

# کمانش موضعی صفحات ارتوتروپیک بر روی انواع تکیه‌گاه داخلی الاستیک به روش نوار محدود اسپلاین

ایمان جنتی<sup>۱</sup>؛ مجتبی ازهری<sup>۲</sup>

## چکیده

در طراحی سازه‌ها بررسی پایداری ورق‌های نازک تحت فشار همواره در از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده‌است. با توجه به مشکلات حاکم بر حل دقیق معادلات دیفرانسیل مربوط به تحلیل پایداری ورق‌ها، از روش‌های حل عددی استفاده می‌شود. یکی از روش‌های عددی روش نوار محدود اسپلاین می‌باشد. انواع تکیه‌گاه‌های داخلی الاستیک را می‌توان با استفاده از مدل فنر الاستیک در این روش اعمال نمود. در این مقاله با استفاده از روش نوار محدود اسپلاین و همچنین معادلات پایداری صفحات برنامه‌ای کامپیوتری تنظیم شد که، توانایی مدل‌کردن انواع تکیه‌گاه‌های داخلی الاستیک و حل مسأله پایداری این صفحات را دارد. کمانش موضعی صفحات ارتوتروپیک بر روی انواع تکیه‌گاه‌های داخلی الاستیک بررسی و صحت و دقت روش با روش‌های دیگر مقایسه می‌شود. این روش همانند سایر روش‌های نوار محدود، از میزان هم‌گرایی مطلوبی برخوردار است. تأثیر پارامترهای موثر بر روی ضریب کمانش موضعی ورق مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. با استفاده از نتایج بدست آمده، می‌توان محل مناسبی را برای قرار دادن نوع خاصی از تکیه‌گاه الاستیک با سختی مشخص، جهت رسیدن به مقادیر بالاتری از ضرایب کمانش و افزایش پایداری ورق برای بارگذاری‌های داخل صفحه پیشنهاد نمود.

## کلمات کلیدی

کمانش موضعی، صفحات ارتوتروپیک، تکیه‌گاه الاستیک، روش نوار محدود اسپلاین.

## *Local Buckling of Orthotropic Plates on Elastic Supports Using Spline Finite Strip Method*

I. Jannati; M. Azhari

### ABSTRACT

The prediction of local stability of thin plates under compression has become increasingly important in structural design.

Numerical methods are employed to overcome the difficulties of exact solution for partial differential equations of plate's stability. Spline Finite Strip Method is one of these numerical methods and different elastic supports attached to the plate may be handled using this method. In the present paper, local buckling of orthotropic plates resting on elastic supports are studied and results are compared with known solutions. It is shown that rapid convergence of the solution is obtained.

Local buckling coefficients of plates are calculated for various effective parameters. The optimum position of the elastic supports with specific stiffness is proposed in order to maximize the local buckling coefficients for plates subjected to in-plane loading.

### KEYWORDS

Local Buckling, Orthotropic Plates, Elastic supports, Spline Finite Strip Method.

<sup>۱</sup> کارشناسی‌ارشد مهندسی عمران - سازه؛ دانشگاه صنعتی اصفهان: Email: [iman\\_jannati@yahoo.com](mailto:iman_jannati@yahoo.com)

<sup>۲</sup> استاد دانشکده مهندسی عمران؛ دانشگاه صنعتی اصفهان: Email: [mojtaba@cc.iut.ac.ir](mailto:mojtaba@cc.iut.ac.ir)



سال ۱۹۷۴ توسط پلانک و ویتربک معرفی گردید [۳]. در این روش تغییر مکان جانبی نوار در حین کمانش در جهت عرضی به صورت یک چند جمله ای از درجه ۳ و در جهت طولی به صورت نمایی مختلط فرض می‌گردد. از مشخصات این روش آن است که فرض می‌کند، خطوط اتصال اجزا مسطح پس از کمانش نیز مستقیم باقی می‌مانند که در مورد کمانش کلی فرضی نادرست می‌باشد. بنابراین روش یاد شده برای بررسی کمانش کلی مناسب نمی‌باشد.

روش دیگر ارائه شده برای تحلیل رفتار ورق‌ها، روش نوار محدود اسپلاین<sup>۲</sup> است. توابع اسپلاین در ابتدا توسط شونبرگ [۴] برای مسائل توزیع داده‌ها استفاده شد. به دلیل سهولت استفاده از این توابع در روند مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری (چند جمله‌ای بودن) از این توابع در روش‌های عددی نیز استفاده شد و توسط بسیاری از محققان علوم سازه‌ای از جمله پرنتر [۵] که برای درون‌یابی تغییرات طولی جابجایی مورد استفاده قرار گرفت. روش نوارهای محدود اسپلاین در سال ۱۹۸۲ توسط فن [۶] برای استفاده در تحلیل صفحات به صورت جامعی بسط داده شد. در این روش از گره‌های متفاوتی در طول هر نوار استفاده می‌شود و از این جهت به روش اجزا محدود نزدیکتر است. از مشخصات این روش، قابلیت مدل‌کردن شرایط مرزی مختلف و بارگذاری‌های پیچیده‌تر نسبت به سایر روش‌های نوار محدود می‌باشد. ولی به واسطه وجود گره‌های طولی، تعداد درجات آزادی بیشتر بوده و بنابراین به زمان و حافظه کامپیوتری بیشتری احتیاج است.

حل پایداری صفحات بر روی تکیه‌گاه وینکلر و به صورت گسترده یکنواخت اولین بار در سال ۱۹۸۹ توسط کندی و ویلیامز [۷] به روش تحلیلی مورد استفاده قرار گرفت و توانستند حل صریحی برای کمانش و ارتعاش ورق‌هایی بر روی تکیه‌گاه یکنواخت ارائه دهند. کرسنر و همکارانش [۸] نیز اثر تکیه‌گاه‌های نقطه‌ای میانی را بر روی مسأله ارتعاش صفحات بررسی کردند. امورتاگ و آکوز [۹] با استفاده از نوعی روش ترکیبی اجزا محدود ارتعاش آزاد صفحات را بر روی تکیه‌گاه گسترده الاستیک بررسی نمودند. راثو و راجو [۱۰] نیز به بررسی اثر شکل مودها در کمانش ورق‌های مستطیلی ارتوتروپیک مفصلی پرداختند. ماداسامی [۱۱] در سال ۱۹۹۴ برای اولین بار با استفاده از روش نوار محدود اسپلاین توانست ورق‌های سوراخ‌دار را که بر روی تکیه‌گاه داخلی نقطه‌ای قرار دارند آنالیز استاتیکی نماید. ساها و گاتا [۱۲] در سال ۱۹۹۷ پایداری دینامیکی ورق‌ها را بر روی تکیه‌گاه وینکلر مورد بررسی قرار دادند. سعادت‌پور و همکاران

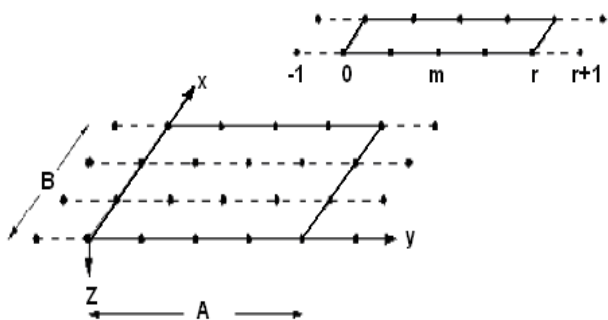
برای ورق‌هایی که بر روی انواع تکیه‌گاه‌های الاستیک قرار گرفته‌اند کاربردهای بسیاری می‌توان یافت. بطور مثال می‌توان به پایداری ورق روی فونداسیون ساختمان‌ها، بتن مسلح سنگفرش بزرگراه‌ها و باند فرودگاه‌ها، همچنین ورق فلزی متکی بر پانل‌های ساندویچی اشاره کرد. در آنالیز عرشه‌های پل بزرگراه‌ها، ورقه‌های بدنه هواپیماها و کشتی‌ها و ورق‌های تقویت روی تیرها و ستون‌ها نیز مسأله کمانش ورق‌های نازک بر روی تکیه‌گاه‌های الاستیک مطرح است. کمانش بیشتر در اعضای رخ می‌دهد که ابعاد آن در جهات مختلف تفاوت زیادی با یکدیگر دارند. از این رو، مقاومت سازه‌ای ورق‌ها که ضخامتشان نسبت به ابعاد طولی و عرضی آنها بسیار کمتر است به شدت تحت بار گذاری‌های داخل صفحه آسیب پذیرند.

