

استفاده از محاسبات فازی در مدلسازی نااطمینانی‌ها در تخمین مقادیر بر اساس روش کریجینگ، مطالعه‌ی موردی: میزان پراکندگی مکانی سدیم در آبخوان زنجان

زهره معصومی^{۱*}؛ محمد باقر منهای^۲؛ محمد سعدی مسگری^۳؛ مهدی فرنقی^۴

چکیده

روش‌های مختلفی برای تبدیل داده‌های نمونه‌برداری شده به سطح پیوسته وجود دارد که در یک تقسیم‌بندی کلی می‌توان آنها را به روش‌های کلاسیک، زمین آماری و روش‌هایی که از هوش محاسباتی بهره می‌برند، تقسیم نمود. یکی از روش‌های زمین‌آماری متداول، روش کریجینگ است که در آن تخمین بر اساس ساختار فضایی موجود در محیط موردنظر انجام می‌شود و دقت برآورد در آن، بالاتر است. بر خلاف بهبود چشمگیر دقت نسبت به سایر روشها، این روش نیز دارای معایبی است که از آنها می‌توان به حساسیت این روش به کیفیت و خطای داده‌های ورودی و پراکندگی آنها اشاره نمود. برای رفع مشکلات ناشی از نااطمینانی به داده‌های ورودی در روش کریجینگ می‌توان از محاسبات فازی استفاده نمود که در آن می‌توان نااطمینانی‌های موجود در داده‌ها را مدل کرده و از این طریق نتایج تخمین را بهتر نمود. در این تحقیق هدف، ارائه‌ی روشی برای مدل کردن نااطمینانی‌های داده‌های ورودی با استفاده از محاسبات فازی است. در این روش تمام داده‌های ورودی با توجه به خطاهای موجود در اندازه‌گیری‌ها به شکل اعداد فازی، وارد معادلات کریجینگ شده‌اند. بنابراین همه‌ی معادلات به شکل فازی حل شده‌اند. در پایان برای تست نتایج، از کریجینگ فازی برای تخمین مقدار سدیم در آبخوان زنجان استفاده شده است. نتایج نشان‌دهنده‌ی بهبود دقت تخمین در این روش نسبت به روش کریجینگ معمولی است، هر چند محاسبات با استفاده از این روش پیچیده‌تر می‌شود. همچنین در مطالعه‌ی موردی انجام شده، میزان سدیم در آب‌های زیرزمینی پیرامون نواحی صنعتی و شهرهای بزرگ آبخوان بالاتر است.

کلمات کلیدی

زمین - آمار، محاسبات فازی، کریجینگ فازی، واریوگرام فازی، آلودگی آب.

Using Fuzzy Computation in Modelling Uncertainties in Kriging Estimation Method, Case Study: Estimation of Sodium Spatial Dispersion in Zanjan Aquifer

Z. Masoomi, MB. Menhaj, M. Sadi mesgari, M. Farnaghi

ABSTRACT

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۵/۲۵

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۵

^۱ نویسنده مسئول و دانشجوی دکتری سیستم اطلاعات مکانی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی: zmasoomi@dena.kntu.ac.ir

^۲ استاد و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر: menhaj@aut.ac.ir

^۳ استادیار و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی: mesgari@kntu.ac.ir

^۴ دانشجوی دکتری سیستم اطلاعات مکانی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی: m_farnaghi@yahoo.com



Various methods have been used to create continuous surfaces from sampled data. One of the most common geostatistical methods is Kriging, which provides an accurate estimation based on existing spatial structure in the sample points. However, Kriging method is sensitive to the errors in the input data, the dispersion of the sample. The purpose of this research is to develop a new method to handle the uncertainties resulted from the input data in the Kriging method. In this approach, the existing uncertainties in the input data are modeled by fuzzy computations, and the variogram variables are calculated in fuzzy mode. To test the new hybrid method, the sodium contamination values in Zanzan aquifer are used. The results show a generally improved accuracy in comparison to the ordinary Kriging method. Consideration of all equations and values in fuzzy raises the complexity of the computation. On the other hand, the integrity problems associated other researches on fuzzy kriging are resolved.

KEYWORDS

Geostatistics, Fuzzy Computation, Fuzzy Semi-Variogram, Water Pollution.

