

تعیین بار کمانش جانبی-پیچشی تیرهای جدار نازک الاستیک دو سر مفصل با مقطع نامتقارن با استفاده از روش اختلاف محدود

مصومه سلطانی^{۱*}، بهروز عسگریان^۲

^۱ گروه مهندسی عمران، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

^۲ دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه طوسی نصیرالدین، تهران، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۲ آذر ۱۳۹۴
بازنگری: ۱ آذر ۱۳۹۵
پذیرش: ۱۵ دی ۱۳۹۵
ارائه آنلاین: ۶ بهمن ۱۳۹۵

کلمات کلیدی:

تیرهای جدار نازک
بار کمانش جانبی-پیچشی
نیمرخ نامتقارن
تیر دوسر مفصل
روش اختلاف محدود

چکیده: تیرهای جدار نازک المان بسیار مهمی در سازه‌های فولادی هستند. در این اعضا، با توجه به نحوه بارگذاری جانبی و همچنین بر اساس تقارن و یا عدم تقارن سطح مقطع عضو، امکان وقوع کمانش جانبی-پیچشی وجود دارد. لذا در این پژوهش به بررسی پایداری تیرهای جدار نازک با نیمرخ نامتقارن در برابر کمانش جانبی-پیچشی پرداخته شده است. بدین منظور، در اولین گام در تحلیل پایداری جانبی تیرها، با استفاده از روابط حاکم بر تغییر شکل اعضای جدار نازک و اصل پایستگی انرژی پتانسیل، معادلات دیفرانسیل تعادل تیر با سطح مقطع نامتقارن تحت بارگذاری جانبی تعیین می‌گردد. معادلات پایداری جانبی بدست آمده در حضور پارامترهای لنگر خمشی، نامتقارنی سطح مقطع و زاویه پیچش، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل وابسته است. سپس با استفاده از شرایط مرزی حاکم بر خمش، معادله تعادل پیچش مستقل گشته و معادله دیفرانسیل مرتبه چهار با ضرایب متغیر حاصل شده تنها وابسته به پارامتر تغییر شکل پیچشی عضو جدار نازک خواهد بود. در ادامه، با استفاده از روش عددی تقریبی اختلاف محدود مرکزی و فرضیات حاکم بر این روش معادله دیفرانسیل مرتبه چهار بدست آمده حل می‌گردد و در نهایت، با توجه به شرایط مرزی حاکم بر تیرهای دو سر مفصل و با استفاده از روش حل مقادیر ویژه مقدار بار کمانش بحرانی محاسبه می‌شود. در پایان به منظور نشان دادن توانایی و صحت روش ارائه شده در این مطالعه، چندین مثال عددی شامل تیر جدار نازک دو سر مفصل با سطح مقطع ثابت تحت بارگذاری‌های مختلف ارائه شده است. نتایج بدست آمده از روش معرفی شده با مقادیر ارائه شده توسط محققان دیگر و مقادیر حاصله از نرم افزار Ansys مقایسه گشته‌اند.

۱- مقدمه

تیرهای جدار نازک بخش وسیعی از المان‌های سازه‌ای را در بر می‌گیرند. هم‌چنین این اعضا دارای کاربرد گسترده‌ای در مهندسی سازه، هوا فضا و مکانیک می‌باشند. کاربرد اعضای مذکور در بسیاری از سازه‌های فولادی و اجزای مکانیکی بعلت توانایی آن‌ها در مصرف اقتصادی مصالح و بهینه سازی وزن سازه، رو به افزایش است. اعضای جدار نازکی که صلبیت خمشی مقطع آنها نسبت به محور اصلی بسیار بیشتر از صلبیت خمشی جانبی است، تحت بار جانبی و یا لنگر خمشی خاصی ممکن است دچار کمانش جانبی-پیچشی شوند و تیر در صفحه‌ی با صلبیت خمشی بزرگتر خم شود. در زمانی که بار روی چنین تیری کمتر از مقدار بار بحرانی باشد، تیر پایدار خواهد بود. با وجود این، وقتی بار افزایش یابد، موقعیتی پیش می‌آید که در آن سازه قدری تغییر مکان یافته و ناپایدار می‌شود. بنابراین تحلیل کمانش جانبی، در طراحی تیرهای بدون تکیه‌گاه جانبی از اهمیت زیادی برخوردار است.

پس از اولین مطالعات صورت گرفته توسط ولاسو^۱ و تیموشنکو^۲ [۱] و [۲]، تحقیقات در زمینه رفتار استاتیکی و دینامیکی تیرهای جدار نازک افزایش قابل توجهی داشته است. در [۳ و ۴]، بار کمانش بحرانی تیرهای منشوری با مقطع جدار نازک با استفاده از دو روش حل دقیق معادلات دیفرانسیل مرتبه چهار حاکم بر تعادل پیچشی و خمشی همچنین روش‌های تقریبی بر مبنای حداقل نمودن انرژی پتانسیل کل سیستم محاسبه شده است. پژوهش‌های عددی متعددی، که عموماً بر اساس روش اجزاء محدود هستند، برای بررسی و تحلیل پایداری و ارتعاشی تیرهای جدار نازک با سطح مقطع جدار نازک باز انجام شده است. بر اساس اصل ایستایی تغییرات انرژی پتانسیل و فرضیات حاکم بر پوسته‌های جدار نازک، ژانگ^۳ [۵] یک مدل تحلیلی را برای کمانش خمشی-پیچشی اعضای جدار نازک دو سر مفصل معرفی نمود. چند نمونه روش حل تحلیلی در تحقیقات صورت گرفته توسط ساپکاس^۴ [۶] و مهری^۵

1 Vlasov
2 Timoshenko
3 Zhang
4 Sapkas
5 Mohri

*نویسنده عهده‌دار مکاتبات: msoltani@kashanu.ac.ir

گام‌های اساسی این مقاله به شرح زیر می‌باشد:

۱. با استفاده از اصل پایستگی انرژی پتانسیل، معادلات دیفرانسیل مرتبه چهار پایداری تیر جدار نازک با سطح مقطع نامتقارن که تحت بارگذاری جانبی در امتداد خود قرار دارد، تعیین می‌گردد.
۲. معادلات تعادل بدست آمده در حضور پارامترهای لنگر خمشی، نامتقارنی سطح مقطع و زاویه پیچش، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل وابسته را تشکیل می‌دهند. سپس با استفاده از شرایط مرزی حاکم بر خمش، معادله تعادل پیچش مستقل گشته و معادله دیفرانسیل مرتبه چهار حاصله تنها وابسته به پارامتر تغییر شکل پیچشی عضو جدار نازک خواهد بود.
۳. در مرحله بعد، معادله پایداری ساده شده با استفاده از روابط حاکم بر اختلاف محدود مرکزی حل می‌گردد. در نهایت، باتوجه به شرایط مرزی مسئله و حل مسائل مقادیر ویژه، مقدار بار کمانش بحرانی جانبی محاسبه می‌گردد.

در پایان به منظور نشان دادن توانایی و صحت روش ارائه شده، چندین مثال عددی شامل تیرهای جدار نازک دو سر مفصل با سطح مقطع ثابت تحت بارگذاری‌های مختلف ارائه شده است. در طی مسائل حل شده، اثرات عدم تقارن در نیمرخ تیر و محل اعمال بار جانبی بر پایداری تیر در نظر گرفته شده است. مقایسه نتایج بدست آمده از روش معرفی شده در این مطالعه با مقادیر ارائه شده توسط محققان دیگر و مقادیر حاصله از نرم‌افزار Ansys نشان دهنده کارایی و توانایی روش اختلاف محدود در حل معادله دیفرانسیل تعادل و محاسبه مقادیر بار بحرانی در اعضاء جدار نازک منشوری با سطح مقطع نامتقارن می‌باشد.