در تحلیل صفحات بر روی تکیه‌گاه الاستیک بسیاری از محققان از مدل تکیه‌گاه وینکلر و به صورت الاستیک قائم و تکیه‌گاه دو پارامتری (دارای مقادیر مساوی سختی تکیه‌گاهی قائم و دورانی) استفاده کرده و روش‌های عددی متفاوتی از قبیل روش‌های المان محدود و روش‌های المان مرزی را بکار گرفته‌اند. از انواع تکیه‌گاه میانی ورق می‌توان به تکیه‌گاه الاستیک گسترده و ناحیه‌ای، تکیه‌گاه الاستیک خطی و تکیه‌گاه الاستیک نقطه‌ای اشاره نمود.

یکی از انواع روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل ورق‌ها روش نوارهای محدود<sup>۱</sup> است که خود انواع متفاوتی دارد. روش نوارهای محدود معمولی در سال ۱۹۷۶ توسط چونگ [۱] برای بررسی رفتار ورق‌ها به‌طور کامل ارائه شد. در این روش از توابع سینوسی شکل در طول نوار استفاده می‌گردد. این روش برای حل ورق‌های با شرایط انتهایی مفصلی به دلیل انتخاب تابع شکل مناسب، بسیار ساده و سریع می‌باشد. در صورتی‌که برای سایر شرایط مرزی حل مسأله پیچیده‌تر و نیازمند صرف وقت بیشتری می‌باشد. برادفورد و ازهری [۲] در سال ۱۹۹۵ با استفاده از توابع شکل غیرسینوسی، شرایط مرزی مختلف را مدل نمودند. علاوه بر این، در حضور نیروی برشی، به دلیل اختلاف فاز بین مودها، این روش دارای همگرایی مناسب نبوده که محدودیت بزرگی در حل مسائل کمانش تلقی می‌گردد. برای غلبه بر این محدودیت روش نوارهای محدود مختلط ارائه گردید.

روش نوارهای محدود مختلط<sup>۲</sup> خود به دو دسته نوارهای محدود مختلط دقیق و نوارهای محدود مختلط نیمه تحلیلی تقسیم می‌شود. روش نوارهای محدود مختلط نیمه تحلیلی در

بندی ورق به نوارهای طولی و قرار گیری گره‌ها بر روی آن مشاهده می‌شود. در شکل ۲ نوار ورق بوسیله‌ی  $r$  گره قسمت بندی شده است. برای اعمال شرایط مرزی دو لبه ابتدایی و انتهایی ورق، ۲ گره کمکی (در دو انتهای نوار) نیز لازمند. پس در کل روی هر خط گره،  $r+3$  گره مقطعی نیاز است. هر گره مقطعی نشان داده شده در شکل نیز دارای ۴ درجه آزادی (۳ درجه آزادی جابجایی و یک درجه آزادی دورانی حول لبه کناری نوار) می‌باشد. از چهار درجه آزادی یاد شده دو درجه آزادی  $w$  و  $\theta$  درجات آزادی خمشی و دو درجه آزادی  $u$  و  $v$  درجات آزادی غشایی می‌باشد. در این مقاله درجات آزادی خمشی مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۲: تقسیم بندی کل ورق به نوارهای طولی در راستای  $y$  با نمایش خطوط گرهی در روش محدود اسپلین

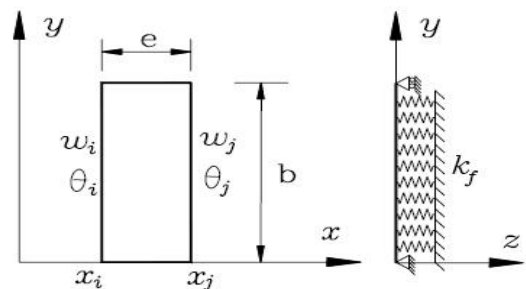
در روش نوار محدود اسپلین برای درونیابی یک تابع اختیاری در فاصله  $a \leq y \leq b$ ، ابتدا این فاصله بوسیله‌ی گره‌ها به تعداد  $r$  قسمت مساوی تقسیم می‌شود.

$$(0 \leq m \leq r, y_0 = a, y_r = b, y_m = y_0 + m(b-a)/r)$$

از آنجا که این تابع در ناحیه‌ی خاصی مقدار دارد، قطعه‌ای نامیده می‌شود.  $\Phi_m(y)$  برای توابع اسپلین مرتبه سوم  $B_3$  (شکل ۳) با فواصل یکسان و مرکز  $y = y_m$  به صورت رابطه ۱ تعریف می‌شود.

$$\Phi_m(y) = \frac{1}{6h^3} \begin{cases} (y - y_{m-2})^3 & y_{m-2} \leq y \leq y_{m-1} \\ h^3 + 3h^2(y - y_{m-1}) + 3h(y - y_{m-1})^2 - 3(y - y_{m-1})^3 & y_{m-1} \leq y \leq y_m \\ h^3 + 3h^2(y_{m+1} - y) + 3h(y_{m+1} - y)^2 - 3(y_{m+1} - y)^3 & y_m \leq y \leq y_{m+1} \\ (y_{m+2} - y)^3 & y_{m+1} \leq y \leq y_{m+2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

[۱۳] نیز با استفاده از روش گالرکین در سال ۱۹۹۸ توانستند، کمانش ورق را بر روی تکیه‌گاه میانی بررسی کنند. برادفورد [۱۴] تحقیقات گسترده‌ای بر روی کمانش یک طرفه ورق‌ها انجام داده است که تحقیقات ایشان به نتایج قابل توجهی رسیده است در سال ۲۰۰۰ نیز حل مشابهی توسط ماتسونگا [۱۵] برای مسأله پایداری ورق‌های ضخیم بر روی این تکیه‌گاه‌ها ارائه گردید. در همان سال هانگ [۱۶] توانست از روش نوار محدود معمولی برای تحلیل حالات خاصی از قرارگیری ورق‌های مستطیلی بر روی تکیه‌گاه الاستیک استفاده کند (شکل ۱). ازهری و عبدالهیان دهکردی [۱۷] نیز توانستند، با استفاده از روش نوار محدود اسپلین به بررسی پایداری ورق‌های ارتوتروپیک بپردازند در این مقاله نیز، از روش نوار محدود اسپلین برای تحلیل پایداری ورق‌های متکی بر انواع تکیه‌گاه‌های الاستیک استفاده خواهد شد و نحوه‌ی استخراج ماتریس‌های سختی و هندسی و همچنین حل مسأله کمانش مربوط به این ورق‌ها توضیح داده خواهد شد.



شکل ۱: مدل فنر ارائه شده برای تحلیل ورق متکی بر تکیه‌گاه الاستیک یکنواخت در روش نوار محدود

## ۲- روش نوار محدود اسپلین و تعیین ماتریس‌های سختی و هندسی

در روش نوار محدود اسپلین بر خلاف دو روش دیگر نوار محدود (نوار محدود عادی و مختلط)، در راستای طولی نوارها گره‌هایی در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۲ چگونگی تقسیم

همچنین  $\{\Phi\}$  برداری است، سطری که دارای  $r+3$  عضو که به صورت رابطه ۶ بیان می‌شود.

$$\{\Phi\} = \{\Phi_{-1} \quad \Phi_0 \quad \Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_{r+1}\} \quad (6)$$

ماتریس ستونی  $[\delta_b]$  درجات آزادی ناشی از تغییر مکان‌های خمشی می‌باشد. متغیرهای این ماتریس بردارهای ستونی هستند که هر یک خود دارای  $r+3$  عضو می‌باشد. این متغیرها به شرح رابطه ۷ می‌باشند:

$$\begin{aligned} [\alpha_i] &= [\alpha_{-1} \quad \alpha_0 \quad \dots \quad \alpha_{r+1}]_i^T \\ [\beta_i] &= [\beta_{-1} \quad \beta_0 \quad \dots \quad \beta_{r+1}]_i^T \\ [\alpha_j] &= [\alpha_{-1} \quad \alpha_0 \quad \dots \quad \alpha_{r+1}]_j^T \\ [\beta_j] &= [\beta_{-1} \quad \beta_0 \quad \dots \quad \beta_{r+1}]_j^T \end{aligned} \quad (7)$$

در روابط شماره ۷، مقادیر  $\alpha_i$  و  $\alpha_j$  جابجایی قائم برای گره‌های مقطعی روی دو خط گره  $i$  و  $j$  (دو لبه کناری نوار) می‌باشد و همچنین  $\beta_j$  و  $\beta_i$  دوران حول گره‌های مقطعی در همین خطوط گره‌ای می‌باشد.