۱- مقدمه

دارد که می‌توان به این موارد اشاره نمود: در این روش، از ارتباط مکانی نقاط معلوم و نحوه‌ی پراکندگی آن‌ها حول نقطه‌ی تخمین برای برآورد میزان کمیت در نقطه‌ی مجهول استفاده می‌شود. از طرفی تخمین‌گر کریجینگ، یک تخمین‌گر نارایب و کمترین واریانس است [۲]. در حقیقت این روش یک روش آماری است و می‌توان از واریانس تخمین برای مشخص نمودن خطای تخمین در یک نقطه‌ی خاص استفاده نمود [۲۶].

کاربرد روش کریجینگ زمانی که داده‌های اندازه‌گیری شده دارای خطا باشند، محدود می‌شود [۱۶]. برای رفع این مشکل می‌توان از محاسبات فازی استفاده نمود. که می‌توان عدم قطعیت در اطلاعات کسب شده را با بازه‌های غیر تصادفی فرمول‌بندی نمود [۹]. این عدم قطعیت یعنی فقدان یک مرز مشخص که عضویت یا عدم عضویت یک عنصر را به مجموعه تمیز دهد [۵]. در واقع داده‌های مبهم در کریجینگ فازی با استفاده از محاسبات فازی مدل می‌شوند [۲۸].

کریجینگ فازی برای اولین بار به وسیله‌ی Bardossy و همکارانش در سال ۱۹۸۹ ارائه شد [۸]. این روش تا امروز در حال پیشرفت و رفع نقص بوده است. از پژوهش‌هایی که در این زمینه و با استفاده از این روش انجام شده می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

- این روش در تخمین مقادیر هدایت الکتریکی آب در یک آبخوان در منطقه‌ی شمال غرب آلمان به کار گرفته شده است. به دلیل تغییرپذیری بالا و توزیع نامنظم اطلاعات نقطه‌ای در این منطقه، مجموعه‌ی داده‌های اصلی با استفاده از مقادیر فازی بازسازی شده و نرم‌افزاری نیز در این راستا تهیه شده است. نتایج این تحقیق نشان داد که با در نظر گرفتن مقادیر مشاهده‌ای به صورت فازی، واریانس تخمین به طور معنی‌داری کاهش می‌یابد [۸].

- در سال ۱۹۹۶، از این روش برای تخمین عمق یخ در منطقه‌ای در کشور آلمان استفاده شده است. در این پژوهش در

بررسی وضعیت آلودگی آب‌های زیرزمینی همواره اهمیت خاصی دارد زیرا بهداشت و سلامت افراد رابطه‌ی مستقیم با این مسئله دارد. به عنوان مثال در تهیه‌ی آب‌های کشاورزی باید آلودگی آب‌های زیرزمینی در نظر گرفته شود تا به سلامت محصولات کشاورزی و مصرف کنندگان آسیبی نرساند. این مساله در تهیه آب‌های شرب نیز اهمیت خاصی دارد. بنابراین لازم است میزان عناصر و مواد محلول در آب در تمام منطقه و نه فقط در نقاط نمونه‌برداری شده، مشخص شود تا به مدیران برای تصمیم‌گیری هر چه صحیح‌تر و کارآتر کمک نماید.

از آنجاکه میزان غلظت عناصر و موادی مانند سدیم، منیزیم، نیترات و غیره در نقاط معدودی از محدوده‌های مطالعاتی (آبخوان‌ها) اندازه‌گیری می‌شود، برای بررسی پراکندگی این مواد در آب‌های زیرزمینی می‌توان از روش‌های تخمین استفاده نمود. با استفاده از این روش‌ها، مقدار یک کمیت در نقاط مجهول با توجه به اندازه‌گیری‌های انجام شده از آن کمیت در نقاط معلوم، به دست می‌آید. در اندازه‌گیری پدیده‌های طبیعی و پدیده‌هایی مانند آلودگی آب اندازه‌گیری میزان المان موردنظر به وسیله‌ی نمونه‌برداری انجام می‌شود و با توجه به اینکه نمونه‌برداری از تمام نقاط یک سطح از نظر زمانی و مکانی امکان‌پذیر نیست، میزان کمیت در سایر نقاط با توجه به یک سری از مدل‌های ریاضی موجود تخمین زده می‌شود [۱۴].