۲- تعیین معادلات دیفرانسیل حاکم بر پایداری جانبی-پیچشی

۲-۱- سینماتیک مسئله

یک تیر جدار نازک با سطح مقطع نامتقارن مطابق شکل ۱-الف که تحت بارگذاری عرضی q_z قرار دارد، مد نظر است. بار گسترده مذکور منجر به وارد شدن لنگر خمشی M_y بر روی نیمرخ عضو می‌شود. مصالح استفاده شده در عضو مورد نظر، همگن و ایزوتروپیک می‌باشند و از قانون هوک پیروی می‌کنند. همچنین، طول تیر در مقایسه با ابعاد سطح مقطع بسیار بزرگ‌تر است و عضو کاملاً مستقیم و بدون هیچ گونه نقص اولیه فرض گردیده است. بنابراین، تغییر شکل‌ها بسیار کوچک هستند و از تغییر شکل‌های برشی صرف نظر می‌گردد. شکل ۱-ب نشان دهنده پارامترهای تغییر شکل تعریف شده بر روی سطح مقطع تیر مد نظر در راستای محورهای اصلی و مرکزی x, y, z می‌باشد. U, V, W و θ به ترتیب چهار مؤلفه تغییر شکل محوری، جانبی، عرضی و پیچشی هستند. با توجه به فرضیات مذکور و مطابق با مدل ولاسو، میدان جابه‌جایی حاکم بر تیر جدار نازک شامل سه مؤلفه تغییر مکان (محوری، عمودی و جانبی) نسبت به (مرکز برش نیمرخ عضو) به صورت زیر تعریف می‌گردد:

[۷] در زمینه بررسی کمانش جانبی تیر با نیمرخ یک محور تقارن ارائه شده است. در تحقیقات مذکور، میان روش اجزاء محدود بر مبنای المان تیر سه بعدی و المان پوسته یک مطالعه مقایسه‌ای انجام شده است. جان^۱ [۸] ماتریس دینامیکی برای یک المان تیر اویلر-برنولی^۲ بدون انحنا و تحت بار محوری را به منظور تعیین مقادیر دقیق فرکانس‌های طبیعی ارتعاش اعضای خمشی جدار نازک ارائه نمود. آندراده^۳ [۹] روشی بنام فرمول‌بندی^۳ فاکتوری که معمولاً برای بررسی پایداری تیرهای دو سر مفصل استفاده می‌گردید را برای محاسبه بار کمانش جانبی-پیچشی در تیرهای یک سرگیردار با مقطع I گسترش داد. ارکمن^۴ [۱۰ و ۱۱] نیز یک روش اجزای محدود بر مبنای اصل ایستایی انرژی مکمل و تئوری کویتر برای تحلیل پایداری تیرهای جدار نازک منشوری با سطح مقطع باز را ارائه کرده است. همچنین، یک ماتریس سختی جدید برای اعضای مستقیم و بدون نقص اولیه به وسیله روش سری توانی توسط لانگ^۵ [۱۲] معرفی گشته است. تاثیر بار گسترده محوری بر روی پایداری تیر در مقاله مذکور مورد مطالعه قرار گرفته است. کورنیاوان^۶ [۱۳] یک روش تحلیلی بر مبنای اجزای محدود به منظور بررسی رفتار جانبی-پیچشی تیرهای فولادی سبک دو سر مفصل که تحت بار گذاری عرضی قرار دارند و با در نظر گرفتن اثرات خروج از مرکزیت ارائه نمود. اتارد^۷ [۱۴] معادلات پایداری حاکم بر تیرهای جدار نازک منشوری را با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی استخراج نمود. وو^۸ [۱۵ و ۱۶] دو مدل تئوریک و اجزای محدود بر مبنای تحلیل خطی را به منظور بررسی رفتار کمانشی المان‌های تیر-ستون با نیمرخ متقارن و با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل‌های برشی و خروج از مرکزیت محل بارگذاری نسبت به مرکز سطح و برش را معرفی نموده است. بربن^۹ [۱۷] یک روش المان محدود خمشی-پیچشی را با در نظر گرفتن اثرات اینرسی دورانی، تغییر شکل برشی و بار محوری برون از مرکز برای تحلیل ارتعاشی تیر جدار نازک با سطح مقطع نامتقارن پیشنهاد کرد. کوش^{۱۰} [۱۸] به کمک روش عددی رایلی-ریتز بار کمانش جانبی-پیچشی را برای تیر ماهیچه‌ای دوسر مفصل با مقطع متقارن تعیین نمود. اخیراً، روتا^{۱۱} [۱۹] بار کمانش بحرانی را برای تیرهای جدار نازک با مقطع متغیر و با استفاده از روش سری چبیشف محاسبه نمود. بر اساس مدل غیرخطی و با در نظر گرفتن اثرات تغییر شکل‌های بزرگ و تنش‌های اولیه، یک المان تیر سه بعدی با هفت درجه آزادی به منظور تحلیل پایداری تیر جدار نازک ماهیچه‌ای توسط مهری [۲۰] معرفی گشته است.

- 1 Jun
- 2 Euler-Bernoulli beam
- 3 Andrade
- 4 Erkman
- 5 Leung
- 6 Kurniawan
- 7 Attard
- 8 Wu
- 9 Borbon
- 10 Kus
- 11 Ruta

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \varepsilon_{xy}^l + \varepsilon_{xy}^* \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial z} \right) = \varepsilon_{xz}^l + \varepsilon_{xz}^* \quad (7)$$

با استفاده از معادلات ۱ تا ۳، مولفه‌های خطی و غیرخطی کرنش برای یک تیر جدارنازک به صورت زیر قابل تعیین می‌باشند:

$$\varepsilon_{xx}^l = u_0' - y(v_s'' + z_s \theta'') - z w_s'' - \phi \theta'' \quad (8)$$

$$\gamma_{xy}^l = 2\varepsilon_{xy}^l = - \left(z + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \theta' \quad (9)$$

$$\gamma_{xz}^l = 2\varepsilon_{xz}^l = \left(y - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \theta' \quad (10)$$

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{1}{2} [v_s'^2 + w_s'^2 + r^2 \theta'^2] + y w_s' \theta' - (z - z_s) v_s' \theta' \quad (11)$$

$$\gamma_{xy}^* = (w_s' + y \theta') \theta \quad (12)$$

$$\gamma_{xz}^* = -(v_s' + \theta'(z_s - z)) \theta \quad (13)$$

و همچنین

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \varepsilon_{yy}^* = \varepsilon_{zz}^* = \gamma_{yz}^* = 0 \quad (14)$$

در ۱۱، جمله r^2 بیانگر فاصله نقطه M تا مرکز برش است:

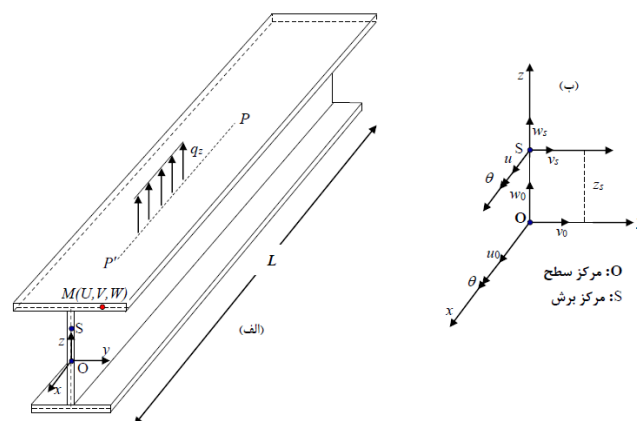
$$r^2 = y^2 + (z - z_s)^2 \quad (15)$$

تحت شرایط کمانش جانبی، زمانی که تیر تحت لنگر خمشی اولیه M_y و نیروی برشی V_z قرار دارد، تنش‌های اولیه روی سطح مقطع به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$U(x, y, z) = u_0(x) - y \frac{\partial(v_s(x) + z_s \theta(x))}{\partial x} - z \frac{\partial w_s(x)}{\partial x} - \phi(y, z) \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \quad (1)$$

$$V(x, y, z) = v_s(x) - (z - z_s) \theta(x) \quad (2)$$

$$W(x, y, z) = w_s(x) + y \theta(x) \quad (3)$$



شکل ۱: (الف) تیر جدار نازک با سطح مقطع نامتقارن، (ب) سیستم مختصات و پارامترهای معرف تغییر شکل تیر

Fig. 1. (a) A thin-walled beam with a singly symmetric I section, (b) Coordinate system and notation of displacement parameters