در این روش هر نوع شرایط تکیه‌گاهی را می‌توان به آسانی مدل نمود. نحوه‌ی برآورده شدن شرایط مرزی در راستای هر نوار با نوشتن شرط تکیه‌گاهی آن نقطه توسط اصلاح توابع اسپلاین انجام می‌شود. به عنوان نمونه برای تکیه‌گاه ساده در ابتدای نوار می‌توان نوشت:

$$w(y=0) = 0 \quad \text{شرط مرزی شماره ۱} \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 w(y=0)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{شرط مرزی شماره ۲} \quad (9)$$

اگر برای یک خط گره این دو شرط را نوشته و در توابع اسپلاین جایگذاری شوند،  $\Phi_{-1}$  و  $\Phi_0$  حذف شده و می‌توان  $\bar{\Phi}_1$  را به صورت رابطه ۱۰ اصلاح نمود.

$$\bar{\Phi}_1(y) = \Phi_1(y) - \Phi_{-1}(y) \quad (10)$$

به همین صورت برای گره انتهایی نوار می‌توان نوشت:

$$\bar{\Phi}_{m-1}(y) = \Phi_{m-1}(y) - \Phi_{m+1}(y) \quad (11)$$

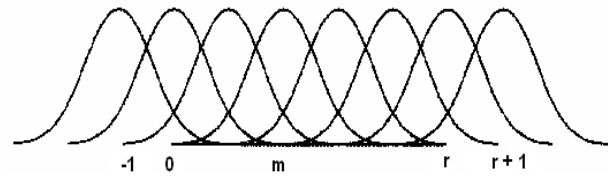
برای شرایط لبه‌ای دو سر گیردار نیز می‌توان شرایط لبه‌ای مشابه را اعمال نمود و مقادیر اصلاحی توابع شکل رابه صورت روابط ۱۲ و ۱۳ به دست آورد.

$$\bar{\Phi}_1(y) = \Phi_{-1}(y) + \frac{1}{2} \Phi_0(y) + \Phi_1(y) \quad (12)$$

$$\bar{\Phi}_{m-1}(y) = \Phi_{m-1}(y) + \frac{1}{2} \Phi_m(y) + \Phi_{m+1}(y) \quad (13)$$

اگر  $U_p$  نشان‌دهنده انرژی ارتجاعی ورق و  $U_y, U_x, U_f$  به

در رابطه ۱،  $h = \frac{b-a}{r}$  طول هر ناحیه است.



شکل ۳: نمایش چند تابع اسپلاین  $B_3$  در حوالی گره  $m$

با نوشتن توابع اسپلاین بر روی هر گره و استفاده از اصل بر هم نهی می‌توان هر تابع پیوسته و مشتق‌پذیر  $f(y)$  را درونیابی نمود. این مجموع توابع که با  $s(y)$  نشان داده می‌شود، به چهار تابع اسپلاین حوالی گره  $m$  وابسته است. پس همانطور که گفته شد، دو گره کمکی  $y_{r+1}$  و  $y_{-1}$  برای درونیابی در قسمت اول و آخر مورد نیاز است. سری توابع اسپلاین به صورت رابطه ۲، بیان می‌شود.

$$s(y) = \sum_{m=-1}^{r+1} \alpha_m \Phi_m(y) \quad (2)$$

که در این رابطه  $\alpha_m$ ها ضرایب بدست آمده در حین درونیابی می‌باشند، که از شرایطی نظیر شرایط مرزی بدست آمده‌اند.

برای کماتش موضعی (تغییر شکل‌های خمشی) درجات آزادی در هر یک از گره‌ها شامل تغییر مکان قائم ( $w$ ) و دوران حول محور طولی نوارها ( $\theta_y$ ) می‌باشد که باید به وسیله توابع شکل تخمین زده شود. برای درونیابی مقادیر گره‌ای (شیب و جابجایی) در راستای عرضی نوارها، از توابع شکل هرمیتی و در راستای طولی از یک چندجمله‌ای اسپلاین استفاده شده است. بنابراین می‌توان تغییر مکان خمشی ورق را به صورت رابطه ۳ بیان نمود.

$$w = \sum_{m=-1}^{r+1} [N][\Phi]\{\delta_b\} \quad (3)$$

که در رابطه ۴ بصورت باز نشان داده شده است:

$$w = \sum_{m=-1}^{r+1} [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{bmatrix} \{\Phi\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \{\Phi\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\Phi\} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \{\Phi\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\alpha_i] \\ [\beta_i] \\ [\alpha_j] \\ [\beta_j] \end{bmatrix} \quad (4)$$

توابع هرمیتی که در راستای عرضی نوارها قرار دارند، به صورت رابطه ۵ تعریف می‌شوند. در این روابط  $\bar{x} = \frac{x}{b}$  و  $b$  عرض نوار می‌باشد.

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - 3\bar{x}^2 + 2\bar{x}^3 \\ N_2 &= x(1 - 2\bar{x} + \bar{x}^2) \\ N_3 &= 3\bar{x}^2 - 2\bar{x}^3 \\ N_4 &= x(\bar{x}^2 - \bar{x}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} E_x &= E_y = E \\ \mu_x &= \mu_y = \mu \\ G_{xy} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \end{aligned} \quad (20)$$

در روابط (۱۶) نیز،  $k_f$ ،  $k_x$ ،  $k_y$  پارامترهای نشان دهنده سختی انواع تکیه‌گاه‌های الاستیک می‌باشند، که بسته به نوع آنها (گسترده، خطی، نقطه‌ای، پاره‌ای و حتی ترکیبی) با یک مدل ریاضی مناسب محاسبه می‌شوند. برای مثال برای تکیه‌گاه خطی در  $y = y_0$  و  $x_1 \leq x \leq x_2$  می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} k_f(x, y) &= k_f H[(x_2 - x)(x - x_1)] \delta(y - y_0) \\ k_x(x, y) &= k_x H[(x_2 - x)(x - x_1)] \delta(y - y_0) \\ k_y(x, y) &= k_y H[(x_2 - x)(x - x_1)] \delta(y - y_0) \end{aligned} \quad (21)$$

که در روابط ۲۱،  $H(x)$  و  $\delta(y)$  به ترتیب تابع یک‌واحد و تابع دلتای دیراک می‌باشند. به صورت مشابه ماتریس سختی هندسی (پایداری) را نیز می‌توان برای هر المان محاسبه کرد. برای ماتریس سختی هندسی  $[K_G]$  نیز برای هر نوار می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} [K_G] &= \int_A [B_G]^T [T] [B_G] dA \\ [B_G] &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}^T [N] \end{aligned} \quad (22)$$

در روابط یادشده نیز  $[T]$  نیروهای داخل صفحه اعمالی بر نوار مربوطه به صورت فشار و برش می‌باشد که به صورت رابطه ۲۳ تعریف می‌شود.

$$[T] = \begin{bmatrix} T_x & T_{xy} \\ T_{xy} & T_y \end{bmatrix} \quad (23)$$

### ۳- نتایج

با نوشتن یک برنامه‌ی رایانه‌ای و محاسبه ماتریس‌های سختی و پایداری نوارها و در نهایت محاسبه ماتریس سختی و پایداری کل ورق و حل مسأله مقدار ویژه مربوطه مقادیر ضرائب کمانش را می‌توان بدست آورد. با استفاده از برنامه‌ی مدون، می‌توان ضرائب کمانش موضعی ورق‌ها با انواع مختلف شرایط مرزی نیرویی و تکیه‌گاهی را تعیین کرد.

