نشریه مهندسی عمران امیرکبیر

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، دوره ۵۱، شماره ۳، سال ۱۳۹۸، صفحات ۴۵۳ تا ۴۶۴
DOI : 10.22060/ceej.2018.13596.5443

تحلیل ریسک پروژه با استفاده از مدل احتمالاتی یکپارچه بتا-اس و تابع کوپولای چند پارامتری

مهدی خیاطی*[1]، افشین فیروزی بویاغچی[2]

[1] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، معماری و هنر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران
[2] استادیار و عضو هیئت علمی، دانشکده مهندسی عمران، معماری و هنر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران

چکیده: یکی از ویژگیهای هر پروژهای محدود بودن بودجه و زمان برای تکمیل اهداف آن است. با این حال پروژهها با عدم قطعیتهای زیادی مواجه هستند که نیل به این اهداف را با ریسک مواجه میکنند. روش مرسوم مدیریت ارزش کسب شده یکی از مهمترین روشهای ارزیابی با هدف ارائه شاخصهای عملکردی یکپارچه پروژه است که مبتنی بر استفاده از متغیرهایی با مقادیر تعینی بوده و دارای این محدودیت است که عدم قطعیت هزینه و زمان فعالیتهای پروژه را نمیتوان به طور صریح مدلسازی نمود. در این تحقیق به کمک شبیه سازی مونت کارلو، منحنی S پروژه در هر تکرار شبیه سازی ایجاد شده و سپس با برازش دادهها، مدل احتمالاتی بتا-اس توابع حاشیهای آن استخراج گردیده است. همچنین در یک رویکرد بدیع، کاربرد توابع کوپولا در استخراج بهترین تابع توزیع مشترک توابع حاشیهای این مدل احتمالاتی نشان داده شده است که میتواند در تحلیلهای دقیق ریسک پروژه نظیر به روز رسانی بیزی به کار رود. نتایج این روش به دلیل ارائه مدلی کاملاً محاسباتی که تمامی پارامترهای همبسته زمان، هزینه نهایی و حتی رفتار احتمالاتی این توابع را چه در پایان پروژه و چه قبل از آن توضیح میدهد، نتایجی قابل اعتماد هستند. ماحصل این مدل چندمتغیره، تابعی است که قابلیت توضیح توام رفتار احتمالاتی کمیتهای تصادفی و همبسته زمان و هزینه پروژه به همراه عدم قطعیت تجمیع شده آنها را در بر دارد. این مدل در به روزرسانی نیز کاربرد دارد.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۵ آبان ۱۳۹۶
بازنگری: ۹ بهمن ۱۳۹۶
پذیرش: ۱۸ بهمن ۱۳۹۶
ارائه آنلاین: ۲۰ اردیبهشت ۱۳۹۷

کلمات کلیدی:
تحلیل ریسک پروژه
ارزش کسب شده احتمالاتی
شبیه سازی مونت کارلو
مدل بتا-اس
تابع کوپولا.

1ـ مقدمه

تا کنون استانداردهای مختلف مدیریت پروژه تعاریفی برای پروژه ارائه دادهاند. استاندارد PMBOK[1] پروژه را تلاشی موقتی که به منظور تولید محصول، خدمت یا نتیجهای منحصربهفرد انجام میگیرد، تعریف میکند.[1] بر اساس تعریف استاندارد ICB[2] پروژه یک عملکرد محدود شده توسط زمان و هزینه برای دستیابی به تحویل شدنیهای تعریف شده (محدوده تعریف شده برای برآوردن موضوعات پروژه) براساس استانداردهای کیفیت و الزامات است. قابل توجه است که همه این استانداردها محدودیت زمان، هزینه (منابع) و موقتی بودن را درکنار تولید یک محصول مشخص و منحصربهفرد مورد توجه قرار دادهاند [2].

ازاین رولزوم وجود فرآیندی برای مدیریت این محدودیتها به روشنی احساس میشود. مدیریت پروژه فرایندی است، در جهت حفظ مسیر پروژه، برای دستیابی به تعادلی اقتصادی و موجه، بین سه عامل هزینه، زمان و کیفیت، در حین اجرای پروژه، که از ابزار و تکنیکهای خاص خود، درانجام این مهم کمک میگیرد. ازسوی دیگر هدف از کنترل پروژه، اجرای دقیق و کامل برنامه تدوین شده برای پروژه است، به طوری که هنگام خروج از برنامه بتوان با تشخیص علل و طرح اقتصادیترین فعالیتها، پروژه را به نزدیکترین حالت ممکن در مسیر اولیه و اصلی خود باز گرداند. مهمترین ابزار مدیریت پروژه برای کنترل و پایش هزینه و زمان و همچنین پیش بینی وضعیت آتی آنها مدیریت ارزش کسب شده است [3].

مدیریت ارزش کسب شده، مشهورترین سیستم مدیریت پروژه است که سه مولفه اصلی مدیریت پروژه یعنی مدیریت زمان، مدیریت هزینه و عملکرد فنی را با هم یکپارچه میکند. این روش مقادیر واریانس زمان و هزینه پروژه را محاسبه نموده و با محاسبه شاخصهای عملکردی، زمان بندی و هزینه نهایی پروژه را در سطوح مختلف پروژه محاسبه می نماید[4].

روش سنتی مدیریت ارزش کسب شده سه محدودیت اصلی دارد. اولاً متغیرها در فرمولها و روابط پیش بینی EVM، ماهیتی تعینی دارند و محدوده تغییرات احتمالی و نیز احتمال وقوع اهداف پروژه (اتمام در زمان تعیین شده و با بودجه مشخص شده) در این روش مسکوت باقی میماند. ثانیاً کمیت انحراف زمانی در این روش به صورت مالی بیان میشود و نه زمانی. ثالثاً روش سنتی مدیریت ارزش کسب شده، در ابتدای پروژه نتایج غیر قابل اعتمادی را ارائه میکند [5]. در سالهای گذشته، روشهای مختلفی به عنوان

1 Project Management Body of Knowledge
2 IPMA Competence Baseline

نویسنده مسئول و عهده دار مکاتبات: M.Khayyati@srbiau.ac.ir

جایگزین برای روش سنتی پیش بینی بر مبنای مدیریت ارزش کسب شده مورد مطالعه قرار گرفته است. در سال 2006، وندوورد[1] و ونهوک[2] سه روش مختلف پیش بینی را با هم مقایسه کردند و نشان دادند که روش مدیریت ارزش کسب شده احتمالاتی در میان آن‌ها از قابلیت اطمینان بیشتری برخوردار است [6]. در سال 2010، کیم[3] و راین اشمیت[4] در تحقیق دیگری به کمک فیلتر کالمن توانستند زمان اتمام پروژه و احتمال وقوع آن را محاسبه نمایند.

در سال‌های اخیر، استفاده از منحنی پیشرفت تجمعی پروژه (S-Curve) برای پیش بینی عملکرد زمان-هزینه پروژه به چالشی بزرگ برای محققین تبدیل شده است. در سال 2000 میلادی بارازا[5] و همکاران سعی کردند که مجموعه‌ای از S-Curveهای تولید شده در شبیه سازی شبکه‌ای[6] را به عنوان ابزاری در کنترل پروژه به کار بسته و همچنین این مفهوم را به کمک تنظیم پارامترهای توزیع احتمال مربوط به فعالیت‌های پروژه بر حسب شاخص‌های فعالیت‌های انجام شده، به روش احتمالاتی پیش بینی زمان پروژه تبدیل کنند. اساس نگرش احتمالاتی به برنامه زمان‌بندی و زمان- هزینه فعالیت‌ها متاثر از عدم قطعیتی است که بر فضای پروژه حاکم است [7].