در رابطه فوق U تغییر شکل محوری است. مولفه‌های تغییر مکان V و W نشان دهنده تغییر مکان‌های جانبی و عمودی (در جهت Y و Z) هستند. $\phi(y, z)$ تابع پیچش است که براساس تئوری سن ونان بر روی سطح مقطع تعریف می‌گردد. در تحلیل پایداری تیر جدار نازک، بایستی مولفه‌های کرنش-تغییر مکان را مطابق با تانسور کرنش گرین^۱ و با در نظر گرفتن جملات کرنش خطی و غیرخطی محاسبه نمود. مولفه‌های کرنش گرین با در نظر گرفتن اثرات تغییر مکان‌های بزرگ به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{ij}^l + \varepsilon_{ij}^* \quad (4)$$

ε_{ij}^l و ε_{ij}^* جملات خطی و غیر خطی کرنش هستند. در مورد تیرهای جدار نازک، مولفه‌های تانسور کرنش به موارد زیر کاهش می‌یابند:

$$\varepsilon_{xx} \approx U' + \frac{1}{2} (V'^2 + W'^2) = \varepsilon_{xx}^l + \varepsilon_{xx}^* \quad (5)$$

1 Green's strain tensor

در معادله فوق، I_z و I_y بیانگر ممان اینرسی سطحی نسبت به محور قوی و ضعیف هستند. همچنین A مساحت نیم‌رخ تیر جدار نازک است. J و I_ϕ به ترتیب ممان اینرسی معادل پیچشی و ضریب تابیدگی هستند. خصوصیات هندسی یک مقطع جدار نازک براساس قوانین حاکم بر انتگرال گیری نسبت به محورهای اصلی به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\begin{aligned} A &= \int_A dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \\ I_z &= \int_A y^2 dA, \quad I_\phi = \int_A \phi^2 dA \\ J &= \int_A \left(\left(y - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \left(z + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right) dA, \\ I_{\phi y} &= \int_A y \phi dA, \quad I_{\phi z} = \int_A z \phi dA \end{aligned} \quad (21)$$

مطابق با اصول حاکم بر مدل ولاسو، دو مولفه عمودی و جانبی مختصات مرکز برش به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$$z_s = -\frac{I_{\phi y}}{I_z}; \quad y_s = -\frac{I_{\phi z}}{I_y} \quad (22)$$

با توجه به اینکه در این مطالعه، سطح مقطع دارای یک محور تقارن نسبت به راستای عمودی Z است، مولفه y_s برابر صفر می‌گردد. با جایگذاری رابطه فوق در معادله ۲۰، عبارت زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} U_l &= \int_L \left(EAu_0'^2 + EI_z v_s''^2 + EI_y w_s''^2 \right. \\ &\quad \left. + EI_\phi \theta''^2 + GJ\theta'^2 - EI_z z_s^2 \theta''^2 \right) dx \end{aligned} \quad (23)$$

با استفاده از روابط حاکم بر کرنش‌های غیرخطی و تنش‌های ناشی از بارگذاری، انرژی کرنشی ناشی از تنش اولیه به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\begin{aligned} U_0 &= \int_L \int_A \tau_{ij}^0 (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^l) dA dx \\ &= \int_L \int_A \left(\sigma_{xx}^0 \varepsilon_{xx}^* + \tau_{xz}^0 \gamma_{xz}^* \right) dA dx \end{aligned} \quad (24)$$

با جایگذاری روابط کرنش-تغییر مکان غیرخطی ارائه شده در معادلات ۱۱ تا ۱۳ و همچنین تنش‌های اولیه در رابطه فوق، و با انتگرال گیری بر روی سطح مقطع، رابطه زیر براساس ممان خمشی وارده (M_y) بدست

$$\sigma_{xx}^0 = -\frac{M_y}{I_y} z; \quad \tau_{xz}^0 = \frac{V_z}{A} = \frac{M_y'}{A} \quad (16)$$

در رابطه فوق، σ_{xx}^0 و τ_{xz}^0 به ترتیب بیانگر تنش عمودی و تنش برشی میانگین ناشی از بارهای وارده بر سطح مقطع هستند.

در این پژوهش، مصالح مصرفی همگن و ایزوتروپیک هستند که E و G خصوصیات مصالح الاستیک می‌باشند. بنابراین، مولفه‌های تنش به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}; \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (17)$$

۲-۲- تعیین معادلات تعادل الاستیک

در این قسمت از اصل انرژی پتانسیل کلی به منظور تعیین معادلات تعادل تیر جدار نازک استفاده شده است. برای یک محیط پیوسته، شرط حداقل شدن انرژی پتانسیل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta \Pi = \delta(U - W_e) = 0 \quad (18)$$

در رابطه فوق Π نشان دهنده انرژی پتانسیل کل است که از تفاضل انرژی کرنشی U و کار خارجی W_e ناشی از بارهای موثر وارد بر عضو؛ تعیین می‌گردد.

به منظور تحلیل پایداری، انرژی کرنشی تیر به دو قسمت که یکی شامل مولفه‌های کرنش خطی و دیگری دربرگیرنده مولفه‌های تنش اولیه است، تقسیم گشته است. در قسمت الاستیک خطی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U_l &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \tau_{ij} \varepsilon_{ij} dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \left(E\varepsilon_{xx}^2 + G\gamma_{xy}^2 + G\gamma_{xz}^2 \right) dA dx \end{aligned} \quad (19)$$

با استفاده از روابط ۸ تا ۱۰ که مربوط به مولفه‌های کرنش خطی هستند و با انتگرال گیری بر روی سطح مقطع عضو، رابطه زیر برای U_l حاکم بر تیر با مقطع ثابت بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} U_l &= \frac{1}{2} \int_L \left(EAu_0'^2 + EI_z v_s''^2 + EI_y w_s''^2 + EI_\phi \theta''^2 + GJ\theta'^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_L EI_z \left(z_s^2 \theta''^2 + 2z_s v_s'' \theta'' \right) dx \\ &\quad + \int_L EI_{y\phi} \left(v_s'' \theta'' + z_s \theta''^2 \right) dx + \int_L EI_{z\phi} \left(w_s'' \theta'' \right) dx \end{aligned} \quad (20)$$

خواهد آمد:

$$W = \int_L \left(q_z w_s + \hat{M}_t \theta - \frac{1}{2} M_t \theta^2 \right) dx \quad (29)$$

در رابطه فوق، M_t و \hat{M}_t لنگرهای پیچشی مرتبه اول و دوم ناشی از خروج از مرکزیت بارهای خمشی هستند که به صورت زیر تعریف می‌گردند:

$$\hat{M}_t = q_z e_y, \quad M_t = q_z e_z \quad (30)$$

با مشتق‌گیری از رابطه ۱۸ نسبت به مولفه‌های تغییر مکان (u_0, v_s, w_s, θ) ، معادلات دیفرانسیل تعادل حاکم بر تیر جدار نازک مد نظر با نیم‌رخ نامتقارن به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$[EAu_0']' = 0 \quad (31)$$

$$EI_z v_s''' - (M_y \theta)'' = 0 \quad (32)$$

$$EI_y w_s''' = q_z \quad (33)$$

$$EI_\phi \theta'''' - GJ\theta'' - M_y v_s'' - M_y z_s \theta(x) + [\beta_z M_y \theta']' = \hat{M}_t - M_t \theta(x) \quad (34)$$

شرایط مرزی حاکم بر معادلات فوق به شرح زیر هستند:

$$\delta(\partial u) = 0 \quad \text{یا} \quad EAu_0' = 0 \quad (35)$$

$$\delta\left(\frac{\partial v_s}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{یا} \quad EI_z v_s'' - M_y \theta = 0 \quad (36)$$

$$\delta(\partial v_s) = 0 \quad \text{یا} \quad -EI_z v_s''' + [M_y \theta]' = 0 \quad (37)$$

$$\delta\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{یا} \quad EI_y w_s'' + M_z \theta = 0 \quad (38)$$

$$\delta(\partial w_s) = 0 \quad \text{یا} \quad -EI_y w_s''' - [M_z \theta]' = 0 \quad (39)$$

$$\delta\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{یا} \quad EI_\phi \theta'' = 0 \quad (40)$$

$$\delta(\partial \theta) = 0 \quad \text{یا} \quad \begin{aligned} -EI_\phi \theta'' + GJ\theta' \\ -\beta_z M_y \theta' = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

مطابق با معادلات بدست آمده می‌توان از تغییر شکل محوری و روابط وابسته به آن صرف‌نظر کرد؛ زیرا بر روی پایداری جانبی تیر جدار نازک