#### ۳-۱- کنترل همگرایی ورق چهار طرف گیردار با نسبت $A/B=2$ متکی بر دو تکیه‌گاه خطی قائم

ورق ایزوتروپیک<sup>۵</sup> چهار طرف گیردار نیز با نسبت  $A/B=2$  و دو تکیه‌گاه الاستیک خطی قائم با سختی  $k_f=10^4$  در یک سوم‌های میانی آن همانند شکل ۴ تحت نیروی فشاری

ترتیب انرژی ارتجاعی تکیه‌گاه الاستیک قائم، تکیه‌گاه الاستیک دورانی حول محور  $x$  و  $y$  و  $V$  کار نیروهای خارجی باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\Pi = \sum_e \Pi_e = \sum (U_p + U_f + U_x + U_y - V) \quad (14)$$

بنابراین با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل کل ( $\delta \Pi = 0$ ) مطابق با توابع تغییر مکان انتخاب شده می‌توان درایه‌های ماتریس‌های سختی و ماتریس پایداری هر نوار و تکیه‌گاه الاستیک مربوط به آن را استخراج نمود.

$$\{([K_p] + [K_f] + [K_x] + [K_y]) - \lambda [K_G]\} \{\delta\} = \{0\} \quad (15)$$

در رابطه ۱۵،  $[K_p]$ ،  $[K_f]$ ،  $[K_x]$  و  $[K_y]$  به ترتیب ماتریس سختی خمشی برای کل ورق و ماتریس‌های سختی نظیر تکیه‌گاه الاستیک قائم، تکیه‌گاه الاستیک دورانی حول محور  $x$  و  $y$  بوده که پس از استخراج ماتریس‌های سختی برای هر نوار از روابط الاستیسته (۱۶) و سرهم نمودن آنها بر اساس درجات آزادی بدست می‌آیند. در نهایت با حل یک مسأله مقدار ویژه، بار کمانشی صفحات بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} [K_p] &= \int_A [B]^T [D] [B] dA \\ [K_f] &= \int_A [\Phi]^T [N]^T k_f [N] [\Phi] dA \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} [K_x] &= \int_A [G_x]^T k_x [G_x] dA \\ [K_y] &= \int_A [G_y]^T k_y [G_y] dA \end{aligned}$$

که در روابط ۱۶

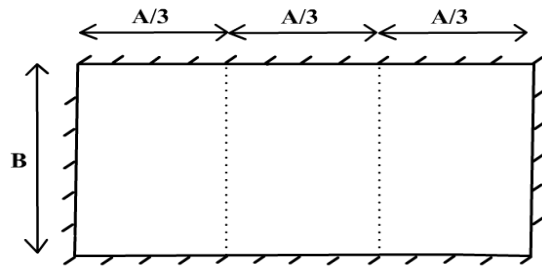
$$[B] = \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2}{\partial y^2}, 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\}^T [N] [\Phi] \quad (17)$$

$$\begin{aligned} [G_x] &= \frac{\partial}{\partial x} [N] [\Phi] \\ [G_y] &= \frac{\partial}{\partial y} [N] [\Phi] \end{aligned} \quad (18)$$

$$[D] = \frac{t^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} \begin{bmatrix} E_x & \nu_y E_x & 0 \\ \nu_x E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy}(1-\nu_x \nu_y) \end{bmatrix} \quad (19)$$

در رابطه ۱۹ نیز  $[D]$  ماتریس صلبیت خمشی ورق ارتوتروپیک می‌باشد. پارامترهای  $t$  ضخامت ورق و  $E_x$ ،  $E_y$ ،  $\mu_x$ ،  $\mu_y$  و  $G_{xy}$  ثابت‌های الاستیک برای ورق‌های ارتوتروپیک می‌باشند. اگر ورق دارای رفتار ایزوتروپیک باشد، این ضرایب به صورت رابطه ۲۰ جایگزین می‌شود:

در راستای  $y$  (طول ورق) مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۴: ورق ایزوتروپیک چهار طرف بر روی دو تکیه‌گاه الاستیک خطی با فواصل مساوی

مقادیر ضریب کمانش  $K_{cr}$  برای ورق فوق نیز بر حسب تعداد تقسیمات تابع اسپلین  $r$  در جدول ۱ آمده است و با مقدار محاسبه شده توسط نرم افزار انسیس [۱۸] با همان تقسیم بندی مثال قبل مقایسه شده است.

جدول ۱: ضریب کمانشی  $K_{cr}$  در مقابل  $r$  (تعداد تقسیمات تابع اسپلین) برای ورق شکل ۴

$r$	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	ANSYS [18]
$K_{cr}$	۱۸/۸۶۲	۸/۳۴۸	۹/۶۳	۷/۹۲۱	۷/۹۱۳	۷/۸۹۶	۷/۸۹۹	۷/۸۹۲

### ۲-۲- کنترل همگرایی ورق ارتوتروپیک چهار طرف مفصل با نسبت $A/B = 5$ تحت برش داخل صفحه

ورق ارتوتروپیک چهار طرف مفصل با نسبت  $A/B = 5$  و مقادیر صلبیت خمشی و ضریب پواسون زیر نیز برای کنترل همگرایی مورد بررسی قرار گرفت و نتایج در با توجه به مقادیر جدول ۲ می‌توان گفت، برای ورق ارتوتروپیک ۴ طرف مفصل تحت برش نیز با در نظر گرفتن  $r = 10$  می‌توان به دقت مطلوب رسید. پس همگرایی روش اشاره شده در مسائل برش، ضعیف‌تر از سایر مسائل می‌باشد. بنابراین، روش نوار محدود اسپلین همگرایی مناسبی برای حل پایداری ورق‌های ایزوتروپیک و ارتوتروپیک بر روی تکیه‌گاه‌های الاستیک داخلی با شرایط مرزی و نیرویی متفاوت دارد. جدول ۲ با نتایج مرجع [۱۷] مقایسه شد.

$$E_x = 200 \text{ Gpa} \quad \mu_x = 0.3$$

$$E_y = 20 \text{ Gpa} \quad \mu_y = 0.03$$

$$G_{xy} = 7.06356 \text{ Gpa}$$

$$D_x = 16.818 \text{ kN.m} \quad D_y = 1.6818 \text{ kN.m}$$

$$D_1 = \mu_y \cdot D_x = 0.50454 \text{ kN.m} \quad D_{xy} = 0.5886 \text{ kN.m}$$

$$\frac{D_x}{D_y} = 10 \quad \frac{D_1 + 2D_{xy}}{D_y} = 1.0$$

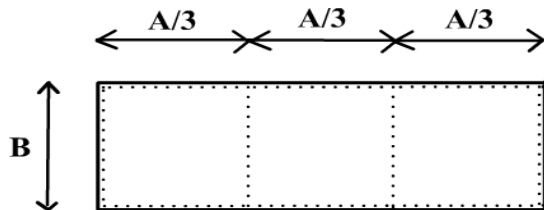
با توجه به مقادیر جدول ۲ می‌توان گفت، برای ورق ارتوتروپیک ۴ طرف مفصل تحت برش نیز با در نظر گرفتن  $r = 10$  می‌توان به دقت مطلوب رسید. پس همگرایی روش اشاره شده در مسائل برش، ضعیف‌تر از سایر مسائل می‌باشد. بنابراین، روش نوار محدود اسپلین همگرایی مناسبی برای حل پایداری ورق‌های ایزوتروپیک و ارتوتروپیک بر روی تکیه‌گاه‌های الاستیک داخلی با شرایط مرزی و نیرویی متفاوت دارد.