روش‌های مختلفی برای تخمین مقدار یک کمیت در نقاط مجهول بر اساس نقاط معلوم وجود دارد که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به وزندهی معکوس فاصله، چندجمله‌ای‌ها و کریجینگ اشاره نمود [۲۶]. در این میان، روش کریجینگ که یک روش زمین - آماری است، نسبت به سایر روش‌ها مزایای خاصی



در پایان با توجه به وزن‌های فازی به دست آمده از معادلات، مقدار کمیت در همه‌ی نقاط مجهول محاسبه شده است. سپس با ایجاد نقشه‌های مربوطه، مکان‌های آلودگی شناسایی شده‌اند. در حقیقت در اینجا بر خلاف روش‌های قبل، با توجه به فازی بودن همه‌ی اعداد ورودی محاسبات و معادلات نیز فازی شده و برخلاف پیچیده‌تر شدن محاسبات، مشکل تلفیق و مقایسه‌ی اعداد فازی و اعداد قطعی و نیز ناهمگونی دقت، مانند آنچه در فازک وجود داشت، مطرح نیست.

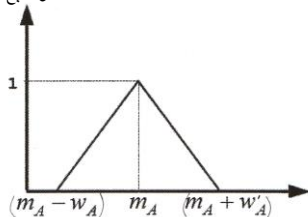
۲- مقدمه‌ای بر تئوری مجموعه‌های فازی

اصول محاسبات فازی اولین بار به وسیله‌ی لطفی‌زاده در سال ۱۹۶۵ به صورت گسترشی از منطق دو مقداری ۰ و ۱ به منطق بی‌نهایت مقداری (میان ۰ و ۱) ارائه شد [۵]. اصول این منطق می‌تواند در محاسبات و تصمیم‌گیری‌های مختلف مورد استفاده قرار گیرد [۲۸] و [۳۰].

مجموعه‌ی فازی و یا عدد فازی A ، با کمک یک تابع F_A در بازه‌ی ۰ و ۱ که تابع عضویت^۵ نام دارد، بیان می‌شود. بنابراین مجموعه‌ی A از مقادیر $(x, F_A(x))$ با تعریف $A = \{(x, F_A(x)) | x \in X, F_A(x) \in R\}$ به عنوان یک مجموعه‌ی فازی بر روی X (مجموعه‌ی x ها) و تابع عضویت $F_A(x)$ است [۵] و [۱۰].

اصلی که برای فازی‌سازی توابع و روابط قطعی به کار می‌رود اصل گسترش نام دارد [۲۹]. در حقیقت، یک تابع متداول و مرسوم (قطعی) $f: U \rightarrow V$ فازی می‌شود، اگر طوری گسترش یابد که بر مجموعه‌های فازی تعریف شده در U و V عمل نماید [۵]. برای سادگی محاسبات در عملگرهای فازی، فرم کانونی اعداد فازی به کار می‌روند. این فرم‌ها به LR^1 و یا اعداد فازی کانونی مرسومند. یعنی مطابق شکل ۱، نمایش یک عدد فازی توسط تابعی خاص به نام توابع مرجع که قسمت‌های چپ و راست تابع عضویت عدد فازی را تبیین می‌کنند، انجام می‌شود [۵] و [۲۲] و [۱۹]. در شکل ۱ یک عدد فازی مثلثی نمایش داده شده است.

مقدار تابع عضویت



شکل (۱)- تعریف عدد فازی مثلثی [۵]

عدد فازی A از نوع LR است اگر و فقط اگر داشته باشیم؛

کل ۲۳۹ نقطه در منطقه نمونه‌برداری شده که ۱۷۲ مورد از آنها به عنوان نقاط فازی در نظر گرفته شده و تخمین با استفاده از نرم‌افزار فازک^۱ انجام شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، در این پژوهش نیز مانند کارهای قبل فقط تعدادی از نقاط و نه تمامی آنها به عنوان نقاط فازی در نظر گرفته شده‌اند [۲۳]. این موضوع باعث ایجاد مشکلات در تلفیق محاسبات فازی مربوط به اعداد فازی و محاسبات عادی مربوط به اعداد قطعی^۲ می‌شود.

- در سال‌های ۲۰۰۱-۲۰۰۰ در یک جزیره‌ی آتشفشانی در کشور اندونزی برای تخمین تشعشعات متان در مزارع برنج از کریجینگ فازی استفاده شده است تا آلودگی این تشعشعات در جزیره و مناطق خطر شناسایی شوند. در این تحقیق فقط نیم-تغییر نما و عوامل آن به شکل فازی در نظر گرفته شده است و اعداد قطعی به عنوان داده‌های ورودی در نظر گرفته شده‌اند [۱۱].