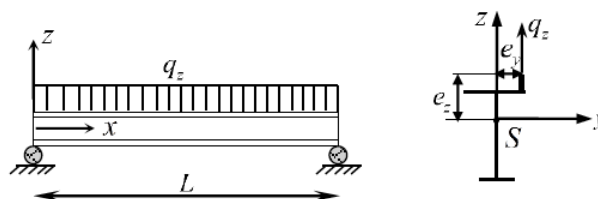
$$U_0 = \int_L \left(M_y v_s' \theta' + M_y' v_s' \theta - \frac{1}{2} M_y'' z_s \theta^2 - \frac{1}{2} (\beta_z M_y) \theta'^2 \right) dx \quad (25)$$

که در آن، β_z ثابت واگنر است و معادله آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\beta_z = \frac{1}{I_z} \left(\iint_A y(y^2 + z^2) dA \right) - 2z_s \quad (26)$$

عضو جدار نازک تحت بار q_z که در راستای عمودی و در امتداد خط (PP') بر روی دامنه سطح مقطع عضو وارد می‌گردد، قرار دارد (شکل ۲). کار خارجی ناشی از بارگذاری خارجی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$W = \int_0^L (q_z w_P(x)) dx \quad (27)$$



شکل ۲: یک تیر جدار نازک تحت بارخمشی جانبی (q_z) و پارامتر خروج از مرکزیت بار (e_y و e_z)

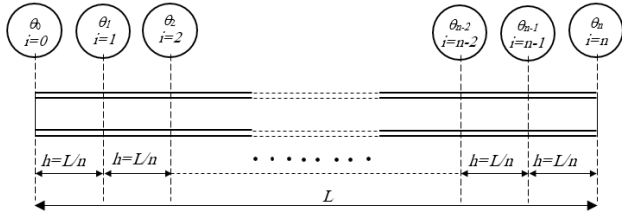
Fig. 2. A thin-walled beam under lateral bending loads (q_z) and definition of load eccentricities (e_y, e_z)

به منظور در نظر گرفتن اثرات خروج از مرکزیت بارگذاری که در تحلیل پایداری جانبی حائز اهمیت است، مولفه تغییر مکان عمودی سطح مقطع (W_P) منطبق بر نقطه P یا همان محل اثر بار، براساس فرضیات سینماتیک غیرخطی معرفی شده در [۲۱] به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$w_P = w_s + e_y \theta - e_z \frac{\theta^2}{2} \quad (28)$$

به منظور ساده سازی روابط فوق و برای نشان دادن مقدار خروج از مرکزیت بارهای جانبی نسبت به مرکز برش از پارامترهای $(e_y$ و $e_z)$ استفاده شده است. با استفاده از $(e_z = z_P - z_s, e_y = y_P - y_s)$ و جایگذاری در ۲۷ خواهیم داشت:

محدود به Ω قطعه تقسیم می‌گردد و در نتیجه طول هر قسمت برابر $h = \frac{L}{n}$ می‌شود. نحوه تقسیم بندی و شماره گذاری نقاط بر مبنای روابط اختلاف محدود مرکزی در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۳: تقسیم بندی طول تیر به المان‌های یکسان براساس روش اختلاف محدود

Fig. 3. Equally spaced grid point along the beam's length in the Finite Difference Method

با توجه به تعاریف مربوط به اختلاف محدود مرکزی و وجود مشتقات مرتبه اول تا چهارم تغییر شکل پیچشی سطح مقطع در معادله دیفرانسیل پایداری، روابط زیر ارائه شده است:

$$\theta'_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2h} \quad (44)$$

$$\theta''_i = \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{h^2} \quad (45)$$

$$\theta'''_i = \frac{\theta_{i+2} - 2\theta_{i+1} + 2\theta_{i-1} - \theta_{i-2}}{2h^3} \quad (46)$$

$$\theta''''_i = \frac{\theta_{i+2} - 4\theta_{i+1} + 6\theta_i - 4\theta_{i-1} + \theta_{i-2}}{h^4} \quad (47)$$

در ادامه، روابط فوق را در معادله پایداری بدست آمده برای تیر جدار نازک با سطح مقطع نامتقارن جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & EI_{\phi}(\theta_{i+2} - 4\theta_{i+1} + 6\theta_i - 4\theta_{i-1} + \theta_{i-2}) \\ & - Gh^2 J(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) - h^4 M''_{y_i z_c} \theta_i \\ & - \frac{h^4}{EI_z} M''_{y_i} \theta_i + \frac{h^3}{2} (\beta_z M_{y_i})' (\theta_{i+1} - \theta_{i-1}) \\ & + h^2 (\beta_z M_{y_i}) (\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}) + M_{t_i} \theta_i = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

یا

تاثیرگذار نیستند. بنابراین در مراحل تحلیل پایداری جانبی-پیچشی تیر جدار نازک، به معادله دیفرانسیل یاد شده نیازی نمی‌باشد. در نتیجه، دستگاه معادلات باقی مانده حاکم بر تحلیل پایداری جانبی-پیچشی تیر جدار نازک، یک دستگاه معادله دیفرانسیل وابسته است. با توجه به تغییر شکل پیچشی می‌توان این دو معادله مرتبه چهار را به صورت زیر و با استفاده از رابطه ۳۶، از وابستگی خارج نمود.

$$v_s'' = \frac{M_y}{EI_z} \theta \quad (42)$$

در ادامه، عبارت فوق در معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم حاکم بر تغییر شکل پیچشی تیر، جایگذاری شده است. پس از مشتق گیری و ساده سازی‌های مورد نیاز، معادله دیفرانسیل پیچش دیگر به تغییر شکل خمشی وابسته نخواهد بود و معادله تعادل برحسب زاویه پیچش سطح مقطع (θ) ، لنگر خمشی و پیچشی وارده، به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} & EI_{\phi} \theta'''' - GJ \theta'' - M''_{y_i z_s} \theta - \frac{M_y^2}{EI_z} \theta \\ & + (\beta_z M_{y_i} \theta')' + M_{t_i} \theta = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

هم‌چنین بارگذاری عرضی بدون خروج از مرکزیت در راستای عمودی $(e_y = 0)$ وارد می‌گردد؛ در نتیجه، پارامتر $\hat{M}_i = 0$ برابر صفر قرار داده شده است. در ادامه این بخش، روش عددی تفاوت محدود برای حل معادله دیفرانسیل پایداری حاکم بر تیر جدار نازک بکار برده شده است. این روش توسط نویسندگان مختلفی برای تحلیل پایداری خطی و یا غیرخطی اعضای الاستیک [۲۷-۲۹] و تیرهای جدار نازک [۲۸ و ۲۹] به کار برده شده است. در ادامه، روش عددی مذکور در حل معادله دیفرانسیل مرتبه چهار، حاکم بر پایداری جانبی-پیچشی تیرهای جدار نازک با سطح مقطع نامتقارن ارائه می‌گردد.

۳- روش عددی

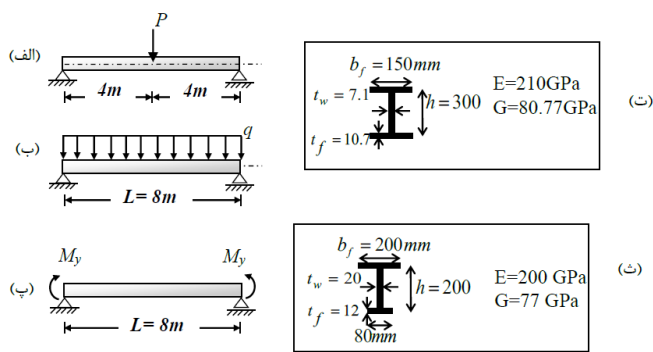
روش تفاضل محدود، یک روش عددی مناسب برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر است. اساس این روش بر این اصل استوار است که مشتقات مراتب مختلف تابع مجهول در یک نقطه را می‌توان با عبارتی جبری حاصل از بسط تیلور جایگزین نمود. روابط ارائه شده شامل مقدار تابع در نقطه مدنظر و چندین نقطه هم‌جوار است. در نتیجه، معادله دیفرانسیل به یکسری معادلات جبری وابسته تبدیل می‌شود. در این روش، معادله دیفرانسیل هم‌زمان با یکسری معادلات خطی جایگزین می‌شود که حل آنها عموماً با درنظر گرفتن شرایط مرزی حاکم بر مسئله از حل خود معادلات دیفرانسیل ساده‌تر است.