جدول ۲: ضریب کمانشی  $K_{cr}$  در مقابل  $r$  برای ورق ارتوتروپیک با  $A/B = 5$  تحت برش

R	۴	۶	۸	۱۰
$K_{cr}$ روش حاضر	۶۹/۳۲۴	۳۷/۲۱۷	۲۷/۰۸۷	۲۴/۹۷۶
مرجع [۱۷]	۷۰/۳۶۶	۳۷/۷۷۵	۲۸/۴۶۴	۲۴/۹۸۴

### ۳-۳- بررسی صحت نتایج ورق چهار طرف مفصل با نسبت $A/B = 3$ متکی بر دو تکیه‌گاه خطی قائم

با روش گفته شده، ورق ایزوتروپیک چهار طرف مفصل با نسبت طول به عرض مساوی ۳ که مطابق شکل ۵ بر روی دو تکیه‌گاه الاستیک خطی در فواصل مساوی قرار گرفته تحلیل شده و نتایج حاصل، با نتایج روش نوار محدود معمولی که به وسیله هانگ [۱۶] استفاده شد، در جدول ۳ مقایسه می‌شوند.



شکل ۵: ورق چهار طرف مفصل بر روی دو تکیه‌گاه خطی

خطی برای مقادیر مختلف طول موج  $\lambda_1$

در این جدول پارامتر  $k_f$  ضریب بدون بعد است که به صورت لگاریتمی برای ورق ایزوتروپیک اعمال می‌شود. این ضریب نشان دهنده مقادیر متفاوت سختی قائم تکیه‌گاه الاستیک می‌باشد. برای نشان دادن اثر آن‌ها این مقادیر به صورت لگاریتمی تغییر می‌کنند. با دقت در جدول فوق می‌توان دریافت، از آنجا که روش هانگ روش نوار محدود

جدول ۳: ضرایب کمانش موضعی ورق متکی بر تکیه گاه خطی برای مقادیر مختلف طول موج  $\lambda_1$

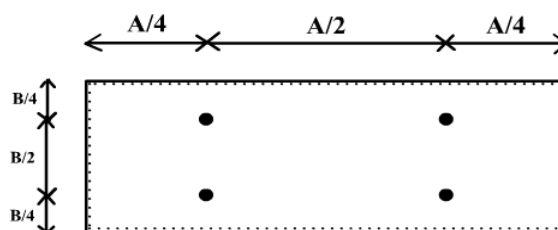
$k_f$	$\lambda_1$		$\lambda_2$		$\lambda_3$		$\lambda_4$		$\lambda_5$	
	روش حاضر	مرجع [۱۶]	روش حاضر	مرجع [۱۶]	روش حاضر	مرجع [۱۶]	روش حاضر	مرجع [۱۶]	روش حاضر	مرجع [۱۶]
۰	۴/۰۰۱۲	۴/۰۰۰	۴/۳۴۸۴	۴/۳۴۰۳	۴/۶۹۴۶	۴/۶۹۴۶	۵/۱۷۴۸	۵/۱۷۴۸	۶/۳۷۵۱	۶/۲۵۰۸
۱۰۲	۴/۰۱۳	۴/۰۰۰	۴/۳۵۶۶	۴/۴۰۳۳	۴/۷۰۵۲	۴/۷۰۵۲	۵/۱۸۱۱	۵/۱۸۱۱	۶/۳۸۰۵	۷/۲۶۸۹
۱۰۳	۴/۰۵۵	۴/۰۰۰	۴/۴۰۴۸	۴/۴۱	۴/۷۸۷۳	۵/۷۸۷۳	۵/۲۴۷۹	۵/۲۴۷۹	۶/۴۲۵۵	۷/۷۰۰۵
۱۰۴	۴/۱۰۳	۴/۰۰۰	۴/۴۶۳۴	۴/۴۱۰۷	۴/۹۴۲۳	۴/۹۴۲۳	۵/۵۵۸۷	۵/۵۵۸۷	۶/۶۱۷۷	۷/۷۰۲۹
۱۰۵	۴/۱۱۹۲	۴/۰۰۰	۴/۴۷۳۹	۴/۴۱۰۷	۵/۰۲۴۱	۵/۰۲۴۱	۵/۷۵۸۸	۵/۷۵۸۸	۶/۷۴۰۴	۷/۷۰۳۲
۱۰۶	۴/۱۳۹۶	۴/۰۰۰	۴/۴۷۵۱	۴/۴۱۰۷	۵/۱۵۹۲	۵/۱۵۹۲	۶/۱۰۷۹	۶/۱۰۷۹	۶/۷۹۳۵	۷/۷۰۳۲

ساده است، وجود تکیه گاه خطی الاستیک را در مقادیر طول نیم موج کمانشی (برای ورق چهار طرف مفصل عرض نوار) نشان نمی دهد. ولی روش ارائه شده توانسته است، این ضعف را قدری مرتفع نماید.

### ۳-۴ - ورق ایزوتروپ چهار طرف مفصل متکی بر چهار تکیه گاه الاستیک نقطه ای در راستاهای قائم و

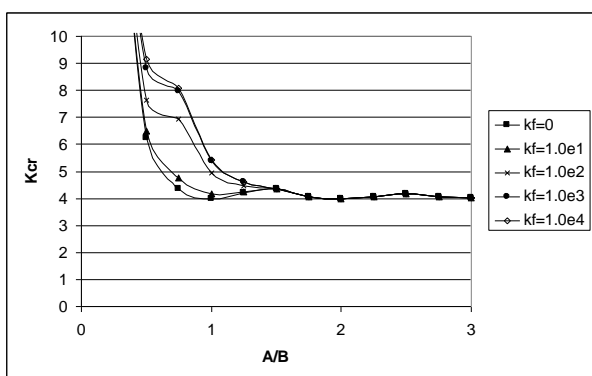
#### دورانی

در این مثال ورق ایزوتروپیک چهار طرف مفصل متکی بر تکیه گاه الاستیک نقطه ای مطابق شکل ۶ با سختی قائم ( $k_f$ ) و سختی حول عرض و طول ورق ( $k_x$  و  $k_y$ ) تحت نیروی فشاری در راستای طولی ورق بررسی می شود.



شکل ۶: ورق چهار طرف مفصل متکی بر روی چهار تکیه گاه نقطه ای الاستیک مطابق شکل

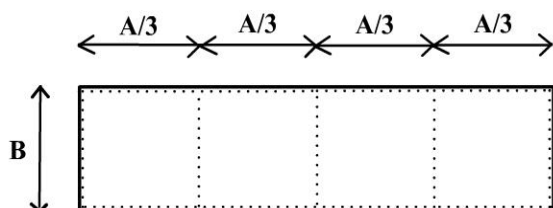
با دقت در نمودارهای شکل ۷ مشاهده می شود که وجود این تکیه گاه ها تنها برای ورق های با  $A/B < 15$  می تواند بر ضریب کمانش موضعی تأثیرگذار باشد. برای مثال هایی که در آن ها سختی تکیه گاهی دورانی نیز وجود داشته نمودارهای مشابهی بدست آمده است. از اینرو وجود تکیه گاه های نقطه ای به این شکل تنها برای ورق های با اشکال نزدیک به مربعی می تواند موثر باشد.