واربرتن و سیوفی در سال 2016 در تحقیق خود توانستند به روش زمان کسب شده و با بهره گیری از منحنی پیشرفت تجمعی پروژه (S-Curve) و با فرض غیر خطی بودن تغییرات پارامتر انحراف زمان، زمان کسب شده و زمان نهایی پروژه را تخمین بزنند. علاوه بر عدم اشاره به عدم قطعیت کمیت هزینه، به دلیل استفاده از رگرسیون غیرخطی جهت برازش انحراف زمان، مدل ایشان در مراحل آغازین پروژه از دقت مناسبی برخوردار نیست و نیز صحت نتایج این مدل تا حد زیادی به دقت پارامترهای فرضی استفاده شده در روش زمان کسب شده بستگی دارد [8]. چن و همکاران در تحقیقی مشابه اما با استفاده از الگوریتم تبدیل خطی لگاریتم، سعی در ارائه رابطه‌ای مبتنی بر رگرسیون غیرخطی جهت بهبود دقت پیش بینی ارزش برنامه ای[7] پروژه، قبل از شروع آن داشتند. این الگوریتم نیز بادیدگاه تعینی به کمیت‌های زمان و هزینه، از روش مرسوم مدیریت ارزش کسب شده استفاده می‌کند.

در سال 2007، کیم و راین اشمیت مدلی احتمالاتی برای پیش بینی مدت زمان نهایی پروژه و بر اساس تابع احتمال بتا و به روزرسانی بیزی تهیه نمودند. در تحقیق ایشان پارامترهای مستقل مدل بتا- اس استخراج شده و به کمک به روز رسانی بیزی، تابع پسین هر کدام به دست می‌آید. محدودیت اصلی مدل بتا-اس تحقیق کیم و راین اشمیت در فرض استقلال پارامترهای این مدل است. به این معنی که پارامترهای مدل بتا و کمیت‌های زمان و هزینه پروژه از لحاظ احتمالاتی، کمیت‌هایی مستقل فرض می‌شوند. لذا تابع پیشین در صورت فرض استقلال این پارامترها برابر حاصل ضرب خطی این توزیع‌ها است.

در سال 2014، نارباِئف و دی-مارکو[8] برای پیش بینی هزینه نهایی پروژه، مدلی مبتنی بر برازش منحنی پیشرفت پروژه و رگرسیون غیرخطی ارائه دادند. این مدل بر اساس مدل رشد گُمپرتز[9] استوار است و از روش زمان کسب شده (به جای ارزش کسب شده) استفاده می‌کند. مدل نارباِئف صرفاً هزینه نهایی را به صورت کمیتی تعینی تقریب می‌زند و احتمال تحقق این مقدار را ذکرن می‌کند و نیز در مورد پیشرفت پروژه در طول مدت زمان آن تحلیلی ارائه نمی‌کند اما این مزیت را نسبت به روش رایج مدیریت ارزش کسب شده را دارد که در ابتدای پروژه مقادیری قابل اعتماد به دست می دهد و همچنین پارامتر انحراف زمانی را در واحد زمان و نه مالی بیان می‌کند [9].

کارُن و همکاران[10] در سال 2013 روشی احتمالاتی برای تخمین هزینه نهایی پروژه را معرفی نمودند. این روش با بهره گیری از به روز رسانی بیزی پارامترهای CPI و SPI، زمان و هزینه احتمالاتی پروژه را به دست می‌آورد. علیرغم مزیت فرض احتمالاتی بودن پارامترهای پروژه، نخست به دلیل فرض توزیع لوگ نرمال برای پارامترهای CPI و SPI و تعمیم آن به تمام پروژه‌ها و همچنین عدم کارایی روش در ارائه نتایج قابل اعتماد برای پروژه‌هایی با انحراف مالی زیاد در ابتدای پروژه، این روش را نمی‌توان به عنوان مدلی جامع در به روز رسانی احتمالاتی زمان و هزینه پروژه به حساب آورد [10].

در این تحقیق نشان داده می‌شود که پارامترهای مدل بتا-اس به یکدیگر وابسته هستند و می‌توان ماتریس همبستگی آن‌ها را محاسبه نمود. به دلیل این که این توابع توزیع می‌توانند از یک نوع نباشند، برای به دست آوردن تابع پیشین احتمال ناگزیر به استفاده از تابع کوپولا[11] خواهیم بود. به کمک تابع کوپولا می‌توان تابع پیشین مدل بتا-اس جهت استفاده در به روز رسانی بیزی و با فرض همبستگی توابع توزیع حاشیه‌ای مدل را به دست آورد.

در این مقاله نخست مفاهیمی چون منحنی پیشرفت تجمعی پروژه، تابع توزیع احتمال بتا و برازش تابع بتا به هر منحنی پیشرفت توضیح

1 Vandevoorde
2 Vanhoucke
3 Kim
4 Reinschmidt
5 Barraza
6 Network-based Simulation
7 Planned Value
8 Narbaev and DeMarco
9 Gompertz
10 Caron et al.
11 Copula Function

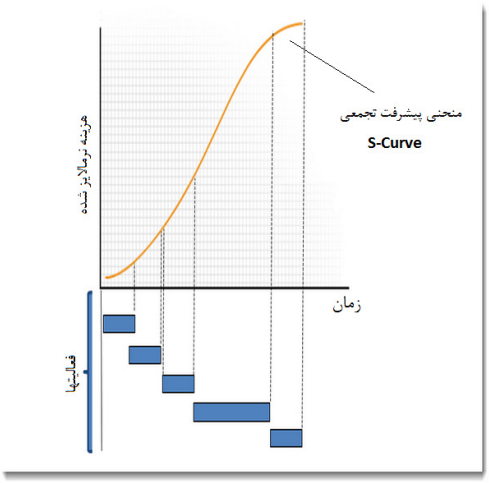
داده می‌شود. سپس الگوریتم شبیه سازی مونت کارلو و در نهایت تابع کوپولا مورد بررسی قرار می‌گیرد. به عنوان جمع بندی، تابع پیشین به کار رفته در به روز رسانی با فرض همبستگی پارامترهای مدل، ارائه می‌شود.

حال اگر زمان و هزینه هر یک از فعالیت‌های پروژه مقدار تعینی نداشته باشد و به دلیل عدم قطعیت موجود بتوان متغیری تصادفی (کمیتی نهایت تابع کوپولا مورد بررسی قرار می‌گیرد. به عنوان جمع بندی، تابع پیشین به کار رفته در به روز رسانی با فرض همبستگی پارامترهای مدل، ارائه می‌شود.

۲- منحنی پیشرفت تجمعی احتمالاتی

منحنی پیشرفت تجمعی پروژه که گاهی به دلیل شکل S مانند، به آن منحنی S نیز اطلاق می‌شود بیانگر میزان تجمعی پارامتری همانند هزینه (در محور قائم) در طول زمان (محور افقی) است. از این منحنی می‌توان برای محاسبه میزان مورد انتظار پارامتر هزینه و مقایسه آن با مقادیر واقعی برای پایش وضعیت حال حاضر و پیش بینی وضعیت آتی پروژه استفاده نمود.

حال اگر زمان و هزینه هریک از فعالیت‌های پروژه مقدار تعینی نداشته باشد و به دلیل عدم قطعیت موجود بتوان متغیری تصادفی (کمیتی احتمالاتی) به زمان-هزینه فعالیت‌ها اختصاص داد، برنامه زمان‌بندی پروژه به شبکه‌ای از متغیرهای تصادفی تبدیل خواهد شد که همان برنامه زمان‌بندی احتمالاتی پروژه است. این برنامه زمان‌بندی احتمالاتی منجر به این خواهد شد که هزینه و زمان پایانی پروژه و منحنی پیشرفت تجمعی (منحنی S) نیز ماهیتی تصادفی داشته باشند [11]. ذکر این نکته ضروری است که متغیرهای تصادفی زمان و هزینه مقادیری غیرتعینی هستند و از این رو برای مطالعه این شبکه احتمالاتی داده‌ها باید از تکنیک‌های شبیه سازی استفاده نمود که جزئیات آن در بخش 5 آورده شده است [12].



شکل 1. منحنی پیشرفت تجمعی [5]
Cumulative Progress curve

۳- تابع توزیع بتا

تابع توزیع احتمال بتا، توزیع احتمال پیوسته‌ای است که در بازه صفر و یک تعریف می‌شود و دو پارامتر شکل دارد. این تابع در علوم مختلف مانند ژنتیک، مدیریت پروژه و مهندسی کنترل برای مدل سازی رفتار متغیرهای تصادفی که در بازه‌ای محدود قرار دارند به کار رفته است.