تیر دوسر مفصل به طول L ، مطابق با فرضیات حاکم بر روش اجزای

عددی معرفی شده با جواب‌های بدست آمده از خروجی نرم افزار Ansys [۳۵] مقایسه گشته‌اند. در نرم‌افزار اجزای محدود مذکور، کلیه تیرهای جدار نازک مطالعه شده توسط المان پوسته (SHELL63) مدل شده‌اند. این المان ۶ درجه آزادی در هر گره دارد، که شامل سه درجه انتقالی در راستای X، Y و Z و همچنین سه درجه دورانی حول این سه محور است.

مثال ۱

در این مثال، با هدف کنترل دقت، کارایی و تعیین تقریبی تعداد تقسیم‌بندی‌های لازم در طول المان برای دستیابی به جواب دقیق مطابق با روش عددی ارائه شده، سه مثال شامل تیرهای دو سر مفصل به طول ۸ متر با مقطع ثابت تحت بارگذاری‌های مختلف ارائه شده است. در دو مورد اول، مقدار لنگر بحرانی برای تیر منشوری با سطح مقطع متقارن محاسبه شده است. در حالی که در مورد سوم، تیر جدار نازک با سطح مقطع نامتقارن مورد تحلیل پایداری جانبی قرار گرفته است. در ادامه، هریک از موارد مطرح شده به تفصیل توضیح داد شده‌اند. (مورد ۱) مقدار لنگر خمشی بحرانی تیر منشوری دو سر مفصل با استفاده از روش اختلاف محدود مرکزی محاسبه شده است. تیر جدارنازک مد نظر تحت بار متمرکز جانبی در وسط دهانه خود می‌باشد و بار مذکور بر مرکز برش سطح مقطع وارد شده است (شکل ۴-الف). (مورد ۲) در این مورد، مقدار ممان خمشی بحرانی در وسط تیر دو سر مفصلی که تحت بار گسترده جانبی یکنواخت قرار دارد، تعیین شده است. تحلیل پایداری برای حالتی انجام شده است که بار بر بال فوقانی سطح مقطع نشان داده شده وارد می‌شود (شکل ۴-ب). (مورد ۳) مقدار ممان خمشی بحرانی برای یک تیر دو سر مفصل با مقطع I نامتقارن، که تحت لنگر خمشی یکنواخت در طول خود قرار دارد محاسبه شده است (شکل ۴-پ). خصوصیات هندسی سطح مقطع، بارگذاری و مصالح تیرهای بحث شده در شکل ۴ نشان داده شده‌اند.



شکل ۴: تیرهای جدار نازک منشوری دو سر مفصل با مقاطع متفاوت (متقارن، یک محور تقارن) تحت بارگذاری جانبی: خصوصیات هندسی، بارگذاری و مصالح

Fig. 4. Simply supported beams with different cross-sections: geometry, loading and material data.

$$\begin{aligned} & \theta_{i+2}(EI_{\phi}) \\ & + \theta_{i+1}(-4EI_{\phi} - Gh^2J + \frac{h^3}{2}(\beta_z M_{yi})') + h^2(\beta_z M_{yi}) \quad (49) \\ & + \theta_i(6EI_{\phi} + 2Gh^2J - h^4 M_{yi}'' z_{ci} - \frac{h^4}{EI_z} M_{yi}'' - 2h^2 \beta_z M_{yi} + M_{ii}) \\ & + \theta_{i-1}(-4EI_{\phi} - Gh^2J - \frac{h^3}{2}(\beta_z M_{yi})') + h^2(\beta_z M_{yi}) \\ & + \theta_{i-2}(EI_{\phi}) = 0 \end{aligned}$$

در صورتی که تیر مورد نظر به طور مثال به n قطعه مساوی تقسیم شود، رابطه فوق را بایستی برای تمامی نقاط نوشت و در نتیجه، $n+1$ معادله حاصل می‌گردد. شرایط مرزی برای انتهای مفصلی تیر به صورت زیر است:

$$\theta = 0 \Big|_{x=0, x=L} \quad \frac{d^2 \theta}{dx^2} = 0 \Big|_{x=0, x=L} \quad (50)$$

مطابق با روش اختلاف محدود، رابطه ۵۰ را می‌توان به صورت زیر باز نویسی نمود:

$$\begin{aligned} \theta_i &= 0 \Big|_{x=0 \rightarrow i=0} \\ \theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1} &= 0 \Big|_{x=L \rightarrow i=n} \quad (51) \end{aligned}$$

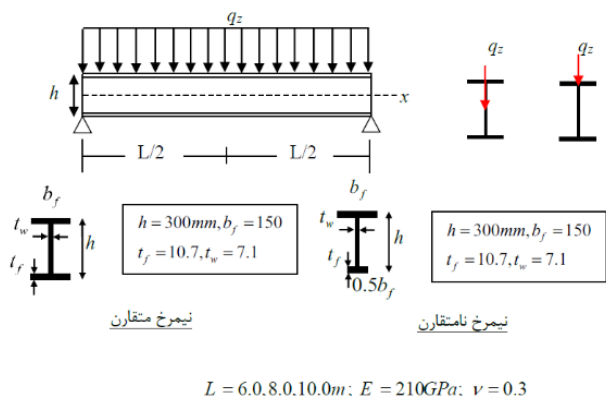
$n+1$ معادله اختلاف محدود در نقاط حاصل از تقسیم بندی و دو شرط مرزی اضافی در هر انتها منجر به یک دستگاه معادله خطی به ابعاد $n+5$ می‌گردد. معادله بدست آمده را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$[B]_{(n+5) \times (n+5)} \{\theta\}_{(n+5) \times 1} = 0 \quad (52)$$

در رابطه فوق، $[B]$ ماتریس ضرایب به ابعاد $(n+5) \times (n+5)$ است که شامل مقدار مجهول بار کمانشی است. با توجه به اینکه معادله مذکور یک معادله خطی همگن است، براساس حل مقادیر ویژه و با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب می‌توان مقدار بار کمانش بحرانی را تعیین نمود. کلیه مراحل عددی توضیح داده شده به منظور محاسبه بار کمانشی در نرم افزار MATLAB [۳۴] بسط داده شده است. در قسمت بعد، طی چند مثال دقت، اعتبار و توانایی شیوه عددی پیشنهاد شده مورد بررسی قرار گرفته است.

۴- مثال‌های عددی

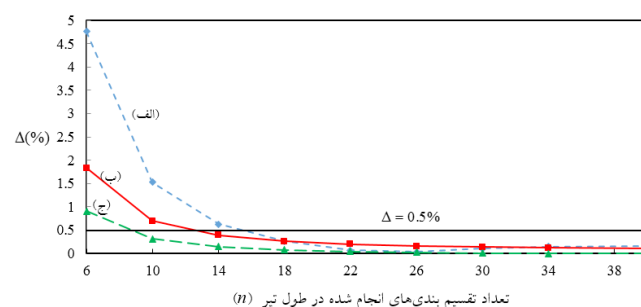
هدف از این قسمت بررسی توانایی و دقت روش اختلاف محدود مرکزی در محاسبه بار کمانش جانبی-پیچشی تیر جدار نازک دوسر مفصل با سطح مقطع نامتقارن و بارگذاری دلخواه است. بدین منظور، چند نمونه مثال عددی ارائه شده است، که نتایج حاصل از آن‌ها با مقادیر بدست آمده از اجزاء محدود و روش‌های عددی موجود مقایسه شده‌اند. مقادیر حاصل از روش



شکل ۶: تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده جانبی یکنواخت

Fig. 6. Simply supported beam under uniform distributed load

در کلیه موارد معرفی شده، نتایج به دست آمده از تحلیل پایداری مقادیر بار کمانش جانبی-پیچشی تعیین شده به کمک روش بسط سری‌های توانی که توسط عسگریان [۳۰] معرفی شده است، مقایسه گشته‌اند.



شکل ۵: بررسی عملکرد روش عددی ارائه شده در تعیین بار کمانش جانبی تیر دو سر مفصل

Fig. 5. Variation of the relative errors (Δ) versus the number of segments (n) along the beam's length.

