

تحلیل دینامیکی سدهای بتنی وزنی با استفاده از المان نیمه بینهایت سیال بهینه

مریم حجتی^{۱*}؛ وحید لطفی^۲

چکیده

در تحلیل دینامیکی سدهای بتنی وزنی از المان نیمه بینهایت سیال، برای مدل کردن قسمت نامحدود مخزن استفاده می‌شود. این قسمت از ناحیه مخزن بصورت محدوده ای با ارتفاع ثابت که در بالادست تا بینهایت ادامه دارد، فرض می‌گردد. با بکارگیری المان نیمه بینهایت سیال دو بعدی، می‌توان به تحلیل دینامیکی دقیق سدهای بتنی دست یافت. لازم به ذکر است، روش رایجی که برای محاسبه ماتریس امیدانس المان نیمه بینهایت سیال دو بعدی استفاده می‌شود، منجر به حل مسئله مقادیر ویژه مختلط به ازای هر فرکانس گردیده که زمان قابل توجهی را به خود اختصاص می‌دهد. این مطالعه به پیشنهاد یک روش بهینه اختصاص یافته و با ساده سازی روند یاد شده در تحلیل المان نیمه بینهایت سیال دو بعدی، به طرز چشمگیری، زمان محاسبات کاهش می‌یابد. دقت این روش برای تمام حالات بررسی شده و نتیجه گیری می‌شود که تحت همه شرایط عملی، جواب‌های دقیقی حاصل می‌گردد.

کلمات کلیدی

تحلیل دینامیکی خطی، سدهای بتنی وزنی، المان نیمه بینهایت سیال بهینه

Dynamic Analysis of Gravity Dams by Employing Efficient Fluid Hyper-Element

M. Hojati.; V. Lotfi

ABSTRACT

Fluid hyper-element is usually utilized to model semi-infinite region in dynamic analysis of concrete gravity dams. This part of water domain is assumed to have constant depth that extends to infinity in the upstream direction. The accurate dynamic analysis of concrete gravity dam is obtained by employing two dimensional semi-infinite fluid element.

The usual method for calculating the impedance matrix of fluid hyper-element is dependent on the solution of a complex eigen-value problem for each frequency. In the present study, an efficient technique is proposed which simplifies this procedure significantly, and results in great computational time savings. The accuracy of this method is tested under various conditions thoroughly and concluded that efficient technique is accurate under all practical conditions.

KEYWORDS

Dynamic analysis, Gravity dams, Efficient fluid hyper-element

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۷/۹/۲۱

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۷/۱۱/۱۰

۱. * نویسنده مسئول و دانش آموز خسته کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران)،

Email: Hojati.Maryam@Gmail.com

۲. استاد دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی امیر کبیر (پلی تکنیک تهران)، Email: vahlotfi@aut.ac.ir



می‌پردازد. با به کارگیری این روند، زمان لازم برای محاسبات به شدت کاهش می‌یابد. در این روش نیاز به حل مساله مقادیر ویژه به ازای همه فرکانس‌ها نمی‌باشد و تنها به ازای یک فرکانس مساله مقادیر ویژه حل شده و بدین ترتیب مدت زمان تحلیل کاهش می‌یابد.

۲- روش تحلیل

روند تحلیل استفاده شده در این مقاله بر مبنای روش المان محدود- المان نیمه بینهایت (FE-FE-HE) بوده که قابل استفاده برای سیستم سد بتنی وزنی- مخزن در حالت کلی است.

برای ساده‌تر شدن، معادلات برای دو حالت کلی سد و مخزن، مطرح خواهد شد. در آغاز روابط مربوط به سد و مخزن محدود، مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه با اضافه کردن المان نیمه بینهایت، تاثیر بخش دور مخزن در روابط، برای حالت کلی تر بحث شده است.

۲-۱- تحلیل سیستم سد بتنی با مخزن محدود

در این حالت، کل سیستم به روش المان محدود مدل سازی و حل می‌گردد.

سازه سد با کمک المان‌های محدود جامد صفحه ای (دو بعدی) جزء بندی شده و با به کارگیری روش اجزاء محدود معادلات دینامیکی حاکم بر سد به صورت رابطه (۱) بدست می‌آید [۸]:

$$M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr = -MJa_g + F \quad (1)$$

M ، C و K به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی، بردار تغییر مکان نسبی گرهی و F بردار نیروهای هیدرودینامیک است. همچنین a_g و J بردار مولفه‌های شتاب زمین و ماتریس مربوط به ایجاد حرکات صلب زمین در راستای افق و قائم هستند.

سیال مخزن، محیطی همگن، ایزوتروپ، غیر ویسکوز، غیر چرخشی و تراکم پذیر در نظر گرفته می‌شود. از طرفی با توجه به اینکه مدول ارتجاعی حجمی آب عدد بزرگی است و تغییرات جرم حجمی آن تحت فشارهای هیدرودینامیکی متعارفی که هنگام وقوع زلزله در مخازن سدهای بزرگ به وجود می‌آید، بسیار کوچک است، لذا از اثر تغییرات زمانی و مکانی جرم حجمی سیال صرف نظر می‌گردد. با توجه به فرضیات در نظر گرفته شده، معادله دیفرانسیل حاکم بر سیال، معادله موج می‌باشد. سیال موجود در مخزن با کمک المان‌های محدود سیال صفحه ای (دو بعدی) جزء بندی شده و با به کارگیری

پاسخ سدهای بتنی به طور قابل ملاحظه ای تحت تاثیر اثرات اندرکنش با محیط اطراف خود می‌باشد. روش‌های متنوعی برای تحلیل دینامیکی سدهای بتنی وجود دارد [۱]، [۲]. با فرض صلب بودن پی، معمولاً تحلیل سیستم سد و مخزن در محدوده فرکانس، بر اساس روش المان محدود - المان نیمه بینهایت (Finite Element-Hyper Element) است [۳]. در این روش سد با کمک المان‌های جامد محدود جزء بندی شده و مخزن به دو بخش مجزای نزدیک و دور تقسیم می‌شود. بخش نزدیک مخزن، ناحیه ای محدود از آب مخزن، که در مجاورت سد است، معمولاً شکل نامنظمی داشته و با کمک المان‌های محدود سیال تقسیم بندی می‌شود. ناحیه دور مخزن، که عملاً فرض می‌شود که تا بینهایت امتداد دارد [۳]، [۴]. اثر این بخش نامحدود را می‌توان با در نظر گرفتن شرط مرزی که جاذب امواج انرژی باشد، مدل کرد که در روابط ارائه شده در محدوده فرکانس، از شرط مرزی سامرفیلد (Sommerfeld) که یک شرط تقریبی است و جذب امواج قائم به مرز را مدل می‌کند، استفاده می‌گردد [۵]. اما از آنجایی که این شرط مرزی دقت کافی را برای مدلسازی قسمت نیمه بینهایت مخزن ندارد، استفاده از روش دقیق‌تری توسعه یافت. در این حالت، ناحیه دور مخزن با بهره گیری از المان نیمه بینهایت سیال با ارتفاع ثابت که تا بینهایت ادامه می‌یابد، مدل می‌گردد. با بکارگیری این المان می‌توان به تحلیل دینامیکی دقیق سدهای بتنی وزنی دست یافت.