در آمار و احتمالات، توزیع بتا توزیعی پیوسته است که در بازه محدود A و B و با دو پارامتر شکل α و β تعریف می‌شود. تابع چگالی احتمال (PDF) یک متغیر تصادفی X عبارتست از [13]:

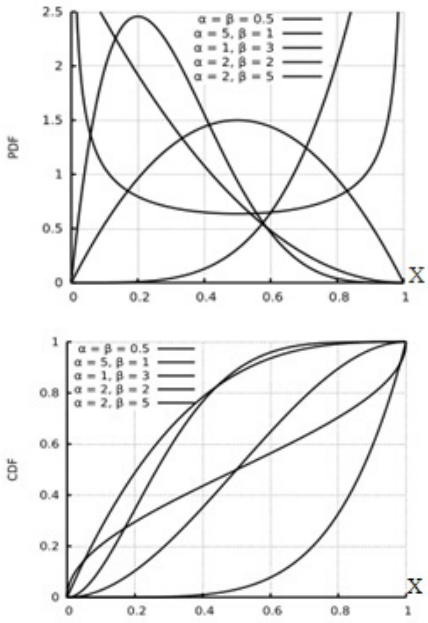
$$f(x;\alpha.\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{(x-A)^{\alpha-1}\,(x-B)^{\beta-1}}{(B-A)^{\alpha+\beta-1}} \qquad \text{(رابطه 1)}$$
$$\alpha.\beta > 0\ ;\ A \le x \le B$$

که در آن $\Gamma(z)$ نشان دهنده تابع گاما است:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}\, e^{-1} dt \qquad \forall z > 0 \qquad \text{(رابطه 2)}$$

برای CDF تابع توزیع تجمعی بتا، شکل بسته[1] وجود ندارد ولی می‌توان آن را به صورت عددی و از محاسبه انتگرال تابع چگالی احتمال بتا به دست آورد.

در شکل 2، شکل‌های مختلف تابع بتا به ازای مقادیر مختلف α و β ترسیم شده است.



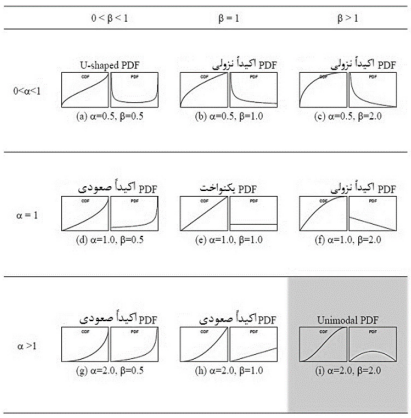
شکل 2. منحنی چگالی احتمال و توزیع تجمعی بتا [5]
Probability Distribution Function and Cumulative Distribution Function of Beta Distribution

1 Closed Form

۴- مدل بتا-اس

مدل بتا-اس مدلی است که از توزیع بتا استخراج شده است. تابع توزیع بتا به دلیل اینکه بسته به پارامترهای تعیین کننده شکل و مکان، طیف وسیعی از الگوهای منحنی پیشرفت تجمعی را پوشش می‌دهد گزینه مناسبی برای معرفی هر یک از منحنی‌های پیشرفت تجمعی است. تابع توزیع بتا سابقه کاربرد طولانی در مدیریت پروژه دارد. یکی از کاربردهای مهم آن در برازش[1] منحنی‌ها به داده‌های مشاهده شده است.[2] ابوریزک و همکاران[3] مجموعه‌ای از تحقیقات را در مورد برازش توزیع‌های احتمال به مدت زمان فعالیت‌های پروژه انجام دادند [13]. (در تحقیقات ایشان از روش‌های عینی و سپس روش‌های احتمالاتی مبتنی بر بیشترین درست‌نمایی و تقریب حداقل مربعات[4] در بیش از 80 مجموعه داده پروژه ساختمانی استفاده شده است. مزیت اصلی استفاده از توزیع بتا این است که توزیع بتا تنها بر حسب دو پارامتر α و β شکل‌های متنوعی را به خود می‌گیرد. در شکل 3 تعدادی از اشکال مختلف توزیع بتا با ترکیبات مختلف α و β ارائه شده است. به طور مثال، توزیع بتا با α=۱ و β=۱ همان توزیع یکنواخت است [5].

مدل بتا-اس با تعیین دو قید به توزیع بتا تعریف می‌شود. نخست، مدل در بازه‌ای محدود تعریف می‌شود که [T,0] است که در آن T نمایانگر مدت زمان پروژه است. دوم اینکه تابع تجمعی احتمال CDF باید نوعاً شکلی مشابه منحنی پیشرفت تجمعی پروژه S-Curve داشته باشد. دامنه امکان پذیر[5] برای پارامترهای α و β به صورتی که شرایط فوق را برآورده کند زمانی احراز خواهد شد $\alpha\beta > 1$ و α که باشد. این محدوده در شکل 3 نمایش داده شده است [12].



شکل ۳. اشکال توزیع بتا بر حسب متغیرهای α و β [۸]
Different Beta Distribution Functions via α and β

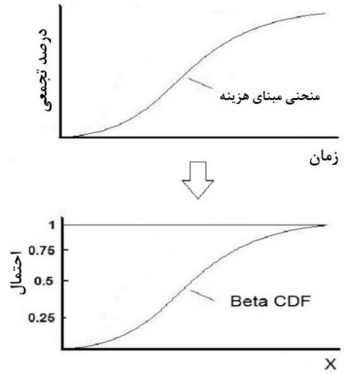
1 Fitting
2 Observed Data
3 AbouRizk et al.
4 Least Square Estimation
5 Plausible

۵- شبیه سازی مونت کارلو

شبیه سازی پروژه عبارت از استفاده از یک مدل برای تبدیل عدم قطعیت‌های پروژه به تاثیرهای محتمل آن‌ها بر روی اهداف پروژه است. یکی از شناخته شده ترین و کاربردی ترین روش‌های شبیه سازی پروژه روش موسوم به مونت کارلو است. این روش بر مبنای اصول مقدماتی نمونه گیری آماری شکل گرفته است. این روش نیازمند ایجاد یک مدل برای پروژه است که اغلب می توان از برنامه پروژه به عنوان مدل استفاده کرد و نیازی به ایجاد مدلی خاص برای آن نیست.

مفهوم کلیدی نهفته در شبیه سازی مونت کارلو، جایگزین شدن مقادیر قطعی در برنامه پروژه با محدوده‌ای از اعداد است که منجر به در نظر گرفته شدن عدم قطعیت در پروژه[6] می گردد [14 و 15].

به طور معمول در برنامه پروژه، برای هر یک از فعالیت‌ها مدت زمان، منابع (هزینه‌ها) و سایر موارد به صورت معین و قطعی فرض می‌شود. این امر موجب می‌گردد زمان، هزینه و منابع کلی پروژه نیز به صورت قطعی و معین به دست آید. در حالی که واقعیت به این صورت نیست و همه این مقادیر فرض شده هرگز اتفاق نخواهند افتاد. به عنوان مثال، به دلایل شناخته شده یا ناشناخته‌ای مانند برآوردهای نادرست، کارهای پیش بینی نشده، دوباره کاری‌ها و البته تاثیرهای ریسک‌های پروژه (مثبت و منفی)، مدت زمان پروژه تغییر خواهد کرد. روش مونت کارلو روشی است که اجازه می‌دهد تا تخمین‌های نقطه‌ای برای هر یک از مقادیر (نظیر زمان، هزینه یا هر عامل دیگری) با محدوده‌ای از مقادیر که هر یک مربوط به احتمال وقوع خاص خود هستند، جایگزین شود. نتایج این روش با شبیه سازی تکرارهای متوالی با استفاده از ورودی‌های تصادفی شکل می‌گیرد. در هر تکرار، مقدار خروجی محتمل نهایی پروژه با توجه به داده‌های تصادفی ورودی، محاسبه می‌شود. با اجرای تعداد کافی تکرار می توان محدوده خروجی پروژه را از بدترین وضعیت تا بهترین وضعیت برآورد کرد. نتایج این روش معمولاً در منحنی‌های S نمایش داده می‌شود که هر خروجی را با احتمال مربوط ارائه می‌کند [۱۶].