جدول ۱ مقادیر لنگرهای خمشی حداکثر در وسط دهانه تیرهای مذکور ($M_{cr} = \frac{q_z L^2}{8}$) متناظر با بار بحرانی که منجر به کمانش جانبی تیر می‌شود را در هر دو حالت بارگذاری توضیح داده شده، نشان می‌دهد. ممان‌های کمانشی مطابق با روش عددی مطرح شده، روش اجزاء محدود به وسیله نرم‌افزار Ansys [۳۵] و حل عددی با استفاده از روش بسط سری‌های توانی [۳۰] محاسبه گردیده‌اند. همچنین جدول مذکور مقدار خطای نسبی (Δ) بین روش ارائه شده و مقادیر به دست آمده از روش سری‌های توانی که با استفاده از رابطه زیر محاسبه شده است را نشان می‌دهند:

$$\Delta = (M_{cr} - M_{cr}^{PSM}) / M_{cr}^{PSM} \times 100 \quad (53)$$

با توجه به جدول ۱ می‌توان نتیجه‌گیری نمود که تطابق بسیار خوبی میان روش اختلاف محدود مرکزی، بسط سری توانی و روش المان محدود به کار برده شده در نرم افزار Ansys وجود دارد.

مثال ۳

در مثال آخر به تحلیل پایداری جانبی تیرهای جدار نازک دو سر مفصل تحت لنگر خمشی متغیر (M_0 و βM_0) پرداخته می‌شود. مطابق با شکل ۷، پس از تعیین عکس العمل‌های تکیه گاهی و با قرار دادن مبدا در انتهای سمت چپ تیر مد نظر معادله حاکم بر لنگر خمشی داخلی در طول تیر به صورت زیر خواهد شد:

$$M(x) = M_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \beta M_0 \frac{x}{L} \quad (54)$$

شکل ۵ نشان دهنده نمودار تغییرات میزان خطای نسبی نسبت به تعداد تقسیم بندی‌های انجام شده در روش اختلاف محدود مرکزی است. با مشاهده نتایج ارائه شده در شکل مذکور، می‌توان نکات زیر را نتیجه‌گیری نمود:

۱. تطابق قابل قبولی میان نتایج محاسبه شده برای بارهای کمانشی با استفاده از روش اختلاف محدود مرکزی و روش عددی بسط سری توانی وجود دارد.
۲. در صورتی که عضو جدار نازک حداقل به ۱۶ قطعه تقسیم شود، می‌توان مقادیر بار کمانشی جانبی و لنگر خمشی بحرانی را با خطای کمتر ۰/۵٪ بدست آورد.
۳. با افزایش تقسیم بندی‌ها به بیش از ۲۵ قطعه، میزان خطای نسبی (Δ) به سرعت به زیر ۰/۱٪ کاهش می‌یابد.

مثال ۲

در مثال دوم، کمانشی جانبی دو نوع تیر جدار نازک دو سر مفصل تحت بار گسترده جانبی مورد بررسی قرار گرفته‌است. تیرهای تحلیل شده دارای سطح مقطع کاملاً متقارن و یا با یک محور تقارن هستند. تیر تحت بار گسترده یکنواخت قرار دارد. لنگر کمانشی بحرانی تیر مورد بحث در دو حالت مختلف محاسبه گشته است: در مورد اول، بار گسترده بر مرکز برش سطح مقطع تیر وارد می‌گردد. در حالت دیگر، بار گسترده بر بال فوقانی سطح مقطع I شکل نشان داده شده در شکل ۶، وارد می‌گردد. همچنین، خصوصیات هندسی، مصالح و شرایط بارگذاری تیر مدنظر در شکل مذکور نشان داده شده است.

جدول ۱: تیر دو سر مفصل تحت بار گسترده شکل ۶: لنگر خمشی بحرانی (M_{cr}) و درصد خطای نسبی (Δ)

Table 1. Simply supported beam subjected to distributed load (Fig. 6): buckling moments (M_{cr}) and relative errors (Δ)

محل اعمال بار گسترده	لنگرهای کمانش بحرانی (kN.m)									
	L (m)	سطح مقطع متقارن				سطح مقطع با یک محور تقارن				$\Delta(\%)$
		روش ارائه شده	روش اجزای محدود Ansys	عسگریان [۳۰]	$\Delta(\%)$	روش ارائه شده	روش اجزای محدود براساس Ansys	عسگریان [۳۰]	$\Delta(\%)$	
مرکز برش	۶	۹۴/۰۴	۹۲/۳۲	۹۳/۸۲	۰/۲۳	۶۷/۶۹	۶۶/۲۳	۶۷/۴۴	۰/۳۷	
	۸	۶۴/۶۴	۶۳/۹	۶۴/۴۷	۰/۲۶	۴۶/۹۳	۴۶/۳۴	۴۶/۸۱	۰/۲۶	
	۱۰	۴۹/۳۸	۴۸/۹۸	۴۹/۲۳	۰/۳۰	۳۵/۸۵	۳۵/۴۷	۳۵/۷۱	۰/۳۹	
بال بالا	۶	۷۰/۸۸	۷۰/۵۸	۶۹/۴۶	۲/۰۴	۶۳/۱۷	۶۲/۷۳	۶۲/۸۷	۰/۴۸	
	۸	۵۱/۲۶	۵۱/۳۱	۵۰/۵۲	۱/۴۶	۴۴/۴۷	۴۴/۳۱	۴۴/۱۹	۰/۶۳	
	۱۰	۴۰/۶۵	۴۰/۷۷	۴۰/۲۰	۱/۱۲	۳۴/۳۲	۳۴/۳۴	۳۴/۱۷	۰/۴۴	

جدول ۲: اثر تعداد تقسیم‌بندی (FDM) و تعداد جملات سری توانی (PSM) بر لنگر بحرانی کمانش (M_{cr}) تیر منشوری دو سر مفصل تحت لنگر خمشی متغیر ($M_0, -0.5M_0$)

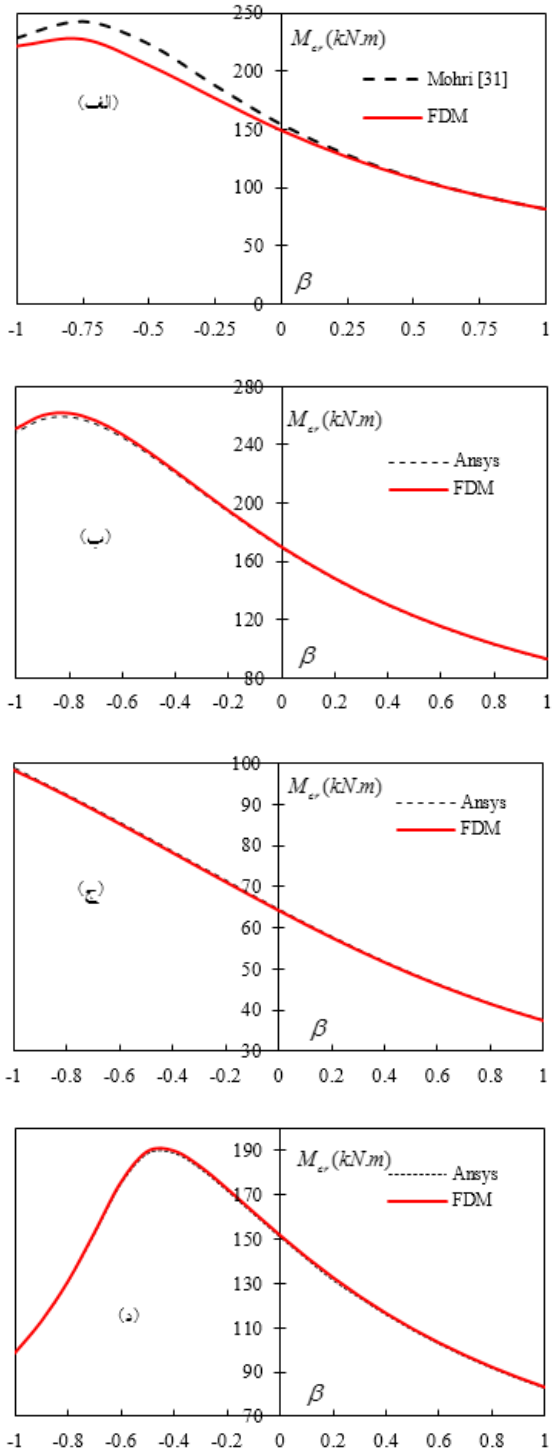
Table 2. Effect of number of divisions (FDM) and power series terms (PSM) on linear critical moments (M_{cr}) of simply supported thin-walled beam under ($M_0, -0.5M_0$)