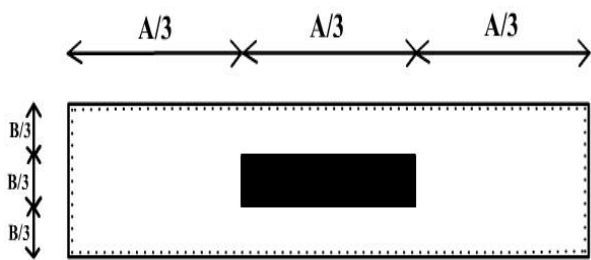
شکل ۷: ضرایب کمانش ورق شکل ۶ برای مقادیر مختلف طول به عرض ورق سختی تکیه گاه الاستیک قائم  $k_f$

### ۳-۵ - ورق ایزوتروپ چهار طرف مفصل بر روی سه تکیه گاه الاستیک خطی با سختی در راستاهای قائم و دورانی

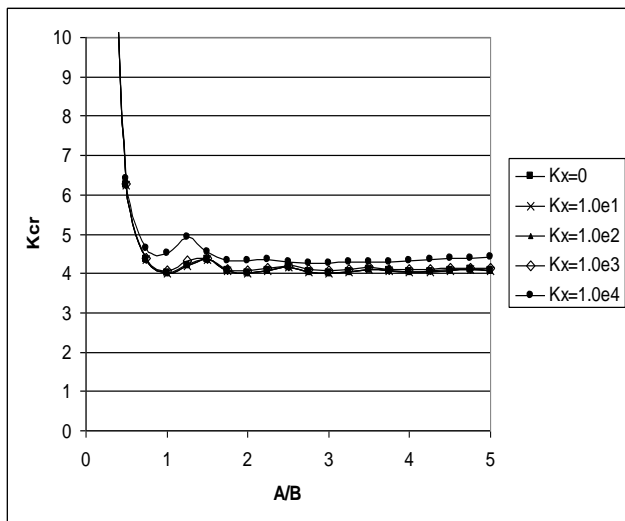
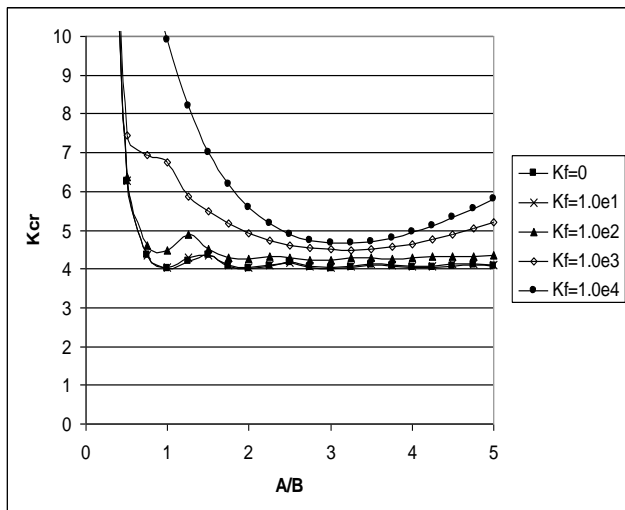
این بار نیز ورق چهار طرف مفصل بر روی سه تکیه گاه خطی الاستیک مطابق شکل ۸ با فواصل مساوی بررسی شده است.



شکل ۸: ورق چهار طرف مفصل بر روی ۳ تکیه گاه خطی الاستیک

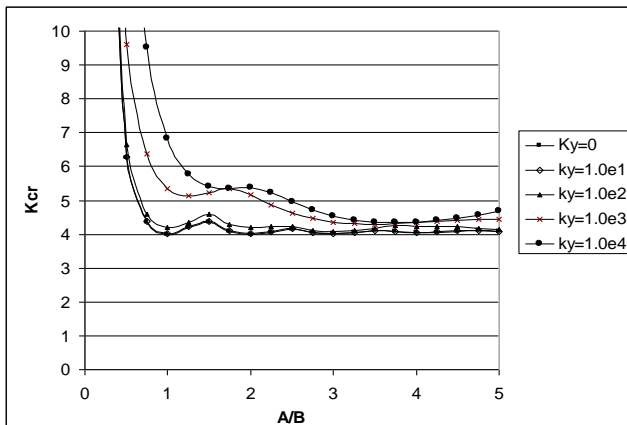
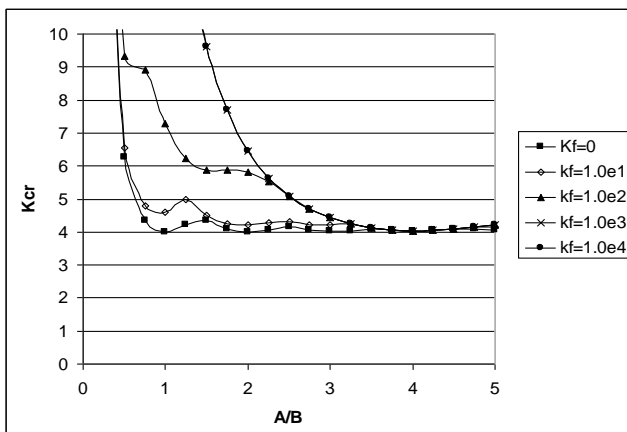


شکل ۱۰: ورق چهار طرف مفصل بر روی تکیه‌گاه ناحیه‌ای الاستیک



شکل ۱۱: ضرایب کماتش ورق شکل ۱۰ برای مقادیر مختلف  $A/B$  و سختی تکیه‌گاه الاستیک  $k_x$  و  $k_f$

با توجه به شکل ۱۰ می‌توان گفت افزایش سختی تکیه‌گاهی  $k_f$  توانسته در همه جا افزایش ضریب بار کماتشی را نتیجه دهد. اما این افزایش در حوالی  $A/B=3$  مقدار کمتری است. ولی برای افزایش سختی تکیه‌گاهی  $k_x$ ، وجود تکیه‌گاه الاستیک دورانی به شکل فوق نتوانسته است، آن‌چنان که انتظار می‌رفت، باعث افزایش ضریب کماتش شود. برای سختی تکیه‌گاهی  $k_y$  هم نتایج مشابه به‌دست آمد.



شکل ۹ - ضرایب کماتش ورق شکل ۸ برای مقادیر مختلف و سختی تکیه‌گاه الاستیک  $k_y$  و  $k_f$

با دقت در شکل ۹ می‌توان دریافت که تمام نمودارهای مربوط به سختی تکیه‌گاهی  $k_f$  در  $A/B=2$  به هم رسیده‌اند. دلیل این امر یکی بودن طول نیم موج کماتشی با فاصله بین تکیه‌گاه‌های الاستیک است. همچنین اگر نسبت طول به عرض ورق نزدیک به  $\epsilon$  یا بیشتر باشد، وجود تکیه‌گاه الاستیک خطی تاثیر چندانی نخواهد داشت. برای سختی تکیه‌گاهی دورانی  $k_x$  هم نمودارهای مشابهی بدست آمده است. اما برای شکل مربوط به سختی تکیه‌گاهی دورانی  $k_y$  وجود این تکیه‌گاه الاستیک باعث افزایش ضریب بار کماتشی در بیشتر نقاط به خصوص حوالی  $A/B=2$  شده است.

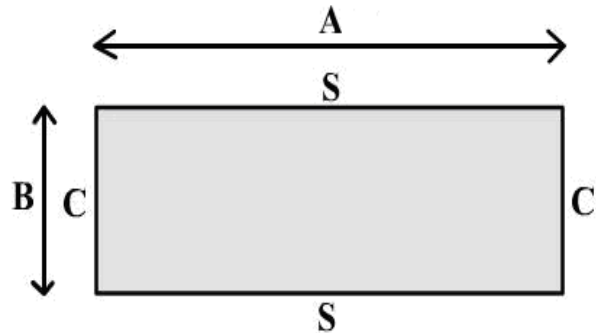
### ۳-۶ - ورق ایزوتروپیک چهار طرف مفصل روی تکیه‌گاه الاستیک ناحیه‌ای برای سختی در راستاهای قائم و دورانی

در این مثال یک تکیه‌گاه الاستیک ناحیه‌ای مطابق در زیر ورق ایزوتروپیک چهار طرف مفصل قرار گرفته است. پایداری این ورق برحسب بار اعمالی در راستای طول ورق بررسی شده است. (در ناحیه تیره رنگ ورق بر روی تکیه‌گاه گسترده الاستیک با سختی یکنواخت قرار دارد.)