شکل ۴. برازش تابع تجمعی بتا به منحنی پیشرفت تجمعی [۲۱]
Fitting Beta CDF to Project S-Curve

6 Project Plan

مزایای استفاده از روش مونت کارلو شامل:

- امکان استفاده از نرم افزار برای شبیه سازی
- سهولت استفاده به ویژه در مواردی که مدل سازی دشوار و پیچیده است
- سابقه مثبت روش، که در پروژه‌های بزرگ و پیچیده نتایج ارزشمندی را به اثبات رسانده است.

گام‌های اجرای روش مونت کارلو به صورت کلی شامل مراحل زیر است:

1. محدوده تغییرات و توزیع احتمال، مربوط به اجزای اصلی مساله را به دست آورید.

2. برای هر متغیر، یک مقدار تصادفی با توجه به توزیع احتمال وقوع آن را به دست آورید. این موضوع می‌تواند با ترسیم نمودار تجمعی احتمال وقوع متغیرها و برداشت تصادفی از آن انجام پذیرد.

ظگام 2 و 3 را تا تعداد دفعات معینی که منجر به تهیه نمودار توزیع نتایج شود، ادامه دهید.

تعداد تکرار بستگی به تعداد متغیرها و ضریب اطمینان مورد نظر دارد. به صورت معمول، تعداد تکرار بین 100 تا 10000 مرتبه در نظر گرفته می‌شود [12 و 17].

کاربرد روش شبیه سازی مونت کارلو در تخمین زمان اتمام پروژه مطابق شکل 5 به صورت مراحل زیر است:

برای مدت زمان انجام هر کدام از فعالیت‌های پروژه بر روی شبکه CPM یک تابع چگالی احتمال فرض می‌شود. این توزیع‌ها می‌توانند شامل انواع نرمال، مثلثی، یکنواخت، بتا و سایر موارد دیگر با توجه به آمار پیشین باشند. در غیر این‌صورت انتخاب این توزیع‌ها بستگی به تجربه و قضاوت مهندسی دارد.

برای مدت زمان هر فعالیت با توجه توزیع احتمال مربوط، نمودار تجمعی آن را ترسیم کنید.

بر اساس تولید اعداد تصادفی بین صفر و یک و مراجعه به نمودار تجمعی هر فعالیت، مدت زمان آن فعالیت را برآورد کنید.

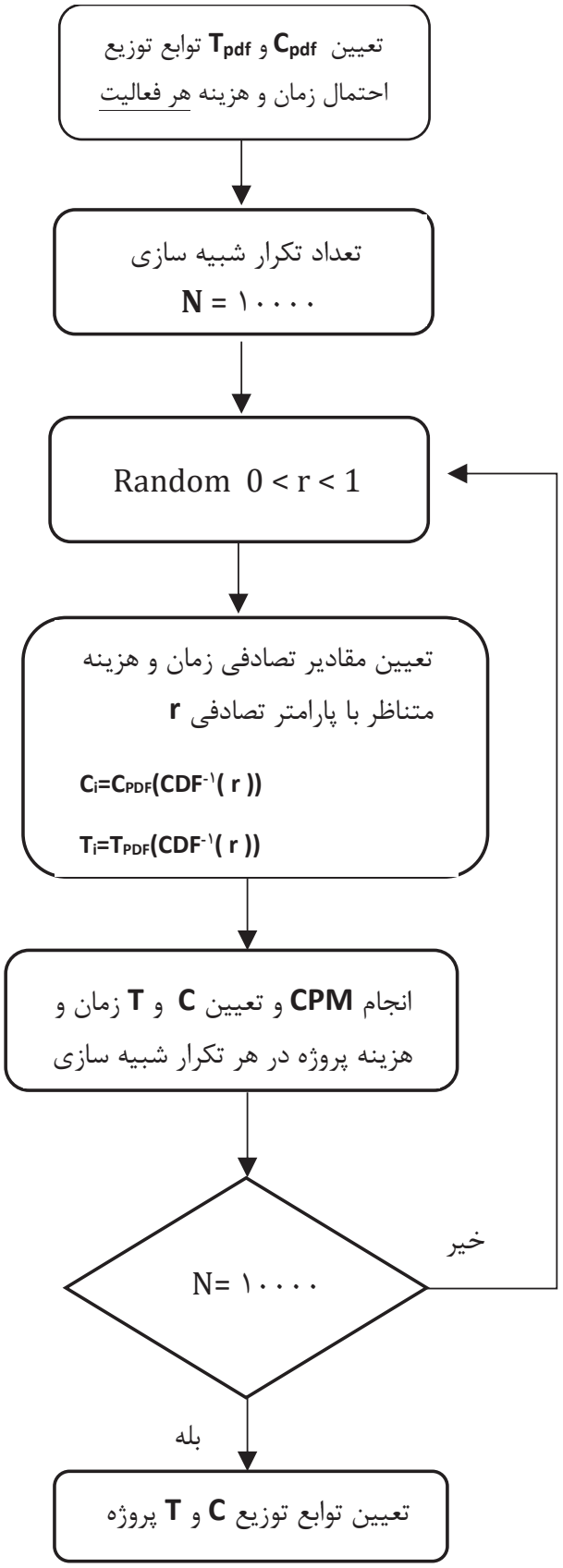
شبکه فعالیت‌های پروژه را محاسبه و مسیر بحرانی و مدت تکمیل پروژه را مشخص کنید.

به تعداد کافی مراحل 3 و 4 را تکرار کنید.

هیستوگرام و نمودار تجمعی مدت زمان تکمیل پروژه را ترسیم کنید.

برای تابع بتای چهارپارامتری که از رابطه ۱ پیروی می‌کند، خواهیم داشت:

$$\mu_x = A + (B - A)\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \qquad \text{(رابطه 3)}$$



شکل ۵ فلوچارت الگوریتم مونت کارلو
Monte Carlo Algorithm Flowchart

$$\sigma_x{}^2 = \frac{(B-A)^2\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2} \quad \text{(رابطه 4)}$$

که در مدل بتا-اس خواهیم داشت: $A = 0$. $B = T$، منظور از T همان زمان کلی پروژه است [12].