مقطع نامتقارن	لنگرهای کمانش بحرانی (kN.m)											
	FDM					PSM [۳۰]					Ansys [۳۵]	
	تعداد تقسیم‌بندی					تعداد جملات در بسط سری						
	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	
شکل ۷-ج	۹۱/۳۲۳	۸۵/۶۶۱	۸۳/۸۷۵	۸۲/۷۱۳	۸۲/۳۴۶	۸۲/۱۸۹	۷۰/۳۵	۷۹/۴۶	۸۰/۷۴	۸۰/۷۳	۸۰/۷۳	۸۲/۱۹
شکل ۷-د	۲۰۴/۹۲۵	۱۹۶/۷۴	۱۹۳/۷۰۴	۱۹۱/۴۲۸	۱۹۰/۶۳۱	۱۹۰/۲۷۳	۲۹۱/۳	۲۰۰/۰۸	۱۹۱/۳۶	۱۹۰/۴۵	۱۹۰/۴۵	۱۸۸/۴

جانبی و خمشی در مراجع و مقالات دیگر به صورت کافی مورد بررسی قرار گرفته است [۱-۱۸]. در حالی که به بارگذاری در نظر گرفته شده در این مثال، کمتر در میان مطالعات انجام شده قبلی پرداخته شده است. با توجه به رابطه (۵۴)، زمانی که β منفی است؛ لنگر خمشی داخلی از مثبت به منفی در طول تیر تغییر می‌کند و در نتیجه جهت انحنای تیر در امتداد طولی عضو در یک نقطه خاص دچار تغییر می‌شود. با توجه به کارهای قبلی انجام شده توسط نویسندگان [۳۰ و ۳۲ و ۳۳]، در چنین شرایطی تعیین دقیق تابع حاکم بر تغییر شکل تیر توسط روش سری‌های توانی بسیار مشکل است. در نتیجه، برای دستیابی به معادله دقیق توصیف کننده مدهای کمانش جانبی-پیچشی توسط روش عددی مذکور، نیاز به تعداد جملات زیاد در بسط سری

در این مثال، چهار نوع سطح مقطع متفاوت برای تیر فوق در نظر گرفته شده است. از دو نیمرخ متقارن I شکل و دو مقطع نامتقارن I استفاده شده است. هر دو مقطع نامتقارن به صورت بال نامساوی در نظر گرفته شده‌اند، به طوری که در مورد نیمرخ سوم، بال پایین بزرگتر از بال بالا است و در مقطع انتخابی چهارم، بال بالا بزرگتر از بال پایین است. طول تیر دو سر مفصل تحلیل شده با مقطع الف برابر با هشت متر در نظر گرفته شده است و سه مقطع دیگر با طول نه متر مورد تحلیل پایداری قرار گرفته‌اند. خصوصیات هندسی و ابعاد مقاطع مذکور در شکل ۷ نمایش داده شده‌اند. مدول یانگ و برشی مصالح فولادی تیر به ترتیب $E = 210Gpa$ و $G = 80.77Gpa$ هستند. پایداری جانبی تیر جدار نازک تحت حالات متفاوتی از بارگذاری

گیری نرم افزار Ansys [۳۳] نشان داده شده‌اند.

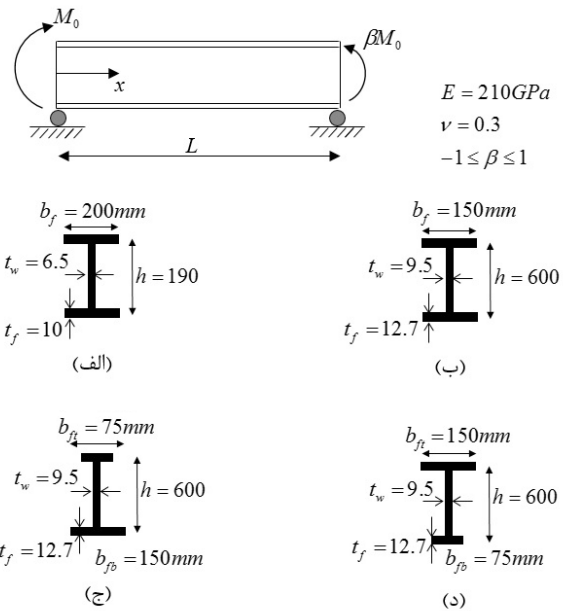


شکل ۸: مقایسه لنگر کمانشی جانبی تیر تحت ممان خمشی متغیر

Fig. 8. Variation of lateral buckling moment of beam under gradient moment, versus gradient factor β

بر مبنای نمودارهای حاصل شده، می‌توان نتیجه‌گیری نمود که روش

حاکم بر جواب معادله است. در شرایطی که نیم‌رخ تیر نامتقارن است، حل معادله دیفرانسیل به مراتب پیچیده‌تر و سخت‌تر می‌شود. بنابراین، استفاده از روش اختلاف محدود در تحلیل پایداری تیرهای جدار نازک تحت بارگذاری مذکور بسیار مناسب‌تر است. به همین منظور، در جدول ۲ نحوه همگرایی نتایج بار کمانشی به‌دست آمده از هر دو روش بسط سری‌های توانی و اختلاف محدود برای دو مقطع I نامتقارن نشان داده شده در شکل ۷ ج و د که تحت لنگر خمشی متغیر ($M_0, -0.5M_0$) قرار دارند؛ ارائه شده است. این بارگذاری از آن جهت انتخاب شده است که منجر به انحنای مضاعف در تیر شده و یکی از پیچیده‌ترین حالات بارگذاری است. با توجه به جدول مذکور کاملاً مشخص است که برای محاسبه لنگر بحرانی کمانش (M_{cr}) مطابق با روش اختلاف محدود کافی است تیر را به ۳۰ قسمت تقسیم‌بندی نمود؛ درحالی‌که براساس روش سری‌های توانی نیاز به حداقل ۵۰ جمله در بسط سری می‌باشد.



شکل ۷: تیر جدار نازک دو سر مفصل تحت لنگر خمشی متغیر در انتهای خود؛ خصوصیات هندسی و مصالح تیر جدار نازک، (الف و ب) سطح مقطع متقارن، (ج و د) سطح مقطع با یک محور تقارن

Fig. 7. Simply supported beam under moment gradient: geometry and material properties, doubly symmetric and singly symmetric sections

تغییرات لنگر کمانشی بحرانی (M_{cr}) تیر نسبت به فاکتور تغییرات لنگر (β) برای هر چهار تیر دو سر مفصل تحلیل شده، در شکل ۸ به تصویر کشیده شده است. در نمودارهای زیر نتایج لنگر خمشی بحرانی (M_{cr}) محاسبه شده توسط راه حل عددی معرفی شده بر مبنای روش اختلاف محدود، روش ارائه شده توسط مهری [۳۱] و روش اجزای محدود با به کار

implementation, Elsevier, 1987.