### ۷-۳- ورق ارتوتروپیک دو طرف مفصل- دو طرف گیردار روی تکیه‌گاه الاستیک یکنواخت برای سختی در راستاهای قائم و دورانی

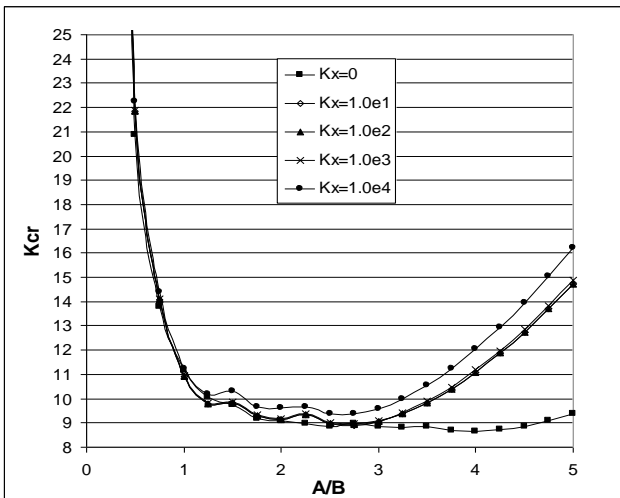
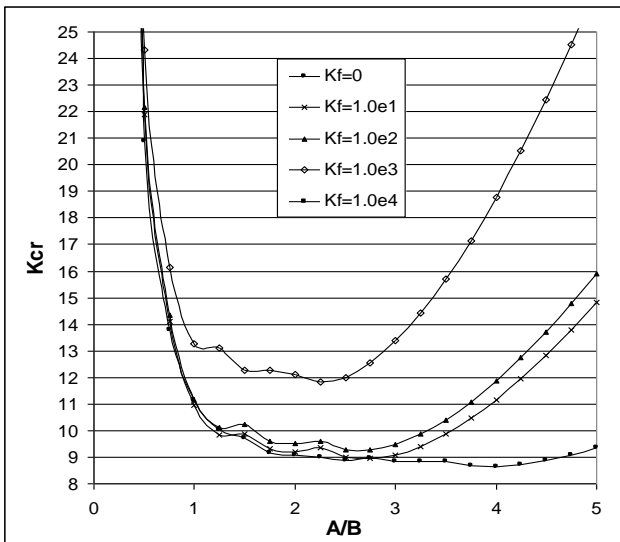
در این مثال یک تکیه‌گاه الاستیک یکنواخت مطابق شکل ۱۲ در زیر کل ورق ارتوتروپیک دو طرف مفصل- دو طرف گیردار قرار گرفته است. خصوصیات مکانیکی ورق ارتوتروپیک همان خصوصیات ورق مثال دوم می‌باشد. پایداری این ورق بر حسب بار اعمالی در راستای طول ورق مورد بررسی قرار گرفته است. (لبه‌ی مفصلی و  $C$  لبه‌ی گیردار است.)



شکل ۱۲: ورق دو طرف گیردار- دو طرف مفصل بر روی تکیه‌گاه یکنواخت الاستیک

در این جا نیز مقادیر مختلف سختی برای تکیه‌گاه قائم و تکیه‌گاه دورانی الاستیک بررسی شده و ضرایب کماتش بر حسب مقادیر مختلف طول به عرض ورق محاسبه شده اند. آن جا که این تکیه‌گاه در زیر کل ورق گسترده است، به نظر می‌رسد نسبت به سایر انواع تکیه‌گاه تأثیر بیشتری در ضریب کماتش داشته باشد.

با توجه به نمودارهای شکل ۱۳ می‌توان گفت برای سختی‌های حدود  $k_f = 10^2$  و کمتر وجود تکیه‌گاه الاستیک در  $A/B \leq 3$  نتوانسته است، تأثیر چندانی بر ضریب کماتش ورق ارتوتروپیک بگذارد. اما برای  $A/B > 3$  افزایش سختی تکیه‌گاه الاستیک قائم توانسته است، به مقدار قابل ملاحظه‌ای باعث افزایش سختی تکیه‌گاه الاستیک شود.

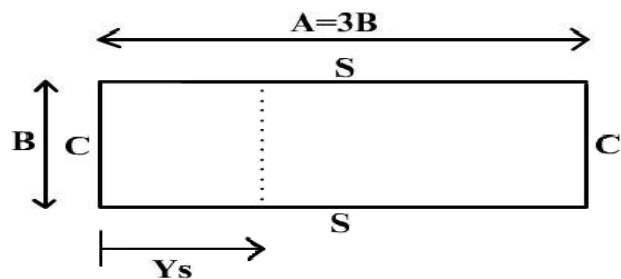


شکل ۱۳: ضرایب کماتش ورق شکل ۱۲ برای مقادیر مختلف  $A/B$  و سختی تکیه‌گاه الاستیک  $k_x$  و  $k_f$

برای سختی‌های قائم بسیار بزرگتر از  $k_f = 10^2$  وجود تکیه‌گاه الاستیک یکنواخت توانسته است، در همه‌ی مقادیر طول به عرض ورق باعث افزایش ضریب کماتش ورق شود. در نمودارهای مربوط به سختی دورانی  $k_x$  نیز برای سختی‌های حدود  $k_f = 10^2$  و کمتر وجود تکیه‌گاه الاستیک در  $A/B \leq 3$  نتوانسته است، تأثیر چندانی بر ضریب کماتش ورق ارتوتروپیک بگذارد. اما برای  $A/B > 3$  افزایش سختی تکیه‌گاه الاستیک قائم توانسته است، به مقدار قابل ملاحظه‌ای باعث افزایش سختی تکیه‌گاه الاستیک شود. برای سختی‌های بسیار بزرگتر از  $k_f = 10^2$  وجود تکیه‌گاه الاستیک یکنواخت نتوانسته است در بیشتر مقادیر از نسبت  $A/B$  ورق باعث افزایش ضریب کماتش ورق شود. در این جا نیز وجود سختی تکیه‌گاهی  $k_y$  نتایج مشابه سختی  $k_x$  می‌دهد.

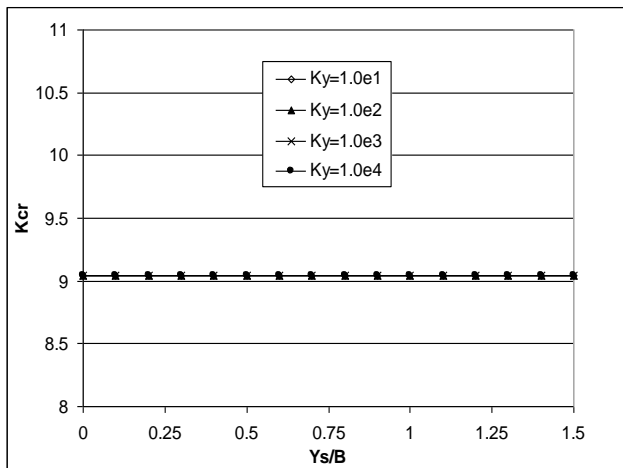
### ۸-۳- کنترل تأثیر محل قرارگیری تکیه‌گاه خطی با فاصله متغیر در طول ورق بر ضریب کماتش ورق ارتوتروپیک

در این مثال ورق ارتوتروپیک دو طرف مفصل- دو طرف گیردار روی یک تکیه‌گاه الاستیک خطی مطابق شکل ۱۴ قرار گرفته که محل آن در راستای طول ورق متغیر است. خصوصیات مکانیکی ورق ارتوتروپیک همان خصوصیات ورق مثال دوم می‌باشد. پایداری این ورق بر حسب بار اعمالی در راستای طول ورق مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۱۴: ورق دو طرف مفصل- دو طرف گیردار ارتوتروپیک بر روی تکیه‌گاه الاستیک خطی با فواصل متغیر

با توجه به شکل ۱۵ نیز مشاهده می‌شود که، نمودارهای مربوط به  $k_f$  و  $k_x$  دارای شباهت‌های زیادی با هم هستند. در این دو شکل قرار گرفتن تکیه‌گاه خطی الاستیک در  $Y_s = 1/2B$  و  $Y_s = 0.5B$  تأثیری در ضریب کماتش ورق ارتوتروپیک ندارد. بیشترین تأثیر را می‌توان به ترتیب در مقادیر  $Y_s/B = 0.1$  و  $Y_s/B = 1/2$  دانست. همچنین افزایش ضرایب سختی  $k_x$  و  $k_f$  باعث بالا رفتن ضریب کماتش ورق می‌شود.