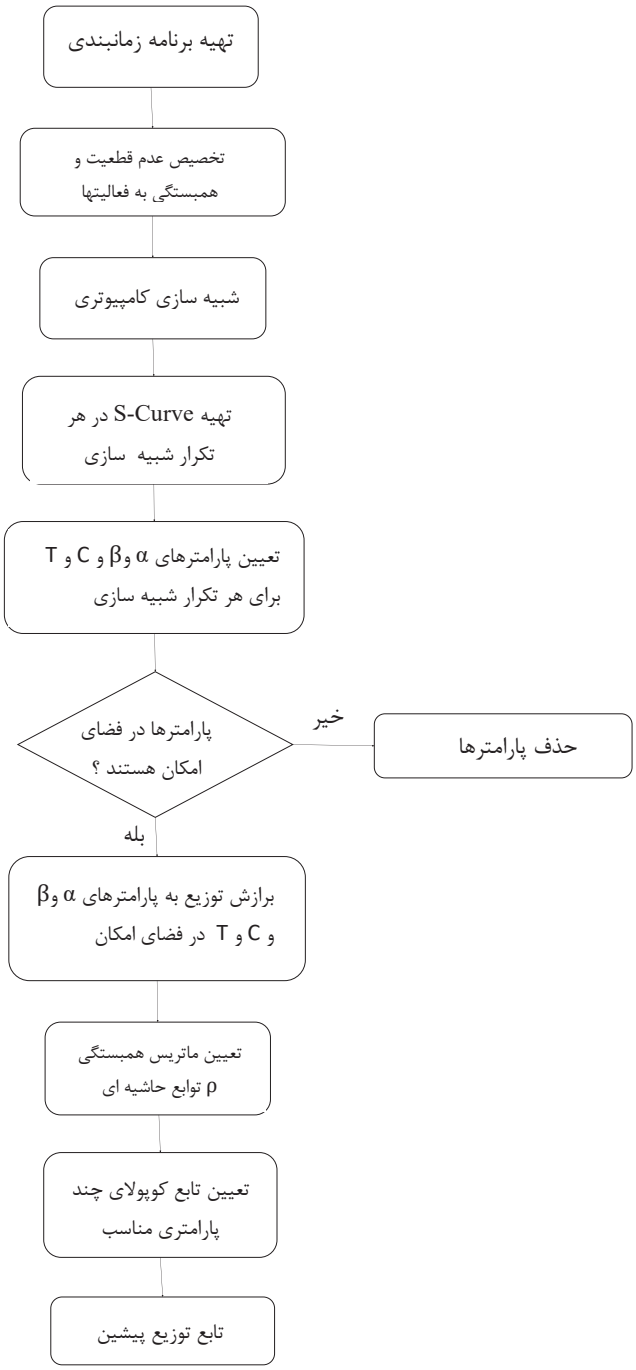
به کمک روابط 3 و 4 می‌توان پارامترهای $\alpha.\beta$ $\alpha.\beta$ مربوط به نمودار برازش داده شده را در هر تکرار شبیه سازی محاسبه نمود. به عبارت دیگر، پس از مدل سازی منحنی پیشرفت تجمعی احتمالاتی، شبکه داده‌های هزینه-زمان پروژه به صورت مجموعه‌ای از مقادیر پارامتر شکل $\alpha.\beta$ و متغیر T زمان پایان پروژه و C هزینه پروژه که هر کدام در هر مرحله شبیه سازی معرف یک منحنی پیشرفت تجمعی احتمالاتی هستند ایجاد می‌شود. سپس تابع توزیع چگالی احتمال مناسبی را می‌توان به هر یک از متغیرهای تصادفی $\alpha_9\beta_9C_9T$ تخصیص داد. به این منظور، آزمون نکویی برازش برای هر یک از توابع توزیع احتمال ضروری است [12].

در این تحقیق جهت انجام آزمون نکویی برازش و انتخاب مناسب ترین تابع چگالی احتمال از روش مربع کای χ^2 استفاده شده است. آزمون χ^2 از آزمون‌های پرکاربرد آماری و از نوع ناپارامتری است و برای ارزیابی همقوارگی متغیرهای اسمی به کار می‌رود. قبل از انجام آزمون یک سطح خطا که معمولا 0/ 05 است در نظر گرفته می‌شود و دو فرضیه آماری زیر تدوین می‌شود:

فرض صفر(h0): بین فراوانی مورد انتظار و مشاهده شده تفاوتی وجود ندارد

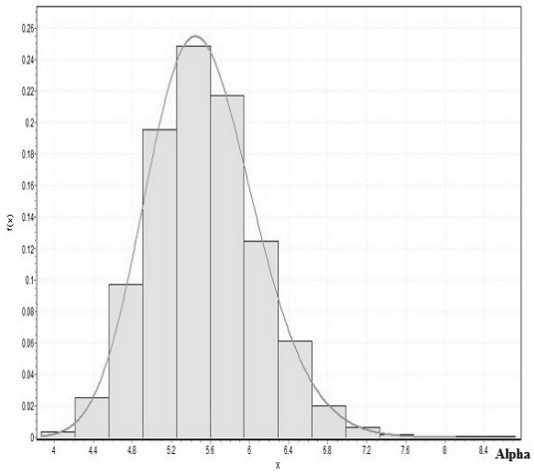
فرض مقابل: بین فراوانی مورد انتظار و مشاهده شده تفاوت وجود دارد. چنانچه سطح معنی داری کمتر از میزان خطا (0/ 05) باشد، h0 رد می‌شود [19].

در این تحقیق به کمک نرم افزار Primavera Risk Analysis® پروژه‌ای با تعداد 50 فعالیت ایجاد شد و پس از تخصیص چگالی احتمال به زمان و هزینه هر فعالیت و با درنظرگرفتن همبستگی بین بین فعالیت‌ها که جزئیات آن در این مقاله نمی گنجد، تعداد 10000 تکرار شبیه سازی (همانگونه که در مراحل بخش 5 ذکر گردید) انجام شده است.



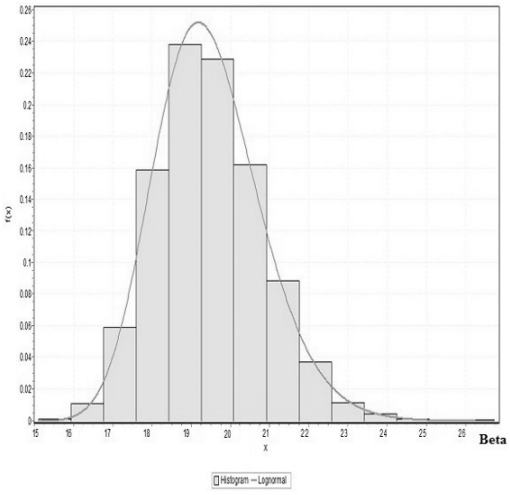
شکل ۶ الگوریتم تعیین تابع پیشین
Prior distribution Function Flowchart

در نتیجه با توجه به روابط 3 و 4، توابع چگالی احتمال حاشیه‌ای برای هریک از متغیرهای تصادفی $\alpha.\beta.C.T$ مطابق ذیل به دست خواهد آمد:



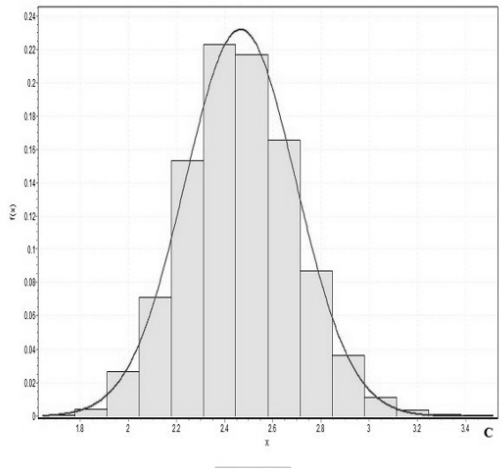
شکل ۷ توزیع حاشیه ای پارامتر α
Marginal Distribution of β

α~ Lognormal (0/6627,0/1577)



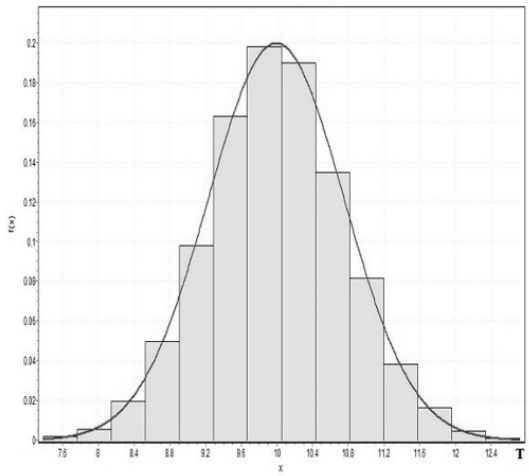
شکل ۶ توزیع حاشیه ای پارامتر β
Prior distribution Function Flowchart

β ~ Lognormal (2/936,0/2189)



شکل ۹ توزیع حاشیه ای پارامترC
Marginal Distribution of T

C ~ Normal (2/5179,0/0490)



شکل ۸ توزیع حاشیه ای پارامتر T
Marginal Distribution of α

T ~ Normal (10/2865,0/4395)

۶- توزیع احتمال مشترک[1]

مقادیر متغیرهای تصادفی X و Yنماینده پیشامدهایی هستند لذا احتمال‌هایی مربوط به هر جفت از مقادیر x و y وجود دارد. احتمال‌های مربوط به تمام جفت مقادیر ممکنx و yرا می‌توان توسط تابع احتمال تجمعی مشترک متغیرهای تصادفی Xو Yکه به صورت زیر تعریف می‌شود، توصیف کرد:

رابطه (5)

$$F_{X,Y}(x.y) = P(X \le x\,.\,Y \le y)$$

که همان احتمال تجمعی وقوع مشترک پیشامدهای $X \le x\,.\,Y \le y$است. اگر متغیرهای تصادفی YوX هر دو پیوسته باشند، توزیع احتمال را می‌توان به وسیله تابع چگالی احتمال مشترک توصیف کرد. اگر $f_{X,Y}(x.y)$ تابع چگالی احتمال مشترک دو متغیرYوX

1 Joint Probability Distribution

باشد، بنا بر تعریف می‌توان نوشت [19]:

رابطه (6)

$$f_{X.Y}(x.y)dxdy = P(x \le X \le x+dx\,.\; y \le Y \le y+dy)$$

در نتیجه برای تابع توزیع تجمعی مشترک دو متغیر، رابطه زیر برقرار خواهد بود:

رابطه (7)

$$F_{X.Y}(x.y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X.Y}(u.v)dudv$$

حال جهت محاسبه تابع چگالی احتمال مشترک می‌توان نوشت:

رابطه (8)

$$f_{X.Y}(x.y) = \frac{\partial^2 F_{X.Y}(x.y)}{\partial x \partial y}$$

همچنین نتیجه می‌شود:

رابطه (9)

$$(a\le X\le b \text{ و } c\le Y\le d) = \int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f_{X.Y}(u.v)dudv$$

۷- همبستگی متغیرهای تصادفی

کوواریانس دو متغیر تصادفی X و Y که آن را با نماد Cov(X,Y) نمایش می دهند به صورت زیر تعریف می‌شود:

(رابطه 10)

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-\mu)(Y-\mu)]=E(XY)-E(X)E(Y)$$

در رابطه بالا $\boldsymbol{\mu_X} = \boldsymbol{E(X)}$ و $\boldsymbol{\mu_Y} = \boldsymbol{E(Y)}$ میانگین‌های دو متغیر X و Y هستند، همچنین عبارت E(X,Y) از رابطه زیر به دست می آید:

(رابطه 11)

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{X.Y}(x.y)dxdy$$

اثبات می‌شود که اگر دو متغیر تصادفی X و Y مستقل باشند، کوواریانس آن‌ها برابر صفر خواهد شد. اگر Cov(X,Y) کوچک یا صفر باشد، رابطه‌ای خطی بین مقادیر دو متغیر برقرار نیست. از این رو Cov(X,Y) اندازه‌ای از میزان همبستگی خطی بین مقادیر دو متغیر X و Y است. به این منظور به طور معمول از کوواریانس بی بعد شده یا ضریب همبستگی که به صورت زیر تعریف می‌شود استفاده می‌شود [19]:

(رابطه 12)

$$\rho(X.Y) = \frac{Cov(X.Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

برای هر دو متغیر تصادفی X و Y همواره $-1 \le \rho(X.Y) \le 1$ برقرار است.

در مثال مطرح شده در بخش شبیه سازی، ماتریس همبستگی خطی متغیرهای T و C و β و α برابر ماتریس متقارن $\rho_{4\times4}$ زیر محاسبه شده است:

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & 0/6227 & 0/0036 & -0/0030 \\ 0/6227 & 1 & 0/3113 & 0/5338 \\ 0/0036 & 0/3113 & 1 & 0/5812 \\ -0/0030 & 0/5338 & 0/5812 & 1 \end{bmatrix}$$

علاوه بر این، باید توجه داشت که تابع توزیع احتمال مشترک، وقتی که همه توزیع‌های حاشیه‌ای از یک نوع نیستند، شکل و فرمول بسته مشخصی ندارد.

در ادامه، تابع کوپولا که برای ساخت تابع توزیع مشترک متغیرهای همبسته مدل بتا-اس استفاده می‌شود توضیح داده می‌شود.

۸- تابع کوپولا[1]

رفتار احتمالاتی (تصادفی) یک متغیر پروژه مانند هزینه، یا زمان را می‌توان توسط تابع توزیع احتمالاتی آن توضیح داد. این تابع که تابع حاشیه‌ای نیز نام دارد به تنهایی بیانگر وضعیت آن متغیر تصادفی خاص است. مطلوب تر این است که بتوان تابعی معرفی نمود که رفتار تصادفی تمام متغیرهای پروژه را در خود داشته باشد. این تابع که تابع توزیع مشترک متغیرهای پروژه نام دارد توسط تابع دیگری به نام تابع کوپولا به توابع حاشیه‌ای خود مربوط می‌شود.

کوپولا در لغت به معنای گره و اتصال ذکر شده است. تابع کوپولا به همراه توابع حاشیه‌ای، امکان مدل سازی رویدادهای تصادفی را برای محققین فراهم می‌کند. در حقیقت، کوپولا توزیع چندمتغیرهای است که توزیع های کناری آن به طور یکنواخت $[0.1]$ روی توزیع شده اند [20].

۸-۱- قضیه اسکلار

فرض کنید $F(x_1.x_2.\ldots.x_p)$ تابع توزیع تجمعی مشترک و $F_i(x_i)$؛ $i = 1.2.\ldots.p$ تابع حاشیه‌ای تجمعی احتمال باشند، آنگاه برای X خواهیم داشت:

(13)

$$F(x_1.x_2.\ldots.x_p) = Cop_{CDF}(F_1(x_1).\ldots.F_p(x_p))$$

که در آن به عنوان تابع مفصل، معلوم است.

1 Copula Function

درحالت پیوسته میتوان چگالی چندمتغیره $f(x_1.x_2.\dots.x_p)$ را با مشتقگیری از دو طرف معادله قبل به صورت زیر تعیین کرد:

(14)

$$f(x_1.x_2.\dots.x_p)=Cop_{PDF}\left(F_1(y_1).\dots.F_p(x_p)\right)\prod f_i(x_i)$$

قضیه اسکلار بیان می‌کند که اگر متغیرهای $X_1.X_2.\dots.X_p$ دارای توزیع حاشیه‌ای پیوسته باشند، تابع منحصربه فرد و یکتای Cop_{CDF} وجود دارد که مانند رابطه 11 تابع توزیع مشترک را به توابع توزیع حاشیه‌ای مرتبط می‌سازد.

توابع کوپولا انواع مختلفی دارند اما در دسته بندی کلی می‌توان آن‌ها را به دو دسته عمده بیضوی و ارشمیدسی تقسیم بندی نمود. در میان توابع کوپولای ارشمیدسی می‌توان به کوپولاهای کلیتون، فرانک و گامبل اشاره نمود. کوپولاهای متداول ارشمیدسی فرمول شکل بسته برای Cop_{CDF} می‌پذیرند.

کوپولاهای بیضوی، مفصل‌هایی حاصل از توزیع‌های بیضوی هستند. اغلب توزیع‌های بیضوی مورد استفاده، توزیع‌های نرمال و -استیودنت چندمتغیره هستند. مزیت کلیدی کوپولاهای بیضوی آن است که میتوانند سطوح متفاوتی از همبستگی را بین حاشیه‌ها مشخص کنند و عیب اصلی آنها این است که عباراتی به شکل بسته ندارند و محدود به داشتن تقارن محوری هستند. تابع کوپولای چند متغیره t-استیودنت به صورت زیر تعریف می‌شود [21]:

(رابطه 15)

$$\mathrm{CopCdf}^{t}_{\upsilon,\rho}(u_1.\dots.u_n;\rho)=T_{\rho,\upsilon}\left(t_\upsilon^{-1}(u_1).\dots.t_\upsilon^{-1}(u_N)\right)=\int_{-\infty}^{t_\upsilon^{-1}}\dots\int_{-\infty}^{t_\upsilon^{-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)\sqrt{(\pi\upsilon)^N|\rho|}}\left(1+\frac{X^T\rho^{-1}x}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+N}{2}}dx$$

(رابطه 16)

$$\mathrm{CopPdf}^{t}_{\upsilon,\rho}(u_1.\dots.u_n;\rho)=|\rho|^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+N}{2}\right)\left[\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)\right]^N\left(1+\frac{1}{\upsilon}\varsigma^T\rho^{-1}\varsigma\right)^{-\frac{\upsilon+N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\upsilon+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)\prod_{n=1}^{N}\left(1+\frac{\varsigma_n^{\,2}}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}}}$$