معادلات حاکم بر سیستم در محدوده فرکانس، به روش مستقیم [۳] یا زیر سازه [۶]، [۷] حل می‌گردند. با انتخاب هر یک از روش‌های نامبرده مشاهده می‌شود سهم عمده از زمان سپری شده در محاسبات عددی، ناشی از حل مساله مقادیر ویژه مختلط مرتبط با المان نیمه بینهایت سیال است. جهت محاسبه ماتریس امپدانس مربوط به المان نیمه بینهایت سیال، باید این مساله مقادیر ویژه مختلط به ازای هر فرکانس حل گردد.

محققین پیشین از روش‌های مختلفی برای بهینه کردن زمان در حل مساله مقادیر ویژه مختلط برای محاسبه ترم‌های هیدرودینامیکی بهره گرفتند [۸]، [۹]. در مطالعه قبلی یک روش بهینه جهت محاسبه ماتریس امپدانس المان نیمه بینهایت سیال سه بعدی در تحلیل دینامیکی سدهای بتنی قوسی ارائه شد [۱۰]. این مقاله نیز به معرفی یک روند بهینه جهت محاسبه ماتریس امپدانس مربوط به المان نیمه بینهایت سیال دو بعدی

روش تغییرات، معادله حاکم بر سیال، به صورت رابطه (۲) بدست می‌آید:

$$\mathbf{G}\ddot{\mathbf{P}} + \mathbf{H}\mathbf{P} = \mathbf{R} \quad (2)$$

\mathbf{G} ، \mathbf{H} و \mathbf{R} ماتریس‌های اسمبل شده در محدوده سیال هستند و \mathbf{P} بردار فشار گرهی می‌باشد.

معادلات وابسته مربوط به کل سیستم سد- مخزن در این حالت به صورت رابطه (۳) نوشته می‌شود [۴]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{B}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}_g \\ -\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{a}_g \end{bmatrix} \quad (3)$$

\mathbf{L} در رابطه (۳)، ماتریس اسمبل شده مربوط به سیال است، و \mathbf{B} ماتریس مربوط به سطوح مشترک بین سیال و جامد است. برای تحلیل در محدوده فرکانس، شتاب زمین هارمونیک و به صورت $a_g(t) = a_g(\omega)e^{i\omega t}$ با فرکانس ω در نظر گرفته می‌شود. در این صورت مقادیر تغییر مکان و فشار نیز رفتاری هارمونیک خواهد داشت. بدین ترتیب معادله (۳) به صورت رابطه (۴) نوشته می‌شود:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}(1 + 2\beta_d i) & -\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{B} & \omega^2(-\omega^2 \mathbf{G} + i\omega \mathbf{L} + \mathbf{H}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}_g \\ -\omega^2 \mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{a}_g \end{bmatrix} \quad (4)$$

در این رابطه ماتریس میرایی سد از نوع هیسترتیک فرض شده است. به عبارت دیگر:

$$\mathbf{C} = \frac{2\beta_d}{\omega} \mathbf{K} \quad (5)$$

در رابطه (۵) β_d مقدار میرایی ثابتی است که برای تمام مدهای ارتعاشی بدنه سد لحاظ می‌شود. رابطه (۴)، معادله درگیر سد و مخزن محدود در محدوده فرکانس می‌باشد. لازم به ذکر است، این رابطه با ضرب سری معادلات پائین در ضرب ω^{-2} متقارن شده است. معادله (۵)، باید به ازای هر فرکانس حل گردد.

۲-۲- شرایط مرزی مربوط به مخزن محدود

در بررسی شرایط مرزی برای مخزن محدود (به جز در روی سطح آب که فشار صفر است) بر المان‌های سیال مجاور سد، سه شرط مرزی تحمیل می‌گردد [۴]. شرط مرزی نوع اول در هنگام تماس سیال با المان‌های جامد انعطاف‌پذیر (*Flexible solid*)، نظیر تماس سیال با بدنه سد و یا حتی تماس سیال با

سنگ پی، زمانی که اندرکنش مخزن و سنگ پی دقیق (*rigorous*) مدل شود، به کار می‌رود. شرط مرزی دوم که یک شرط مرزی تقریبی است، در سطح مشترک آب مخزن و سنگ پی هنگامی که اندرکنش مخزن و سنگ پی بصورت تقریبی مدل شود، اعمال می‌گردد [۱۱]. شرط مرزی نوع سوم که به شرط سامرفیلد مشهور است (*Sommerfeld*) به مرز بالا دست مخزن مربوط می‌شود. این شرط، یک شرط تقریبی است و جذب امواج قائم به مرز را مدل می‌کند [۵]. در واقع این شرط مرزی بیانگر این می‌باشد که در مرز بالادست مخزن یک گروه مستهلک کننده امواج فشاری قرار داده شده است و این شرط جهت مدل کردن تاثیر بینهایت بودن مخزن به صورت تقریبی به کار برده می‌شود و در حالتی که از المان نیمه بینهایت سیال در مدل کردن این مرز استفاده شود، نیازی به این شرط نبوده و امواج به صورت دقیق از طریق المان نیمه بینهایت جذب می‌شوند.

۲-۳- المان نیمه بینهایت سیال

همان طور که گفته شد از المان نیمه بینهایت سیال دو بعدی برای مدلسازی ناحیه دور مخزن استفاده می‌شود. این محدوده از سیال به صورت محدوده ای با ارتفاع ثابت آب که تا بینهایت از بالادست مخزن (در جهت منفی محور x) امتداد می‌یابد، مفروض است. اگر چه این المان، یک المان دوبعدی است، لکن تقسیم بندی آن تنها در جهت قائم، بر روی خط مرجع ($x=0$) انجام می‌پذیرد.

بنابراین، این المان شامل زیر لایه‌های (*Sub-layer*) دو بعدی است، که تا بینهایت ادامه می‌یابند. تمام گره‌های مربوط به المان نیمه بینهایت سیال در خط مرجع قرار گرفته اند. فرمولاسیون مربوط به این لایه‌ها در ادامه ارائه می‌شود.

با فرض اینکه سیال مخزن سیالی غیر چسبنده، تراکم پذیر و غیر چرخشی باشد معادله حاکم بر ناحیه آب مخزن، معادله موج است که در محدوده فرکانس و تحت شتاب هارمونیک به فرم معادله هلمهولتز (*Helmholtz equation*) و یا معادله کاهش یافته موج (*Reduced wave equation*) طبق رابطه (۶) بیان می‌گردد.

$$\nabla^2 P + \frac{\omega^2}{c^2} P = 0 \quad (6)$$

در رابطه (۶)، P دامنه فشار هیدرودینامیک (علاوه بر فشار هیدرواستاتیکی) و c سرعت موج فشاری در سیال است.

