.G. Mack, N.R. Warpinski, Mechanics of hydraulic fracturing, Reservoir stimulation, (2000) 6-1.
- [37] M. Biot, L. Masse, W. Medlin, A two-dimensional theory of fracture propagation, SPE Production Engineering, 1(01) (1986) 17-30.
- [38] R. Nilson, Similarity solutions for wedge-shaped hydraulic fractures driven into a permeable medium by a constant inlet pressure, International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 12(5) (1988) 477-495.
- [39] R.S. Carbonell, Self-similar solution of a fluid-driven fracture in a zero toughness elastic solid, Proc .Roy. Soc. London. Ser, A submitted for publication, 1996.
- [40] J. Desroches, E. Detournay, B. Lenoach, P. Papanastasiou, J. Pearson, M. Thiercelin, A. Cheng, The crack tip region in hydraulic fracturing, in: Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, The Royal Society, 1994, pp. 39-48.
- [41] N. Huang, A. Szewczyk, Y. Li, Self-similar solution in problems of hydraulic fracturing, Journal of Applied Mechanics, 57 (1990) 877.
- [42] D. Garagash, E. Detournay, The tip region of a fluid-driven fracture in an elastic medium, Journal of Applied Mechanics, 67(1) (2000) 183-192.
- [43] G. Batchelor, An Introduction to Fluid Dynamics Cambridge Univ, Press, Bentley House, London, (1967).
- [44] E.D. Dmitry Garagash, Similarity solution of a semi-infinite fluid-driven fracture in a linear elastic solid, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy, 326(5) (1998) 285-292.
- [45] D. Garagash, Hydraulic fracture propagation in elastic rock with large toughness, in: 4th North American Rock Mechanics Symposium, American Rock Mechanics Association, 2000.
- [46] D. Garagash, Transient solution for a plane-strain fracture driven by a shear-thinning, power-law fluid, International Journal for Numerical and Analytical Sharif Journal of Civil Engineering, 31.2(3.2) (2015) 23-29.
- [26] A. Asgari, A. Golshani, A. Lakirouhani, Hydraulic Fracture Propagation in Brittle Rock: Considering Interaction Term Between Fluid Inertia and Viscosity Parameters, Sharif Journal of Civil Engineering, 32.2(2.1) (2016) 59-66.
- [27] A. Asgari, A. Golshani, Mathematical Modeling of Hydraulic Fracture Propagation in Elastic Medium: Viscosity-Toughness-Dominated, Sharif Journal of Civil Engineering, (Accepted In 2017).
- [28] S. Khristianovic, Y. Zheltov, Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids, in: Proc. 4th world petroleum congress, Rome, 1955, pp. 579-586.
- [29] G.I. Barenblatt, The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 23(3) (1959) 622-636.
- [30] T. Perkins, L. Kern, Widths of hydraulic fractures, Journal of Petroleum Technology, 13(09) (1961) 937-949.
- [31] J. Geertsma, F. De Klerk, A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures, Journal of Petroleum Technology, 21(12) (1969) 1571-1581.
- [32] R. Nordgren, Propagation of a vertical hydraulic fracture, Society of Petroleum Engineers Journal, 12(04) (1972) 306-314.
- [33] J. Geertsma, R. Haafkens, A comparison of the theories for predicting width and extent of vertical hydraulically induced fractures, Journal of energy resources technology, 101(1) (1979) 8-19.
- [34] J. Geertsma, Two-dimensional fracture propagation models, in: Recent Advances in Hydraulic Fracturing, SPE Richardson, TX, 1989, pp. 81-94.
- [35] K.B. Naceur, M. Economides, Production from naturally fissured reservoirs intercepted by a vertical hydraulic fracture, SPE formation evaluation, 4(04) (1989) 550-558.

- Wiley New York, 1969.
- [51] J.R. Rice, Mathematical analysis in the mechanics of fracture, *Fracture: an advanced treatise*, 2 (1968) 191-311.
- [52] A.P. Bungler, R.G. Jeffrey, E. Detournay, Toughness-dominated near-surface hydraulic fracture experiments, in: *Gulf Rocks 2004, the 6th North America Rock Mechanics Symposium (NARMS)*, American Rock Mechanics Association, 2004.
- [53] D.I. Garagash, Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: Early-time solution, *International journal of solids and structures*, 43(18-19) (2006) 5811-5835.
- [54] M.D. Van Dyke, *Perturbation methods in fluid dynamics*, Stanford: Parabolic Press, 1975.
- Methods in Geomechanics, 30(14) (2006) 1439-1475.
- [47] A.P. Bungler, E. Detournay, R.G. Jeffrey, Crack tip behavior in near-surface fluid-driven fracture experiments, *Comptes Rendus Mecanique*, 333(4) (2005, c) 299-304.
- [48] D. Garagash, E. Detournay, Erratum: "Plane-Strain Propagation of a Fluid-Driven Fracture: Small Toughness Solution [Journal of Applied Mechanics, 2005, 72 (6), pp. 916-928], *Journal of Applied Mechanics*, 74(4) (2007) 832-832.
- [49] R.A. Shapiro, *The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow*, New York: Ronald Press, 2(1) (1954).
- [50] I.N. Sneddon, M. Lowengrub, P. Mathematician, *Crack problems in the classical theory of elasticity*,

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Asgari, A. Golshani, *Analysis of Hydraulic Fracture Propagation in Toughness Dominant with Considering Fluid Viscosity and Inertia Parameters Interaction: Higher Order Terms*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 52(2) (2020) 469-494.

DOI: [10.22060/ceej.2018.14498.5673](https://doi.org/10.22060/ceej.2018.14498.5673)