که در آن ρ ماتریس همبستگی متقارن با قطر اصلی برابر یک، $T_{\rho,\nu}$ تابع توزیع تجمعی t-استیودنت با υ درجه آزادی است و ς_n نیز به صورت زیر تعریف می‌شود [21]:

(رابطه 17)

$$\varsigma_n=t_\upsilon^{-1}(u_N)$$

۹- تابع توزیع احتمال مشترک مدل بتا-اس

برای به روزرسانی توابع زمان و هزینه پروژه، باید از تابع توزیع احتمال پیشین واحدی برای متغیرهای همبسته T و C و β و α استفاده کرد که این تابع (تابع توزیع مشترک پیشین در به روزرسانی بیزی) به صورت حاصل ضرب توابع همبسته T و C و β و α در مقدار تابع کوپولای این چهار پارامتر است تعریف می‌شود. این تابع تمامی پارامترهای مدل و نیز همبستگی آن‌ها و عدم قطعیت‌های موجود در هر یک از آن‌ها را در خود دارد. در بخش 5، پارامترهای مدل بتا-اس برای مثال موردنظر که متغیرهای تصادفی T و C و β و α هستند معرفی و محاسبه شده‌اند. همچنین به کمک ماتریس همبستگی و با توجه به چند متغیره بودن مدل، می‌توان از کوپولای t جهت تعیین تابع توزیع مشترک پیشین استفاده نمود. در این تحقیق جهت تعیین پارامتر υ از نرم افزار MATLAB® استفاده شده است که مقداری برابر 343.6 را برای υ محاسبه می‌کند.

اکنون با مشخص شدن پارامترهای تابع کوپولا و نیز وجود توزیع‌های حاشیه‌ای، می‌توان تابع توزیع مشترک پیشین مدل بتا-اس پروژه را به سهولت محاسبه نمود. مقدار تابع توزیع مشترک پیشین برابر با حاصل ضرب مقادیر توابع حاشیه‌ای T و C و β و α در یک تکرار شبیه سازی در مقدار تابع کوپولای t در همان تکرار است. قابل توجه است که تعداد خروجی‌های توابع حاشیه‌ای، از نتایج شبیه سازی و سپس جدا کردن مقادیر موجود در فضای امکان به دست آمده است. (رابطه 18)

$$F_{Prior}=C\times T\times\alpha\times\beta\times Cop_{Pdf}(\alpha.\beta.C.T)$$

۱۰- شاخص‌های عملکرد هزینه و زمان بندی

ارزش کسب شده و هزینه واقعی می توانند جهت محاسبه شاخص

عملکرد هزینه[1] (CPI) که از متداول ترین شاخص های تعیین کارایی هزینه پروژه است مورد استفاده قرار گیرد. شاخص عملکرد هزینه که میزان کارایی تیم پروژه را در استفاده از منابع اندازه گیری می‌نماید، با تقسیم مقدار ارزش کسب شده (EV) بر هزینه واقعی (AC) به دست می‌آید.

$$CPI = \frac{EV}{AC}$$ (رابطه 19)

CPI کمیتی بدون بعد است. اگر مقدار شاخص عملکرد هزینه بزرگتر از یک باشد، یعنی کار با هزینه‌ای کمتر از مقدار بودجه شده تکمیل می‌گردد و در صورتی که شاخص عملکرد هزینه کمتر از یک باشد، پروژه با افزایش هزینه رو به رو است. شاخص عملکرد زمان بندی (SPI)[2] نشان دهنده میزان کارایی تیم پروژه در استفاده از زمان است. مقدار سنتی شاخص عملکرد زمان بندی با استفاده از ارزش کسب شده و ارزش برنامه‌ای (PV) محاسبه می‌شود.

$$SPI = \frac{EV}{PV}$$ (رابطه 20)

مانند شاخص عملکرد هزینه، این معادله نیز که از تقسیم دو عبارت با یک واحد اندازه گیری حاصل می‌شود، بدون واحد است. اگر مقدار این شاخص بیشتر از یک باشد، یعنی پروژه از زمان بندی جلوتر است و اگر این مقدار کمتر از یک باشد به این معنا است که حرکت پروژه از زمان بندی عقب تر است [21].

۱۱- مشاهدات

کاربرد مهم دیگری که توابع احتمالاتی هزینه و زمان پروژه دارند در تعیین شاخص‌های احتمالاتی عملکرد هزینه و زمان پروژه است. به این صورت که اگر در ماه m، مقدار ارزش کسب شده EV_m و مقدار ارزش برنامه‌ای احتمالاتی PV_m باشد، طبق رابطه 18 و با توجه به اینکه PV_m از تابع توزیع مشترک مدل بتا-اس بدست می‌آید، می‌توان شاخص SPI پروژه را نیز به صورت احتمالاتی محاسبه نمود. با این تفاوت که می‌توان با فرض احتمال وقوع 80 درصد، مقدار متناظر برای متغیر PV را بدست آورده و مابه ازای آن مقدار شاخص SPI را محاسبه نمود.

$$SPI_m = \frac{EV_m}{PV_m}$$ (رابطه 21)

با تغییر درصدهای احتمال وقوع PV، حساسیت SPI قابل بررسی است. کاربرد دیگر این مدل در محاسبه هزینه تخمینی پروژه است. طبق روابط مدیریت ارزش کسب شده می‌توان نوشت [22]:

$$EAC = \frac{BAC}{CPI}$$ (رابطه 22)

که در آن BAC[25] برابر بودجه در انتهای پروژه است که برابر بیشینه مقدار PV است. در مدیریت ارزش کسب شده احتمالاتی، BAC کمیتی تصادفی است و چگالی احتمال آن برابر توزیع احتمال C در مدل چهار پارامتری بتا-اس است. EAC[26] میزان هزینه تمام شده پروژه است در صورتی که پروژه با عملکرد یکنواخت به پایان برسد. با توجه به این توضیحات، با فرض این که در ماه گزارش شده EV و AC برابر مقادیر زیر باشند، می‌توان نوشت:

(رابطه 23)

$$EV = 1/6 \quad AC = 2/0 \Rightarrow CPI = 0/8$$

(رابطه 24)

$$EAC = \frac{BAC}{CPI} = \frac{BAC}{0/8} = \frac{C}{0/8} = 1.25\ C8$$

از مدل مثال قبل می دانیم که:

$$C \sim Normal\ (2/5179\ .\ 0/0490)$$

لذا:

$$EAC = 1/25\ C = Normal\ (3/147\ .\ 0/076)$$

در ادامه، با معلوم بودن تابع چگالی احتمال EAC، می توان احتمال اینکه هزینه تخمین زده شده نهایی پروژه از مقدار خاصی مانند C_m به شرط اینکه $0 < C_m < C$ باشد را به کمک اصول اولیه احتمال تعیین کرد.

برای مثال، با فرض $C_m = 3$ و با توجه به تابع EAC می توان نوشت:

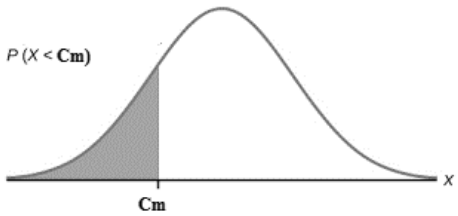
(رابطه 25)

$$P(EAC < C_m) = P(EAC < 3) = 0/2895$$

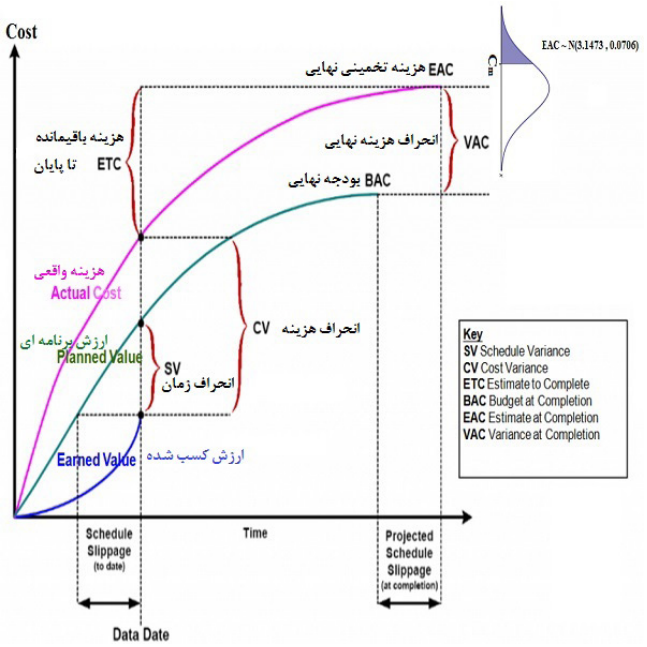
یعنی با احتمال 28/ 95 درصد، هزینه نهایی پروژه کمتر از 3 واحد خواهد بود. در شکل 10، پارامترهای مدیریت ارزش کسب شده مشخص شده اند.