با بهره گیری از روش جداسازی متغیرها، معادله هلمهولتز به دو معادله دیفرانسیل مستقل از هم تبدیل می‌گردد که با

با قرار دادن رابطه (۱۴) در سطر اول بردار \mathbf{R} ، این بردار به صورت مختلط (*complex*) تبدیل می‌شود در حالی که ماتریس‌های \mathbf{A} و \mathbf{C} مختلط نیستند. با انتقال قسمت موهومی (*imaginary*) این بردار به طرف چپ معادله (۱۱) رابطه (۱۵) حاصل می‌گردد.

$$[-\lambda^2 \mathbf{A} + \bar{\mathbf{C}}] \mathbf{P} = \bar{\mathbf{R}} \quad (15)$$

در رابطه (۱۵) بردار $\bar{\mathbf{R}}$ قسمت حقیقی بردار \mathbf{R} و $\bar{\mathbf{C}}$ ماتریسی مختلط بوده که از اضافه کردن ترم $i\omega q$ به آرایه قطری اول ماتریس \mathbf{C} ایجاد می‌شود. معادله بالا یک جواب عمومی و یک جواب خصوصی دارد. جواب عمومی معادله، که یک مساله مقدار ویژه (*eigenvalue problem*) خطی است، از معادله (۱۶) بدست می‌آید:

$$[-\lambda_j^2 \mathbf{A} + \bar{\mathbf{C}}] \mathbf{X}_j = \mathbf{0} \quad (16)$$

مساله فوق باید به ازای هر فرکانسی که پاسخ سیستم در آن مد نظر است، حل شود و مقادیر ویژه λ_j و بردارهای ویژه \mathbf{X}_j محاسبه گردد.

برای هر λ_j ، مطابق با رابطه (۸) یک k_j به دست می‌آید. می‌توان ماتریس‌هایی تعریف کرد که این مقادیر را در خود جای دهند:

$$\mathbf{X}_h = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n] \quad (17-f)$$

$$\mathbf{K}_h = \text{Diag}[k_1, k_2, \dots, k_n] \quad (17-b)$$

جواب خصوصی معادله (۱۵) از رابطه (۱۸) به دست می‌آید و با \mathbf{P}_p^y نمایش داده می‌شود.

$$[-\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{A} + \bar{\mathbf{C}}] \mathbf{P}_p^y = \bar{\mathbf{R}}_p \quad (18)$$

باید توجه داشت که جواب خصوصی معادله، پاسخ به تحریک قائم یکنواخت است. این جواب تابع x نبوده و در نتیجه $k=0$ و $\lambda^2 = \omega^2 \tau c$ در نظر گرفته می‌شود. در رابطه (۱۸)، اولین عضو سطر ماتریس $\bar{\mathbf{R}}_p$ با توجه به واحد بودن شتاب قائم، و براساس رابطه (۱۴)، مقداری غیر صفر و برابر با $-\rho$ داشته و سایر مقادیر این ماتریس صفر است.

جواب کلی معادله (۱۵) که از ترکیب جواب عمومی و خصوصی حاصل می‌شود، به صورت رابطه (۱۹) بیان می‌گردد:

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^n \gamma_j \mathbf{X}_j e^{k_j x} + \mathbf{P}_p^y a_g^y(\omega) \quad (19)$$

در رابطه (۱۹)، γ_j ضریب مشارکت در مد j ام است. علت

توجه به ارضای شرط تشعشع (*Radiation condition*) یکی از معادلات به فرم e^{kx} (راستای x مربوط به امتداد مخزن است) و معادله دیگر مستقل از x و طبق رابطه (۷) خواهد بود [۱۲]:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \lambda^2 P(y) = 0 \quad (7)$$

که λ^2 در آن به صورت (۸) تعریف می‌شود:

$$\lambda^2 = k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \quad (8)$$

با کمک روش‌های تغییراتی (*Variational Methods*)، به حل عددی معادله دیفرانسیل (۷) اقدام نموده و با بکارگیری روش المان محدود می‌توان به رابطه (۹) به ازای هر لایه دست یافت [۱۳]:

$$[-\lambda^2 \mathbf{A}^e + \mathbf{C}^e] \mathbf{P}^e = \mathbf{R}^e \quad (9)$$

\mathbf{P}^e بردار فشار گرهی در هر لایه می‌باشد و ماتریس‌های \mathbf{A}^e ، \mathbf{C}^e و بردار \mathbf{R}^e به صورت روابط (۱۰) معرفی می‌شوند:

$$\mathbf{A}^e = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+1}} \mathbf{N} \mathbf{N}^T dy \quad (10-a)$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{y_{i-1}}^{y_{i+1}} \mathbf{N}_y \mathbf{N}_y^T dy \quad (10-b)$$

$$\mathbf{R}^e = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y_{i-1}} & 0 & \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y_{i+1}} \end{array} \right]^T \quad (10-c)$$

با ترکیب کردن ماتریس‌های فوق برای هر یک از لایه‌ها می‌توان به رابطه کلی (۱۱) برای کل المان نیمه بینهایت رسید:

$$[-\lambda^2 \mathbf{A} + \mathbf{C}] \mathbf{P} = \mathbf{R} \quad (11)$$

که بردار \mathbf{R} به صورت (۱۲) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y=0} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{y=H} \end{array} \right]^T \quad (12)$$

با صرف نظر کردن از امواج سطحی، فشار در سطح آب، برابر صفر ($P=0$) خواهد بود، بدین ترتیب می‌توان درجه آزادی آخر مرتبط با (۱۲) را حذف کرد. شرط مرزی کف مخزن نیز به فرم تقریبی رابطه (۱۳) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = -\rho a_g^n(\omega) - i\omega q P \quad (13)$$

که در رابطه (۱۳) n در خلاف جهت محور y بوده بنابراین رابطه (۱۳) به صورت رابطه (۱۴) زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a_g^y(\omega) + i\omega q P \quad (14)$$

معادل با انتگرال شتاب عمودی به طرف داخل المان نیمه بینهایت (شتاب افقی در راستای منفی x) می‌باشد و این بردار کمیت‌هایی مشابه جملات بردار سمت راست المان‌های محدود سیال را در بر می‌گیرد [۱۲].

۲-۴- ترکیب معادلات سد و مخزن نامحدود

پیش از این در قسمت (۲-۱) معادلات سد با مخزن محدود بررسی گردید. هنگامی که مخزن نامحدود است، از المان نیمه بینهایت برای مدل کردن قسمت یکنواخت مخزن که تا بینهایت ادامه می‌یابد استفاده می‌شود. اگر ماتریس‌های المان نیمه بینهایت سیال به معادله (۴) اضافه شوند، رابطه (۲۸) بدست می‌آید [۱۲]:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}(1 + 2\beta_d i) & -\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{B} & \omega^{-2} ((-\omega^2 \mathbf{G} + i\omega \mathbf{L} + \mathbf{H}) + \bar{\mathbf{H}}_h(\omega)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{a}_g \\ \omega^{-2} (-\mathbf{B}\mathbf{J}\mathbf{a}_g + \bar{\mathbf{R}}_p(\omega)\mathbf{a}_g) \end{bmatrix} \quad (28)$$

در معادله (۲۸)، $\bar{\mathbf{H}}_h(\omega)$ و $\bar{\mathbf{R}}_p(\omega)$ به ترتیب شکل‌های گسترش یافته $\mathbf{H}_h(\omega)$ و $\mathbf{R}_p(\omega)$ هستند که شامل تمام درجات آزادی فشار تعریف شده در محدوده آب مخزن می‌باشند. اگر فرض کنیم تمام درجات آزادی فشار مربوط به المان نیمه بینهایت سیال ابتدا شماره گذاری شود، این ماتریس‌ها به صورت روابط (۲۹) بیان می‌گردند:

$$\bar{\mathbf{H}}_h(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_h(\omega) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (29\text{-الف})$$

$$\bar{\mathbf{R}}_p(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_p(\omega) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (29\text{-ب})$$

هنگامی که مخزن تا بینهایت ادامه دارد، به جای رابطه (۴) از رابطه (۲۸) استفاده می‌گردد که روش حل بصورت مستقیم و در محدوده فرکانس می‌باشد.