- [4] Z.P. Bazant, L. Cedolin L, Stability of structures Elastic, inelastic fracture and damage theories, Dover Publications, 1991.
- [5] L. Zhang, G.S. Tong, Flexural-torsional buckling of thin-walled beam members based on shell buckling theory, *Thin-Walled Structures*, 42 (2004) 1665-1687.
- [6] A. Sapkas, L.P. Kollar, Lateral-torsional buckling of composite beams, *International Journal of Solids and Structures*, 39(11) (2002) 2939-2963.
- [7] F. Mohri, A. Brouki, J.C. Roth, Theoretical and numerical stability analyses of unrestrained, mono-symmetric thin-walled beams, *Journal of Constructional Steel Research*, 59 (2003) 63-90.
- [8] L. Jun, L. Wanyou, S. Rongying, H. Hongxing, Coupled bending and torsional vibration of non-symmetrical axially loaded thin-walled Bernoulli-Euler beam, *Mechanics Research Communications*, 31 (2004) 697-711.
- [9] A. Andrade, D. Camotim, P. Providencia, On the evaluation of elastic critical moments in doubly and singly symmetric I-section cantilevers, *Journal of Constructional Steel Research*, 67 (2007) 894-908.
- [10] R.E. Erkmén, M. Mohareb, Buckling analysis of thin-walled open members- A complementary energy variational principle, *Thin-Walled Structures*, 46 (2008) 602-617.
- [11] R.E. Erkmén, M. Mohareb, Buckling analysis of thin-walled open members- A finite element formulation, *Thin-Walled Structures*, 46 (2008) 618-636.
- [12] A.Y.T. Leung, Exact dynamic stiffness for axial-torsional buckling of structural frames, *Thin-Walled Structures*, 46 (2008) 1-10.
- [13] C.W. Kurniawan, M. Mahendran, Elastic lateral buckling of simply supported LiteSteel beams subject to transverse loading, *Thin-Walled Structures*, 47 (2009) 109-119.
- [14] M.M. Attard, M.Y. Kim, Lateral buckling of beams with shear deformations- A hyperelastic formulation, *International Journal of Solids and Structures*, 47 (2010) 2825-2840.
- [15] L. Wu, M. Mohareb M, Buckling of shear deformable thin-walled members—I. Variational principle and analytical solutions, *Thin-Walled Structures*, 49 (2011) 197-207.
- [16] L. Wu, Mohareb M, Buckling formulation for shear deformable thin-walled members—II Finite element formulation, *Thin-Walled Structures*, 49 (2011) 208-222.
- [17] F. Borbon, A. Mirasso, D. Ambrosini, Beam element for coupled torsional-flexural vibration of doubly

تفاوت محدود استفاده شده در تعیین مقدار بار بحرانی کمانش از توانایی خوبی برخوردار است و بار دیگر توانایی و صحت روش عددی استفاده شده در این مقاله اثبات می‌گردد.

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، یک مسیر عددی بر اساس روش اختلاف محدود مرکزی به منظور محاسبه بارهای کمانش پیشگی-جانبی اعضای جدار نازک دوسر مفصل با نیمرخ دلخواه ارائه گردید.

در ابتدا، با استفاده از اصل پایداری انرژی پتانسیل کلی سیستم الاستیک و با در نظر گرفتن اثرات تنش اولیه و کار ناشی از بارهای خارجی اعمال شده، معادلات دیفرانسیل مرتبه چهارم پایداری تعیین گردیدند. معادلات مذکور به یکدیگر وابسته هستند ولی به وسیله یکی از شروط مرزی حاکم بر تعادل خمشی عضو جدار نازک، دستگاه معادلات از وابستگی خارج شده و تنها یک معادله دیفرانسیل با ضرایب متغیر و برحسب تغییر شکل پیشگی سطح مقطع به دست آمد. در پایان، معادله حاصله توسط توابع حاکم بر روش اختلاف محدود مرکزی حل شد و براساس روش حل مقادیر ویژه، مقدار بار کمانش پیشگی-جانبی محاسبه گردید. روش معرفی شده را می‌توان برای تحلیل پایداری انواع مختلفی از تیرهای جدار نازک دوسر مفصل تحت بارهای متمرکز و یا گسترده جانبی مورد استفاده قرار داد. پس از بررسی نتایج مثال‌های عددی ارائه شده، ذکر موارد زیر ضروری است:

۱. تطابق خوبی میان نتایج محاسبه شده برای بارهای کمانشی بحرانی با استفاده از روش عددی تفاوت محدود و دیگر روش‌های عددی و تحلیلی ارائه شده وجود دارد.
۲. مقادیر بار کمانشی جانبی-پیشگی و لنگر خمشی بحرانی برای اعضای منشوری را می‌توان با میزان خطای کمتر از ۱٪ بدست آورد. در صورتی که، عضو دو سر مفصل تنها به ۱۴ قطعه در طول خود تقسیم شود.
۳. هم‌چنین میزان خطای نسبی (Δ) با افزایش تعداد قطعات به بیش از ۲۵ جمله به سرعت به زیر ۰/۵٪ کاهش می‌یابد.
۴. در مقایسه با روش سری‌های توانی، مسیر عددی ارائه شده بر مبنای روش اختلاف محدود مرکزی نیاز به تعداد جملات کمتری برای محاسبه بار بحرانی کمانش جانبی-پیشگی دارد و این امر منجر به افزایش سرعت محاسبات می‌شود.

مراجع

- [1] S.P. Timoshenko, J.M Gere, Theory of elastic stability. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [2] V.Z. Vlasov, Thin-walled elastic beams, Moscow, 1959. French translation, Pièces longues en voiles minces, Eyrolles, Paris, 1962.
- [3] W.F. Chen, E.M. Lui, Structural stability, theory and

- [26] S.A. Al-Khaabi, G. Aksu, Free vibration analysis of mindlin plates with parabolically varying thickness, *Computers and Structures*, 34(3) (1990) 395-399.
- [27] J.P. Singh, S.S. Dey, Variationa of finite difference approach to buckling of plates of variable stiffness. *Computers and Structures* 1990; 36(1): 39-45.
- [28] B. Suryoatmono, D. Ho, The moment–gradient factor in lateral–torsional buckling on wide flange steel sections, *Journal of Constructional Steel Research*, 58 (2002) 1247–1264.
- [29] J.T. Mottram, Lateral-torsional buckling of thin-walled composite I- beams by the finite difference method, *Composites Engineering*, 2(2) (1992) 91-104.
- [30] B. Asgarian, M. Soltani, F. Mohri, Lateral-torsional buckling of tapered thin-walled beams with arbitrary cross-sections, *Thin-Walled Structures*, 62 (2013) 96–108.
- [31] F. Mohri, N. Damil, M. Potier-Ferry, Linear and non-linear stability analyses of thin-walled beams with mono symmetric I sections, *Thin-Walled Structures*, 48 (2010) 299–315.
- [32] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Elastic instability and free vibration analyses of tapered thin-walled beams by power series method, *Journal of constructional steel research*, 96 (2014) 106-126.
- [33] M. Soltani, B. Asgarian, F. Mohri, Finite element method for stability and free vibration analyses of non-prismatic thin-walled beams, *Thin-Walled Structures*, 82 (2014) 245-261.
- [34] MATLAB Version 7.6, MathWorks Inc, USA, 2008.
- [35] ANSYS, Version 5.4, Swanson Analysis System, Inc, 2007.
- unsymmetrical thin walled beams axially loaded, *Computers and Structures*, 89 (2011) 1406-1416.
- [18] J. Kuś, Lateral-torsional buckling steel beams with simultaneously tapered flanges and web, *Steel and Composite Structures*, 19(4) (2015) 897-916.
- [19] P. Ruta, J. Szybinski, Lateral stability of bending non-prismatic thin-walled beams using orthogonal series, *Procedia Engineering*, 11 (2015) 694-701.
- [20] F. Mohri, S.A. Meftah, N. Damil, A large torsion beam finite element model for tapered thin-walled open cross-sections beams, *Engineering Structures*, 99 (2015) 132-148.
- [21] F. Mohri, N. Damil, M. Potier-Ferry, Large torsion finite element model for thin-walled beams, *Computers and Structures*, 86 (2008) 671–683.
- [22] M.J. Iromenger, Finite difference buckling analysis of non-uniform columns, *Computers and Structures*, 12(5) (1980) 741-748.
- [23] T. Asakura, T. Ishizuka, T. Miyajima, M. Toyoda, Finite-difference time-domain analysis of the vibration characteristics of a beam-plate structure using a dimension-reduced model, *Applied Acoustics*, 292 (2015) 76-82.
- [24] B. Indraratna, N.N. Trung, C. Rujikiatkamjorn, S. Soltan, Coupled discrete element–finite difference method for analyzing the load-deformation behavior of a single stone column in soft soil, *Computers and Geotechnics*, 63 (2015) 267-278.
- [25] K.S. Viridi, Finite difference method for nonlinear analysis of structures, *Journal of Constructional Steel Research*, 62 (2006) 1210-1218.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Soltani, B. Asgarian, Determination of Lateral-Torsional Buckling Load of Simply Supported Prismatic Thin-Walled Beams with Mono-Symmetric Cross-Sections Using the Finite Difference Method. *Amirkabir J. Civil Eng.*, 50(1) (2018) 61-72.

DOI: 10.22060/ceej.2017.11194.4986