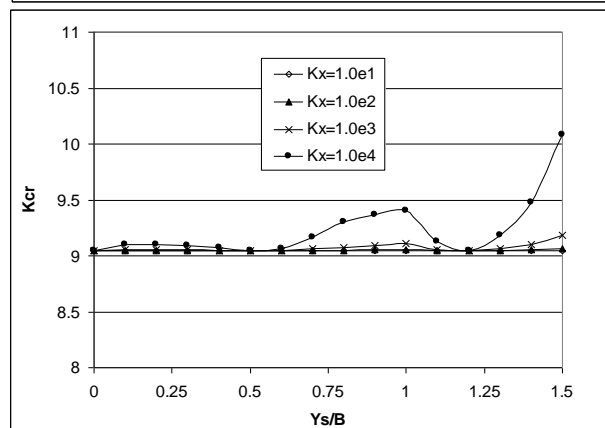
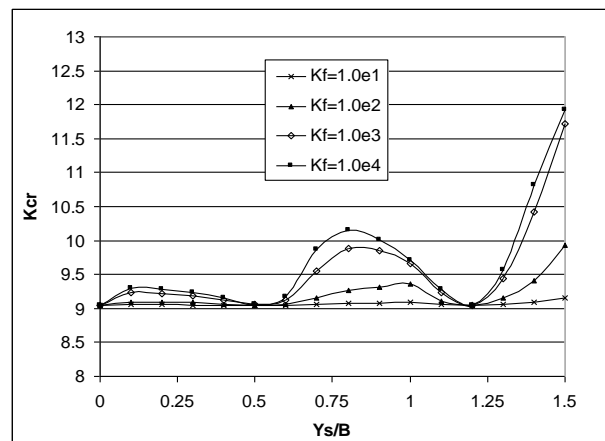


شکل ۱۶: ضرایب کماتش ورق شکل ۱۴ برای مقادیر  $Y_s/B$  و سختی تکیه‌گاه الاستیک  $k_y$

از شکل ۱۶ مشاهده می‌شود که قرار دادن تکیه‌گاه الاستیک خطی با سختی  $k_y$  در تمام ورق ارتوتروپیک نتوانسته است، اثری بر ضریب بار کماتشی داشته باشد. دلیل این امر را شاید تفاوت صلبیت بالای ورق ارتوتروپیک در دو راستا دانست. در حقیقت وجود تکیه‌گاه الاستیک خطی با سختی یاد شده نتوانسته اثر آنچنانی بر این مقادیر داشته باشد.

#### ۴- نتیجه

همانطور که دیده شد روش نوار محدود اسپلاین توانایی بالا در مدل‌کردن صفحات متکی بر انواع تکیه‌گاه‌های الاستیک دارد و در مقایسه با سایر روش‌های موجود جواب‌هایی با دقت مطلوب ارائه می‌دهد. با این روش می‌توان انواع شرایط مرزی جابجایی و نیرویی را مدل‌کرد. برای ورق‌هایی با  $A/B > 1/5$  متکی بر تکیه‌گاه نقطه‌ای می‌توان گفت وجود این تکیه‌گاه‌های الاستیک اثر چندانی بر ضریب کماتش موضعی ندارد. در ورق‌های چهار طرف مفصل طول نیم موج کماتشی برای مود اول کماتش برابر عرض ورق می‌باشد و قرار دادن تکیه‌گاه‌های الاستیک با سختی قائم و دورانی در راستای  $x$  در این نقاط اثر چندانی در ضریب کماتش ندارد. البته در محل یاد شده،



شکل ۱۵: ضرایب کماتش ورق شکل ۱۳ برای مقادیر  $Y_s/B$  و سختی تکیه‌گاه الاستیک  $k_x$  و  $k_f$

- Saadatpour, M.M., Azhari, M., Bradford, M.A., Buckling of arbitrary quadrilateral plates with intermediate supports using the Galerkin method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 164, Issue 3-4, pp. 297-306, 1998.
- Bradford, M.A., Smith, S.T., Oehlers, D.J., Elastic buckling of unilaterally Constrained Rectangular in Pure Shear, *Engineering Structures*, Vol. 21, pp. 443-453, 1997.
- Matsunaga, H., Vibration and stability of thick plates on elastic foundation, *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 126, No. 1, pp. 27-34, 2000.
- Huang, M.H., Thambiratnam, D.P., Analysis of plate resting on elastic supports and elastic foundation by finite strip method, *Computers and Structures*, Vol. 79, pp. 2547-2557, 2001
- Azhari, M., Abdollahian, M., Bradford, M.A., Local buckling of composite laminated plates assemblies using the Spline finite strip method, *Advances in Structural Engineering*, Vol. 3, No.2, pp. 173-178, 2000.
- ANSYS(R) Release 8.1 Build: 2004.0329 .Copyright 1994-2004 by SAS IP
- [۱۳] وجود تکیه‌گاه‌هایی با سختی دورانی در راستای  $y$  با توجه به دلیل ذکر شده باعث افزایش قابل ملاحظه‌ای در ضریب کمناش می‌شود. همچنین در ورق‌های ایزوتروپیک از سختی تکیه‌گاهی  $k_s=10^4$  به بالا می‌توان تکیه‌گاه الاستیک را صلب فرض نمود.
- [۱۴] در ورق‌های ارتوتروپیک با تکیه‌گاه الاستیک یکنواخت و سختی‌های تکیه‌گاهی در حد  $k_s=10^2$  و کمتر وجود این تکیه‌گاه در  $A/B \leq 3$  نتوانسته است، تأثیر چندانی بر ضریب کمناش بگذارد. اما برای  $A/B > 3$  افزایش سختی تکیه‌گاه الاستیک قائم توانسته است، به مقدار قابل ملاحظه‌ای باعث افزایش سختی تکیه‌گاه الاستیک شود.

## ۵- مراجع

- Cheung, Y.K., Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergoman Press, Oxford, U. K., 1976. [۱]
- Bradford, M.A., Azhari, M., Buckling of plates with different end conditions using the finite strip method, *Computers & Structures*, Vol. 56, No. 1-3, pp. 75-83, 1995. [۲]
- Plank, R.J., Wittrick, W.H., Buckling under combined loading of thin flat-walled structures by a complex finite strip method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp. 323-339, 1974. [۳]
- Kress, R., Numerical Analysis, Springer, 1998 [۴]
- Prenter, P.M., Spline and Variation Methods, Wiley, New York, 1975. [۵]
- Fan, S.C., Spline finite strip in structural analysis, PhD Thesis, University of Hong Kong, 1982. [۶]
- Kennedy, D., Williams, F.W., Vibration and buckling of anisotropic plate assemble with Winkler foundation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, pp. 501-510, 1990. [۷]
- Kerstern, J.G.M. , Laura, P.A.A. , Grossi, R.O. , Ercoli, L. , Vibration of rectangular plates with point support, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 89, No. 2, pp. 291-293, 1983. [۸]
- Omurtag, M.H., Akuz, A.Y., Free vibration of Kirchhoff plates resting on elastic foundation by mixed finite element formulation based on Gateaux differential, *Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 295-317, 1997. [۹]
- Raju, K.K., Rao, G.V., Mode shape change in the stability problem and it's effect on the vibration behavior of simply-supported orthotropic rectangular plates on elastic foundation, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, No.5, pp. 693-699, 1994. [۱۰]
- Madasamy, C.M., Kalyanaraman, V., Analysis of plate structures with rectangular cutouts and internal supports using the Spline finite strip method, *Computers & Structures*, Vol. 52, No.2, pp. 277-284, 1994. [۱۱]
- Saha, K.N., Kar, R.C., Gatta, P.K., Dynamic stability of rectangular plate on non-homogeneous Winkler foundation, *Computers and Structures*, Vol. 63, No. 6, pp. 1213-1222, 1997. [۱۲]

## ۶- زیر نویس ها

<sup>1</sup> Finite Strip Method

<sup>2</sup> Complex F.S.M.

<sup>3</sup> Spline F.S.M.

<sup>4</sup> Piece-wise

<sup>5</sup> Isotropic

<sup>6</sup> Orthotropic