۲-۵- المان نیمه بینهایت بهینه سیال

این المان از پایه به همان روش المان نیمه بینهایت معمولی فرمول بندی می‌شود. گرچه ماتریس \mathbf{H}_h بر اساس روشی بهینه محاسبه خواهد شد. طبق رابطه (۲۷-ب) محاسبه ماتریس \mathbf{H}_h بسیار زمان بر بوده و سنگینی آن ناشی از ماتریس‌های $\mathbf{X}_h(\omega)$ و $\mathbf{K}_h(\omega)$ ، که هر دو وابسته فرکانسی می‌باشند، است. این ماتریس‌ها با حل مساله مقادیر ویژه ذکر شده در رابطه (۱۶) بدست می‌آیند که به صورت (۳۰) بازنویسی می‌شوند:

$$\bar{\mathbf{C}}\mathbf{X}_j = \lambda_j^2 \mathbf{A}\mathbf{X}_j \quad (30)$$

وجود $a_g^y(\omega)$ در رابطه یاد شده، استفاده از مقدار شتاب عمودی واحد در حل جواب خصوصی است. در خط مرجع المان نیمه بی نهایت ($x=0$) که با h نمایش داده می‌شود، فشار را می‌توان به صورت رابطه (۲۰) به دست آورد:

$$\mathbf{P}_h = \sum_{j=1}^n \gamma_j \mathbf{X}_j + \mathbf{P}_p a_g^y(\omega) \quad (20)$$

که به فرم ماتریسی (۲۱) بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{P}_h = \mathbf{X}_h \boldsymbol{\Gamma} + \mathbf{P}_p a_g(\omega) \quad (21)$$

در رابطه (۲۱) از تعاریف ماتریسی (۲۲) استفاده شده است:

$$\boldsymbol{\Gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n]^T \quad (22\text{-الف})$$

$$\mathbf{P}_p = [0 \quad \mathbf{P}_p^y] \quad (22\text{-ب})$$

لازم به ذکر است که شتاب در هر امتداد دلخواه مانند x مشتق نسبی فشار در امتداد مورد نظر ($\partial P / \partial x = -\rho \dot{u}_x$)، مرتبط است. بنابراین، بردار شتاب در امتداد x برای هر خط اختیاری موازی با خط مرجع به صورت رابطه (۲۳) تعریف می‌شود:

$$\ddot{\mathbf{U}} = -\frac{1}{\rho} \sum_{j=1}^n \gamma_j k_j \mathbf{X}_j e^{k_j x} \quad (23)$$

برای خط مرجع، این بردار به صورت رابطه (۲۴) خواهد بود:

$$\ddot{\mathbf{U}}_h = -\frac{1}{\rho} \mathbf{X}_h \mathbf{K}_h \boldsymbol{\Gamma} \quad (24)$$

اگر بردار سهم مدها، با استفاده از تعامد آنها، از رابطه (۲۱) به دست آید و در رابطه (۲۴) جایگزین گردد، معادله (۲۵) بدست می‌آید:

$$\ddot{\mathbf{U}}_h = \frac{1}{\rho} \mathbf{X}_h \mathbf{K}_h \mathbf{X}_h^T \mathbf{A} (\mathbf{P}_h - \mathbf{P}_p a_g(\omega)) \quad (25)$$

با ضرب کردن دو طرف رابطه (۲۵) در \mathbf{A} ، معادله (۲۶) حاصل می‌شود:

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{H}_h \mathbf{P}_h - \mathbf{R}_p a_g(\omega) \quad (26)$$

که از تعاریف روابط (۲۷) در بدست آوردن (۲۶) استفاده شده است:

$$\mathbf{R}_h = -\mathbf{A} \ddot{\mathbf{U}}_h \quad (27\text{-الف})$$

$$\mathbf{H}_h = \frac{1}{\rho} \mathbf{A} \mathbf{X}_h \mathbf{K}_h \mathbf{X}_h^T \mathbf{A} \quad (27\text{-ب})$$

$$\mathbf{R}_p = \mathbf{H}_h \mathbf{P}_p \quad (27\text{-ج})$$

که \mathbf{R}_h در رابطه (۲۷) بیانگر بردار سازگار (*consistent*)

ماتریس \bar{C} را می‌توان به صورت حاصل جمع ماتریس‌های حقیقی C و L_h به صورت (۳۱) نوشت:

$$\bar{C} = C + i\omega q L_h \quad (31)$$

که L_h ماتریسی قطری به ابعاد ماتریس C بوده و مقدار اولین آرایه قطری آن برابر با یک و سایر اعضا صفر می‌باشند.

$$L_h(i, j) = 0 \quad (i, j \neq 1) \\ L_h(1, 1) = 1 \quad (32)$$

بدین ترتیب (۳۰) به صورت رابطه (۳۳) در می‌آید:

$$[C + i\omega q L_h] X_j = \lambda_j^2 A X_j \quad (33)$$

با توجه به مختلط بودن \bar{C} ، نیاز به حل مساله مقادیر ویژه مختلط در رابطه (۳۳) ضروری است، به جز حالتی که در آن ضریب استهلاک یا q برابر با صفر است. با فرض حالت عمومی‌تر ($q \neq 0$)، مجدداً رابطه (۳۳) را برای حالت یکتای $\omega = 0$ ساده کرده و به فرم رابطه (۳۴) نمایش می‌دهیم:

$$C \bar{X}_j = \lambda_j^2 A \bar{X}_j \quad (34)$$

از آن جایی که در رابطه (۳۴) ماتریس C حقیقی است با حل مساله مقادیر ویژه استاندارد (۳۴)، ماتریس‌های (۲۵-الف) و (۲۵-ب) حاصل می‌شوند:

$$\bar{X}_h = [\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n] \quad (25-الف)$$

$$\bar{\Lambda} = \text{Diag}(\bar{\lambda}_j^2) \quad (25-ب)$$

که \bar{X}_h و $\bar{\Lambda}$ به ترتیب، بردارها و مقادیر ویژه برای حالت خاص $\omega = 0$ را در خود جای می‌دهند. رابطه تعامد در این حالت به صورت (۳۶) است:

$$\bar{X}_h^T A \bar{X}_h = I \quad (26-الف)$$

$$\bar{X}_h^T C \bar{X}_h = \bar{\Lambda} \quad (26-ب)$$

به طور مشابه در حالت کلی رابطه تعامد به صورت (۲۷-الف) و (۲۷-ب) نوشته می‌شود:

$$X_h^T A X_h = I \quad (27-الف)$$

$$X_h^T (C + i\omega q L_h) X_h = \Lambda \quad (27-ب)$$

که در آن X_h و Λ به صورت (۲۸-الف) و (۲۸-ب) تعریف می‌شوند:

$$X_h = [X_1, X_2, \dots, X_n] \quad (28-الف)$$

$$\Lambda = \text{Diag}(\lambda_j^2) \quad (28-ب)$$

با مقایسه رابطه (۳۶) با رابطه (۳۷)، اگر حاصل رابطه (۳۹) یک ماتریس قطری شود، به راحتی می‌توان گفت که $X_h(\omega)$ مستقل از فرکانس و برابر با \bar{X}_h است:

$$\bar{X}_h^T (C + i\omega q L_h) \bar{X}_h = [\cdot \cdot \cdot] \quad (39)$$

در ادامه به بررسی امکان پذیری رابطه (۳۹) پرداخته می‌شود. با به کارگیری رابطه (۲۶-ب)، رابطه (۳۹) به صورت (۴۰) در می‌آید:

$$\bar{X}_h^T (C + i\omega q L_h) \bar{X}_h = \bar{\Lambda} + i\omega q L^* \quad (40)$$

در رابطه (۴۰) $\bar{\Lambda}$ یک ماتریس قطری است در صورتی که برای L^* (بر اساس رابطه $L^* = \bar{X}_h^T L_h X_h$) عموماً اینگونه نیست. بنابراین به تعریف ماتریس قطری L_D^* می‌پردازیم:

$$L_D^* = \text{Diagonal}[L^*] \quad (41)$$

بدین ترتیب با استفاده از ماتریس قطری L_D^* ، رابطه (۳۹) برقرار است. بعبارتی با جایگزین کردن \hat{L}_h به جای L_h ، رابطه‌ای به شکل (۴۲) برقرار خواهد شد:

$$\bar{X}_h^T (C + i\omega q \hat{L}_h) \bar{X}_h = \bar{\Lambda} + i\omega q L_D^* \quad (42)$$

جهت برقراری علامت تساوی در عبارت (۴۲)، باید رابطه (۴۳) برقرار باشد:

$$\bar{X}_h^T \hat{L}_h \bar{X}_h = L_D^* \quad (43)$$

گرچه نیازی به محاسبه صریح ماتریس \hat{L}_h نیست، با این وجود با به کار بردن رابطه (۲۶-الف) در (۴۳) می‌توان \hat{L}_h را محاسبه کرد.

$$\hat{L}_h = A \bar{X}_h L_D^* \bar{X}_h^T A \quad (44)$$

بنابراین می‌توان ادعا کرد که \bar{X}_j ، Z امین بردار ویژه از مسأله مقدار ویژه مختلط (۴۵) است:

$$[C + i\omega q \hat{L}_h] \bar{X}_j = \lambda_j^2 A \bar{X}_j \quad (45)$$

رابطه فوق مشابه رابطه (۳۳) می‌باشد، فقط L_h به فرم تقریبی، \hat{L}_h تبدیل شده است. رابطه تعامد برای رابطه (۴۵) به صورت روابط (۴۶) است:

$$\bar{X}_h^T A \bar{X}_h = I \quad (46-الف)$$

$$\bar{X}_h^T [C + i\omega q \hat{L}_h] \bar{X}_h = \Lambda \quad (46-ب)$$

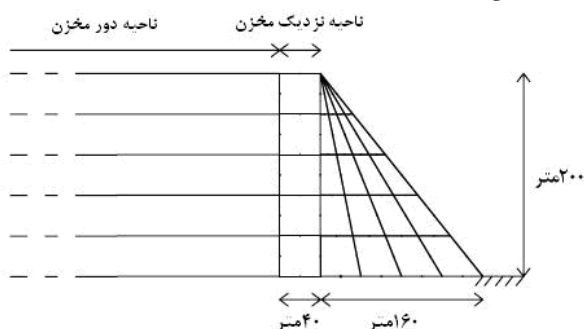
با مقایسه رابطه (۴۲) با (۴۶-ب) رابطه (۴۷) بدست می‌آید:

$$\Lambda = \bar{\Lambda} + i\omega q L_D^* \quad (47)$$

رابطه (۴۷) را به صورت (۴۸) نیز می‌توان نوشت:

متر، عرض کف آن ۱۶۰ متر فرض شده است.

همان طور که پیشتر اشاره شد، برای مخزن سد دو قسمت کلی در نظر گرفته می‌شود، بخش اول، ناحیه نزدیک مخزن بوده که نزدیک بدنه سد است و در حالت کلی دارای هندسه نامنظم می‌باشد، در طول مشخص L از تاج سد، امتداد یافته است. در این حالت مخزن محدود به کمک المان‌های سیال صفحه‌ای هشت گرهی تقسیم بندی می‌شود. نسبت طول قسمت محدود به ارتفاع سد یا حداکثر عمق آب در مخزن، با L/H نشان داده می‌شود.



شکل (۱): المان بندی سد مثلثی، مخزن محدود و المان نیمه بینهایت

بخش دوم، ناحیه دور مخزن است که از فاصله L از تاج سد شروع و تا بینهایت از بالادست ادامه دارد. این بخش از مخزن نیز با المان نیمه بینهایت دو بعدی با زیر لایه‌های سه گرهی مدل می‌شود. سازه سد به همراه دو بخش گفته شده از مخزن در شکل (۱) نشان داده شده است. در این شکل نسبت طول قسمت محدود مخزن به ارتفاع سد برابر با $0/2$ می‌باشد. در کلیه تحلیل‌ها، سنگ پی صلب در نظر گرفته شده است. لکن یک شرط مرزی ویژه به مرز کف مخزن اعمال شده که باعث جذب امواج فشاری برخورد کننده به آن مرز می‌شود. میزان جذب امواج این مرز به پارامتر کنترل کننده α بستگی دارد. با اعمال این شرط مرزی، اندرکنش تقریبی پی و مخزن همچنین اثرات جذب امواج فشاری توسط رسوبات کف مخزن را می‌توان در نظر گرفت. در این مطالعه مقدار α نیز متغیر است.