1 Cost Performance Index

2 Schedule Performance Index



شکل ۱۰ منحنی چگالی احتمال متغیر تصادفی EAC
Marginal Distribution of C



شکل ۱۱ هزینه تخمینی کل پروژه EAC
Probability distribution function of EAC

۱۲- جمع بندی و نتیجه گیری

کمیت‌های زمان و هزینه پروژه، علاوه بر این که متغیرهایی تصادفی هستند، بلکه به یکدیگر همبسته نیز هستند و می‌توان این همبستگی احتمالاتی را مدل سازی نمود. از مزیت‌های متدلوژی ارائه شده در این مقاله این است که کلیه عدم قطعیت‌های مربوط به تک تک فعالیت‌های یک برنامه زمانبندی که نهایتا اثر تجمیعی و گسترش یافته آنها در تابع نمودار تجمعی پروژه پدیدار می‌شود با استفاده از یک تابع بتا-اس و چهار پارامتر آن در هر تکرار شبیه سازی مونت کارلو مدل سازی می‌شوند. روش مورد اشاره به دلیل انعطاف پذیری بالای تابع بتا-اس در برازش نمودار تجمعی پروژه در هر پروژه‌ای قابل کاربرد است. از سوی دیگر با استفاده از تابع کوپولا توابع حاشیه‌ای T و C و β و α مدل که از برازش به نتایج شبیه سازی برنامه به دست آمده‌اند به هم همبسته می‌شوند. این توابع توزیع حاشیه‌ای می‌توانند هر نوع توزیع پیوسته‌ای را اختیار کنند و الزامی به هم نوع بودن توابع توزیع آنها همچون توزیع‌های نرمال، لوگ نرمال و گاما نیست. بلکه پس از آزمون نکویی برازش، می‌توان انواع متفاوتی از توزیع‌های احتمال را به آن‌ها تخصیص داد. بنابراین در این مقاله نشان داده شد که با استفاده از تابع کوپولا می‌توان کلیه عدم قطعیت‌های برنامه پروژه را با استفاده از یک تابع توزیع مشترک احتمالاتی مبتنی بر کوپولا نشان داد. همچنین کاربرد این مدل در پیش بینی شاخص‌های عملکردی احتمالاتی پروژه مطابق با روش ارزش کسب شده نشان داده شد.

لازم به ذکر است که نتایج و خروجی این مدل سازی را، که همان تابع توزیع مشترک پروژه است، می‌توان به عنوان ورودی در به روزرسانی بیزی مدل احتمالاتی ارزش کسب شده پروژه به کار گرفت. به روزرسانی بیزی روشی است که مدل را بر حسب شرایط موجود پروژه و پس از آغاز آن به روزرسانی و پیش بینی‌های دقیق تری ارائه می‌کند [23]. این موضوع به عنوان یک زمینه تحقیقاتی مکمل توسط مولفان این مقاله در حال انجام می‌باشد. چنین مدلی کاربران برنامه‌های پروژه را به ابزار کاملی برای پیش بینی احتمال نیل به اهداف زمان و هزینه پروژه مجهز خواهد ساخت.

مراجع

[1] Project Management Body of Knowledge, Project Management Institute,PMI, 2013.

[2]IPMA Competence Baseline Version 3.0, IPMA – International Project Management Association, 2006.

[3] C. Chapman, W. Ward, Project Risk Management Processes Techniques and Insight, 2 ed., Wiley, NY USA, 2003.

[4] M. Bagherpour, T. Motarji, Project Cost Management, 1 ed., Idehnegar, Tehran, Iran, 2013 (In Persian).

[5] G.A. Barraza, E.W. Back, F. Mata, Probabilistic Forecasting of Project Performance Using Stochastic S Curves, Journal of Construction Engineering and Management, 130(1) (2004) 25-32.

[6] S. Vandevoorde, M. Vanhoucke, A Comparison of Different Project Duration Forecasting Methods Using Earned Value Metrics, International Journal of Project Management, 24 (2006) 289-302.

[7] Engineering

[8] R.D.H. Warburton, D.F. Cioffi, Estimating a project's earned and final duration, International Journal of Project Management, 34(8) (2016) 1493-1504.

[9] H.L. Chen, W.T. Chen, Y.L. Lin, Earned value project management: Improving the predictive power of planned value, In-

[17] Cost Risk and Uncertainty Analysis Handbook 1ed., US Air Force, MA USA, 2007.
[18] Group of Authors, Risk Management in Projects (Code 659), Presidential Office-The deputy of Planning and Strategic Supervision Press, Tehran, Iran, 2008 (In Persian).
[19] M. Zahraei, S. Khazaei, Statistics and Probability in Civil Engineering 1ed., University of Tehran Press, Tehran, Iran, 2008 Group of Authors, Risk Management in Projects (Code 659), Presidential Office-The deputy of Planning and Strategic Supervision Press, Tehran, Iran, 2008 (In Persian).
[20] A. Meucci, A Short Comprehensive Practical Guide to Copulas, Risk Professional Journal, (2011) 22-27.
[21] J. Gatz, Properties and Applications of the Student T Copula, University of Delft, Delft, Netherlands, 2007.
[22] PMI, Practice Standard for Earned Value Management in, Project Management Institute, Inc., Pennsylvania, USA, 2011, pp. 7-27.
[23] R. Elshaer, Impact of sensitivity information on the prediction of project's duration using earned schedule method, International Journal of Project Management, 31(4) (2013) 579-588.
[24] J. Brynjarsdóttir, Y. Li, Introduction to Bayesian Statistics, in: U.o.N.C. SAMSI Statistical and Applied Mathematical Scence Institute (Ed.), SAMSI & NCSU, USA, 2012.
ternational Journal of Project Management, 34(1) (2016) 22-29.
[10] T. Narbaev, A. DeMarco, An Earned Schedule-based regression model to improve cost estimate at completion, International Journal of Project Management, 32(6) (2014) 1007-1018.
[11] F. Caron, F. Ruggeri, A. Merli, A Bayesian Approach to Improve Estimate at Completion in Earned Value Management, Project Management Journal, 44(1) (2013) 3-16.
[12] A. Alshibani, O. Moselhi, Stochastic Method for Forecasting Project Time and Cost, in: Construction Research Congress 2012, ASCE, West Lafayette USA, 2012, pp. 545-555.
[13] B.C. Kim, Forecasting Project Progress and Early Warning of Project Overruns With Probabilistic Methods, Texas A&M University, TX,USA, 2007.
[14] S.M. AbouRizk, D.W. Halpin, J.R. Wilson, Visual Interactive Fitting of Beta Distributions, Journal of Construction Engineering and Management, 117(4) (1991) 589-605.
[15] O. Zwikael, S. Globerson, T. Raz, Evaluation of Models for Forecasting the Final Cost of a Project, Project Management Journal, 31(1) (2000) 53-57.
[16] P. Brandimarte, Handbook in Monte Carlo Simulation Applications in Financial Engineering Risk Management, WILEY, NY, USA, 2014.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:
Mehdi Khayyatia, Afshin Firouzib, Project Risk Analysis Using an Integrated Probabilistic Beta-S Model and Multi-Parameter Copula Function, *Amirkabir J. Civil Eng., 51(3)(2019)453-464*.
DOI: 10.22060/ceej.2018.13596.5443