۳-۲- پارامترهای اصلی

بتن بدنه سد به صورت همگن، ایزوتروپ، با خاصیت ویسکوالاستیک خطی است. رفتار المان‌های بدنه سد به صورت تنش مسطحه در نظر گرفته شده و ضخامت آن‌ها برابر با واحد فرض گردیده است. مشخصات بتن مربوط به بدنه سد به صورت زیر است:

$27/5 \text{ GPa}$

مدول الاستیسیته E

$0/2$

نسبت پواسون ν

$$\lambda_j^2 = \bar{\lambda}_j^2 + i\omega q L_{Dj}^* \quad (48)$$

بنابر این عدد موج k_j با به کار بردن رابطه (۴۸) در (۸) طبق رابطه (۴۹) بدست می‌آید:

$$k_j = \sqrt{\bar{\lambda}_j^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + i\omega q L_{Dj}^*} \quad (49)$$

با تعاریف ذکر شده و استفاده از فرآیندی مشابه آنچه در روش کلی برای رسیدن به رابطه (۲۷-ب) استفاده شد، رابطه (۵۰) بدست می‌آید:

$$\mathbf{H}_h(\omega) = \frac{1}{\rho} \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}}_h \mathbf{K}_h(\omega) \bar{\mathbf{X}}_h^T \mathbf{A} \quad (50)$$

در رابطه (۵۰) $\bar{\mathbf{X}}_h$ مستقل از فرکانس بوده و برای حالت $\omega = 0$ محاسبه شده است. تنها ماتریس وابسته به فرکانس \mathbf{K}_h می‌باشد که یک ماتریس قطری است و اعضای آن به راحتی بر اساس رابطه (۴۹) برای فرکانس ω بدست می‌آیند. بدین ترتیب ماتریس $\mathbf{H}_h(\omega)$ بطرز چشمگیری ساده شده به گونه ای که در این روند نیاز به حل مسأله مقدار ویژه مختلط برای هر فرکانس نبوده و با حل مسأله مقدار ویژه استاندارد برای فرکانس معلوم $\omega = 0$ ، ماتریس $\mathbf{H}_h(\omega)$ ، محاسبه می‌شود.

۳- مدل‌های تحلیل شده و پارامترهای اصلی

بر اساس روابط ارائه شده در قسمت‌های پیش یک برنامه کامپیوتری نوشته شده است. این برنامه مقطعی از سد بتنی وزنی را در حالت کرنش مسطحه و یا تنش مسطحه مدل می‌کند. برنامه قادر به مدلسازی المان‌های ایزوپارامتریک چهار و هشت گرهی جامد صفحه ای، المان‌های چهار و هشت گرهی سیال و المان نیمه بینهایت سیال با زیر لایه‌های دو گرهی و سه گرهی می‌باشد. همه نتایج ارائه شده در این مقاله از این برنامه بدست آمده است.

برنامه ذکر شده براساس روش المان محدود- المان نیمه بینهایت است.

برنامه ابتدا با کمک روش دقیق، ماتریس امپدانس المان نیمه بینهایت را بدست آورده سپس این ماتریس براساس روش بهینه معرفی شده در این مقاله و در مدت زمان کمتر، محاسبه می‌شود. نتایج بدست آمده در هر بخش با هم مقایسه و دقت روش بهینه مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۳-۱- مدل‌های تحلیل شده

یک سد ایده ال مثلثی با وجه بالادست قائم و شیب پائین دست $1/8 : 0/8$ در نظر گرفته شده و با المان‌های جامد صفحه ای هشت گرهی گسسته سازی گردیده است. ارتفاع این سد ۲۰۰

وزن مخصوص

$$24/8 \text{ kN} / m^3$$

ضریب میرایی هیسترتیک

$$0/05$$

آب مخزن به صورت سیال غیر ویسکوز و غیر چرخشی و تراکم پذیر، با وزن واحد حجم برابر $9/81 \text{ kN} / m^3$ و سرعت موج فشاری $1440 \text{ m} / s$ فرض گردیده است.

۴- نتایج

در این بخش با توجه به تئوری‌های ارائه شده در بخش‌های قبل اقدام به آنالیز مدل سد و مخزن کرده و نتایج آن برای حالت‌های مختلف بدست آورده می‌شود.

پاسخ تاج سد (بالا ترین گره موجود در مدل سد شکل (۱)) ناشی از تحریک‌های افقی و قائم برای مقادیر متفاوتی از ضریب بازتاب موج α ، و نسبت‌های L/H بدست آمده است. در هر یک از حالات یاد شده نمودار مربوط به مقدار پاسخ (شتاب) افقی در تاج سد به ازای مقادیر مختلف فرکانس تحریک که به صورت شتاب یا تغییر مکان با دامنه واحد در پای سد (گره‌های پایین‌ترین ردیف در شکل (۱)) اعمال می‌شود، بدست آمده است. برای درک بهتر از نتایج، نمودار مقادیر بدست آمده از پاسخ افقی سد به ازای فرکانس‌های تحریک مختلف رسم شده است. در این نمودارها محور افقی شامل مقادیر فرکانس بوده که نسبت به فرکانس طبیعی اصلی بدنه سد با مخزن خالی (ω_1) نرمال شده‌اند و محور قائم شامل مقادیر پاسخ می‌باشد.

همان طور که ذکر شد، مقادیر مختلف α مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده برای تحریک‌های افقی و قائم را در شرایط سخت و در حالتی که مقدار نسبت L/H بسیار کم و در حدود $0/2$ است در شکل‌های (۲)-(۴) ارائه می‌شود. در تمام نمودارها پاسخ افقی تاج سد در حالتی که از المان نیمه بینهایت بهینه استفاده شده در مقایسه با حالت دقیق رسم شده است. در این حالت مقدار α متغیر و به ترتیب برابر با $0/75$ ، $0/5$ و $0/0$ است. مشاهده می‌شود در حالت اول ($L/H = 0/2$ و $\alpha = 0/75$) تفاوت قابل توجهی بین مقادیر بدست آمده برای تحریک‌های افقی و قائم در حالت بهینه و حالت دقیق نیست (شکل (۲)). برای دومین حالت ($L/H = 0/2$ و $\alpha = 0/5$) اختلاف اندکی بین پاسخ‌ها به خصوص در اولین فرکانس طبیعی سیستم، ملاحظه می‌شود (شکل (۳)). در سومین حالت ($L/H = 0/2$ و $\alpha = 0/0$) اختلاف در مقادیر پاسخ برای تحریک‌های افقی و قائم قابل توجه است (شکل (۴)).

البته لازم به ذکر است که $\alpha = 0/0$ مقدار غیر کاربردی برای ضریب بازتاب امواج است، این مقدار بدین دلیل انتخاب شده که مقدار حداکثر خطای ناشی از استفاده از نتایج روش بهینه، در

ترکیب این ضریب با نسبت $L/H = 0/2$ حاصل می‌شود.

جهت داشتن درک بهتر، درصد خطای به وجود آمده در اثر استفاده از روش بهینه، محاسبه شده و در جدول (۱) ارائه شده است. در این بررسی برای محاسبه خطا در هر حالت، از دامنه پاسخ اولین فرکانس طبیعی سیستم در تحریک‌های افقی و قائم استفاده شده است. در این جدول، خطا برای مقادیر مختلف α و نسبت‌های مختلف ضریب L/H ، در تحریک‌های افقی و قائم محاسبه شده است.

طبق نتایج بدست آمده مشاهده می‌شود، در حالتی که نسبت $L/H = 0/2$ می‌باشد، حداکثر خطای محاسبه شده به ازای مقادیر مختلف ضریب بازتاب، در حدود 10% است که در حالت $\alpha = 0$ حاصل گشته و به ازای مقادیر کاربردی ضریب بازتاب ($\alpha \geq 0/5$)، روش بهینه از دقت خوبی برخوردار بوده و مقدار خطای محاسبه شده کمتر از 8% می‌باشد. با توجه به جدول (۱) به ازای $L/H \geq 1$ این مقدار خطا به کمتر از $5/1\%$ در تحریک‌های افقی و قائم، کاهش یافته است.

این بدین معناست که حتی به ازای کمترین مقدار α یعنی $\alpha = 0$ ، که مقداری غیر کاربردی است، روند بهینه منجر به جواب‌های دقیق به ازای نسبت‌های متوسط نسبت L/H خواهد شد (مشابه $L/H = 1$). علاوه بر این ضرایب $\alpha < 0/5$ مقادیر غیر کاربردی برای ضریب بازتاب امواج مربوط به کف مخزن خواهد بود و در حالت واقعی کاربرد زیادی ندارد.

دقت به این نکته در این تحلیل قابل توجه است که چنانچه یک مرز غیر جاذب برای کف مخزن در نظر گرفته شود ($\alpha = 1$)، مقدار خطا به ازای تمام نسبت‌های L/H ، برابر با صفر می‌باشد. علت این امر آن است که در این حالت ضریب استهلاك (q) برابر صفر بوده و در روابط مربوط به المان نیمه بینهایت بهینه منجر به جواب دقیق خواهد شد.

۵- نتیجه گیری

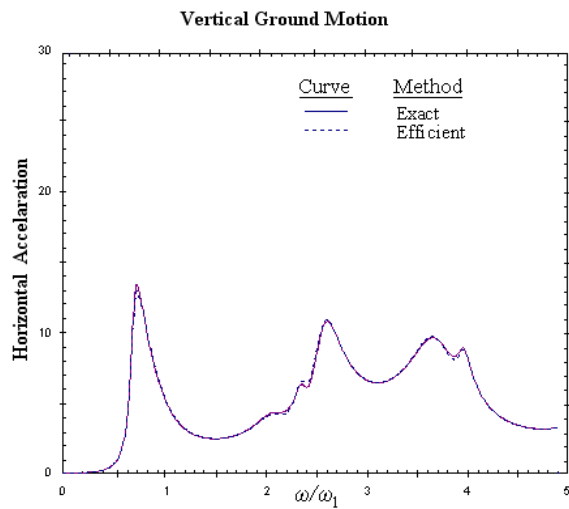
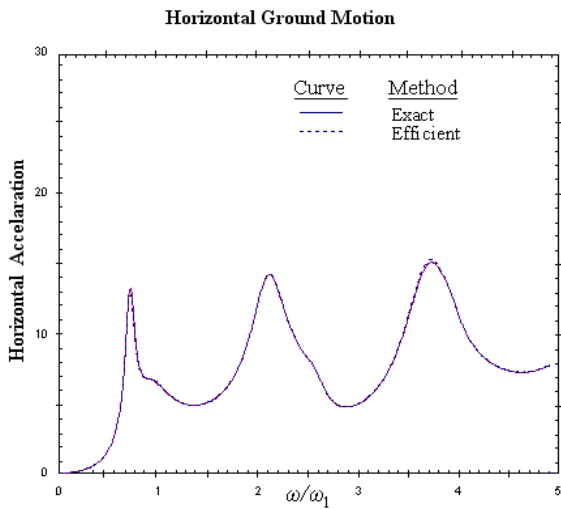
فرمولاسیون مربوط به تحلیل دینامیکی سدهای بتنی وزنی براساس روش المان محدود- المان نیمه بینهایت به طور مختصر توضیح داده شد. یک روند بهینه برای محاسبه ماتریس امپدانس المان نیمه بینهایت سیال دو بعدی پیشنهاد شد. یک برنامه کامپیوتری براساس روش نامبرده نوشته شده و پاسخ سد وزنی مثلی برای ترکیبات مختلف از مقادیر ضریب بازتاب امواج α و نسبت L/H ، برای تحریک‌های افقی و قائم بدست آمد و دقت روش بهینه در مقابل روش دقیق مورد تحقیق قرار گرفت.

در مجموع، نتایج مهم به دست آمده در اثر استفاده از المان نیمه بینهایت بهینه سیال عبارتند از:

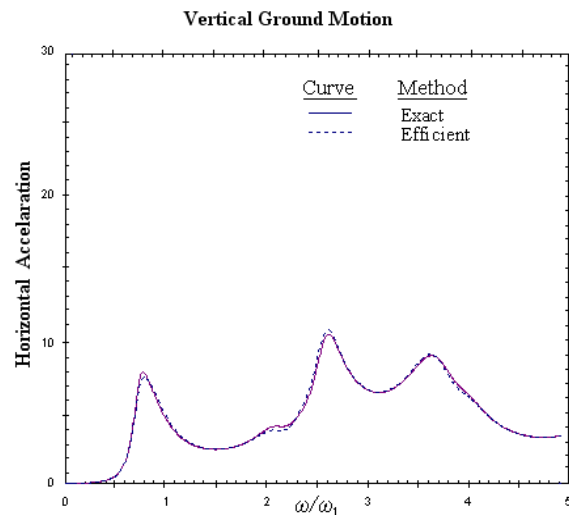
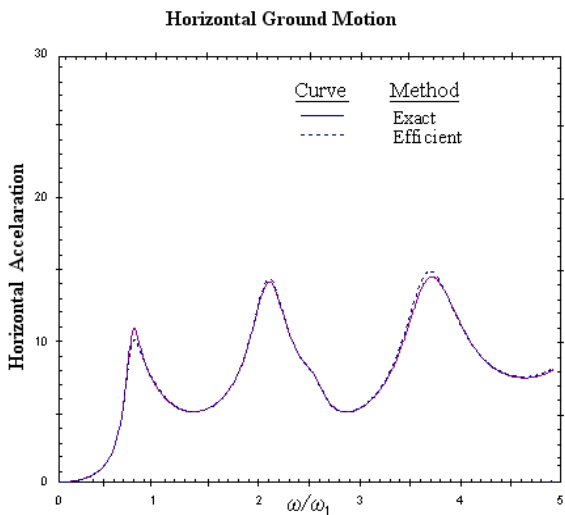


بازتاب امواج کف مخزن ($\alpha \geq 0.5$)، روند بهینه منجر به نتایج خوبی می‌گردد و مشاهده می‌شود حداکثر خطا در این حالات

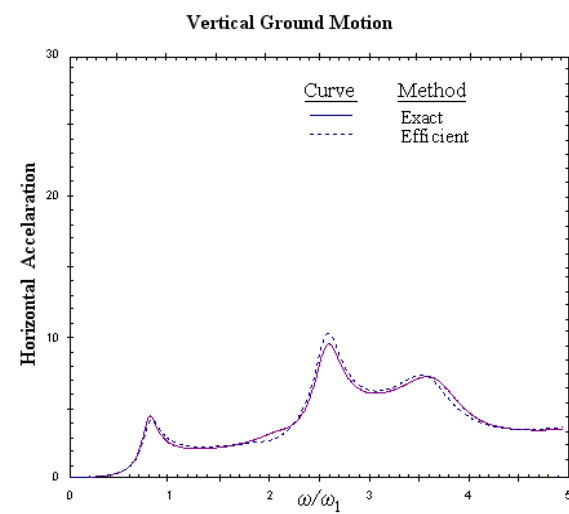
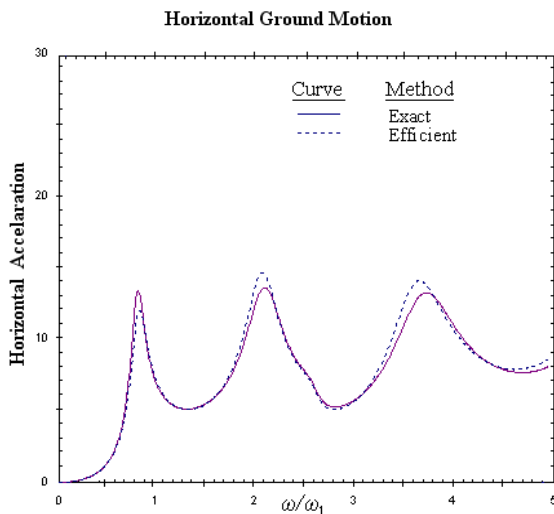
- ابتدا دقت روش بهینه را در شرایط سخت و در حالتی که مقدار نسبت L/H بسیار کم و برابر 0.2 است مورد بررسی قرار گرفت. تحت این شرایط و برای مقادیر کاربردی ضریب



شکل (۲): پاسخ تاج سد ناشی از تحریک افقی و قائم ($L/H = 0.2, \alpha = 0.75$)



شکل (۳): پاسخ تاج سد ناشی از تحریک افقی و قائم ($L/H = 0.2, \alpha = 0.5$)



شکل (۴): پاسخ تاج سد ناشی از تحریک افقی و قائم ($L/H = 0.2, \alpha = 0.0$)

جدول (۱): درصد خطای پاسخ در فرکانس طبیعی اول سیستم سد و مخزن (با استفاده از المان نیمه بینهایت بهینه)

	حرکت افقی زمین		حرکت قائم زمین	
	$L/H = 0.2$	$L/H = 1$	$L/H = 0.2$	$L/H = 1$
$\alpha = 1$	0/00	0/00	0/00	0/00
$\alpha = 0.75$	3/47	0/53	3/80	0/66
$\alpha = 0.50$	7/66	0/84	4/72	0/87
$\alpha = 0$	10/67	0/67	4/90	1/09

بهینه و دقیق قابل چشم پوشی خواهد بود و حداکثر خطا در این حالات در حدود ۱/۵٪ درصد برای تحریک‌های افقی و قائم، و نسبت $L/H = 1$ خواهد بود. این بدین معناست که حتی به ازای مقدار کوچک α یعنی $\alpha = 0$ ، که مقداری غیر کاربردی است، روند بهینه منجر به جواب‌های دقیق به ازای نسبت‌های متوسط نسبت L/H خواهد شد. ضمن اینکه، ضرایب $\alpha < 0.5$ نسبتاً مقادیر غیر کاربردی برای ضریب بازتاب امواج مربوط به کف مخزن می‌باشد و در حالت واقعی کاربرد زیادی ندارد.

– به طور کلی می‌توان نتیجه گرفت که برای تمام مقادیر کاربردی ضریب α ، روند بهینه منجر به پاسخ‌های دقیق به ازای تمام شرایط خواهد شد.

کمتر از ۸٪ است. در این بررسی با کاهش ضریب α و نزدیک شدن به ضریب $\alpha = 0$ مقدار خطا در تحریک‌های افقی و قائم بیشتر می‌شود. البته در این نسبت L/H ، تنها در حالت غیر کاربردی $\alpha = 0$ و تنها برای تحریک افقی، میزان خطا قابل توجه و در حدود ۱۰٪ می‌باشد.

– دقت به این نکته در این تحلیل قابل توجه است که چنانچه یک مرز غیر جاذب برای کف مخزن در نظر گرفته شود ($\alpha = 1$)، مقدار خطا به ازای تمام نسبت‌های L/H برابر با صفر می‌باشد و پاسخ بدست آمده در اثر استفاده از المان نیمه بینهایت بهینه دقیق و منطبق بر مقادیر روش اصلی است.

برای نسبت‌های بزرگتر L/H و در حالت $\alpha = 0$ دیده می‌شود مقدار تفاوت در بین پاسخ‌های به دست آمده از روش

۶- مراجع

- Fok, K.L.; Chopra, A.; "Earthquake Analysis and response of concrete arch dams", Report No EERC-85/07, University of California, Berkeley, US, July, 1985. [۸]
- Tajirian, F.F.; "Impedance matrices and interpolation techniques 3-D interaction analysis by the flexible volume method", Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley .CA, Sept. ,1981. [۹]
- Lotfi, V.; "An efficient three dimensional fluid hyper-element for dynamic analysis of concrete arch dam", Structural Engineering and Mechanics, vol.24, No.6, p.p.683-698, 2006. [۱۰]
- Fok, K.L.; Chopra, A.; "Earthquake Analysis of arch dams including dam- water interaction reservoir boundary absorption and foundation flexibility", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 14, p.p.155-184, 1986. [۱۱]
- Lotfi, V.; "Direct frequency domain analysis of concrete arch dams based on FE-(FE-HE)-BE technique", Journal of Computers and Concrete, vol. 1, Issue 3, p.p. 285-302, 2004. [۱۲]
- Lotfi, V.; Rosset, J.M. and J. Tassoulas; "A Technique for the analysis of the response of dams to earthquakes", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 15, p.p. 463-490, 1987. [۱۳]
- Chopra, A. K.; Chakrabarti, P. and Gupta, S.; "Earthquake response of concrete gravity dams including hydrodynamic and foundation interaction effects", Report No EERC-80/01, University of California, Berkeley, January, 1980. [۱]
- Fenves, G.; Chopra, A.K.; "Effect of reservoir bottom absorption and dam-water-foundation rock interaction on frequency response functions for concrete gravity dams", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol.13, p.p. 13-31, 1985. [۲]
- Lotfi, V.; "Frequency domain analysis of concrete gravity dams including hydrodynamic effects", Dam Engineering, vol. XII, Issue 1, p.p. 33-53, 2002. [۳]
- Lotfi, V.; "Significance of rigorous fluid-foundation interaction in dynamic analysis of concrete gravity dams", Structural Engineering and Mechanics, vol. 21, No. 2, p.p. 137-150, July. 2005. [۴]
- Sommerfeld, A.; "Partial differential equations in physics", Academic Press, NY. 1949. [۵]
- Hall, J.F.; Chopra, A.K.; "Two dimensional dynamic analysis of concrete gravity and embankment dams including hydrodynamic effects", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 10, p.p. 305-332, 1982. [۶]
- Tan, H.; Chopra, A.K.; "Earthquake Analysis of Arch Dams Including Dam-Water-Foundation Rock Interaction", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol.24, p.p. 1453-1474, 1995. [۷]