- در سال ۲۰۰۳ میلادی در ایالت کالیفرنیا کشور آمریکا از کریجینگ فازی برای تخمین آلودگی هوای ناشی از عنصر PM10 استفاده شده است. در این پژوهش از نرم افزارهای GIS^۳ برای فازی‌سازی میزان آلودگی استفاده شده است [۱۳]. یکی از مشکلات این تحقیق آن است که با اینکه میزان آلودگی هوا در نقاط نمونه‌برداری فازی در نظر گرفته شده است ولی در به دست آوردن واریوگرام فازی و نیز پیش‌بینی میزان آلودگی هوا از عملگرهای فازی استفاده نشده و در حقیقت اصل گسترش^۴ در محاسبات فازی نادیده گرفته شده است.

- در سال ۲۰۰۸ در کشور ایران در تحقیقی روش کریجینگ فازی با روش‌های دیگر مانند کریجینگ معمولی و کوکریجینگ برای برآورد ماهانه و سالانه‌ی میزان بارندگی مورد استفاده قرار گرفت. در این کار نیز مانند دو پژوهش اول، از فرضیات و نرم‌افزار تهیه شده برای کریجینگ فازی استفاده شده است که فازک نام دارد. همان‌طور که گفته شد، در نرم‌افزار فازک داده‌ها به دو صورت اعداد فازی و قطعی وارد محاسبات می‌شوند و همه‌ی آن‌ها فازی در نظر گرفته نمی‌شوند. همچنین پژوهش مشابهی در سال ۲۰۰۹ برای تهیه‌ی نقشه‌ی فرساینده‌ی باران در حوزه‌ی دریاچه‌ی نمک (حوزه‌ی شور) و جاجرود انجام شده است [۱] و [۳].

در این تحقیق، برای مدل‌سازی خطاهای موجود در اندازه‌گیری‌های مربوط به آلودگی سدیم در محدوده‌ی مطالعاتی آبخوان زنجان‌رود از کریجینگ فازی استفاده شده است. همه‌ی اعداد مربوط به نمونه‌برداری مقادیر اعداد فازی در نظر گرفته شده‌اند و نیز نیم‌تغییرنما به صورت فازی به دست آمده است.

تعداد نقاط معلوم است. علی رغم سایر روش‌های متداول، در کریجینگ علاوه بر فاصله، ساختار فضایی^۱ نقاط معلوم حول نقطه‌ی مجهول نیز در محاسبات وارد می‌شود.

به صورت بسیار خلاصه مراحل کاری کریجینگ به این شرح است [۲۵]:

- ۱-۳- محاسبه‌ی فواصل: محاسبه‌ی دو به دوی فواصل تمامی نقاط معلوم از یکدیگر
- ۲-۲- کلاسه‌بندی فواصل: فواصل میان نقاط کلاسه‌بندی می‌شوند.
- ۳-۲- محاسبه‌ی مقدار واریوگرام: این مقدار از رابطه‌ی ۵ محاسبه می‌شود؛

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} [Z(x+h) - Z(x)]^2 \quad (5)$$

که در آن $n(h)$ تعداد جفت نمونه‌های به کار رفته در محاسبه به ازای هر فاصله مانند h مقدار $Z(x)$ مشاهده شده در موقعیت x و $Z(x+h)$ متغیر مشاهده شده است که به فاصله‌ی h از $Z(x)$ قرار دارد.

۲-۴- رسم واریوگرام مربوطه: در واریوگرام، محور y ها، $\gamma(h)$ ها و محور x ها فواصل h هستند [۲]. در رسم واریوگرام به طور معمول فاصله‌ی زوج نمونه‌ها گروه-بندی می‌شوند که به آنها گام گفته می‌شود و γ مربوط به هر گام به دست می‌آید.

۲-۵- برازش یک مدل به واریوگرام: در برازش مدل به واریوگرام می‌توان از مدل‌های کروی، نمایی، مدل‌های گوسین و غیره، وابسته به شکل واریوگرام استفاده نمود [۱۲]. در زمین - آمار، مؤلفه‌ی تصادفی واریانس در اصطلاح واریانس قطعه‌ای^۱ نام دارد و با C_0 نشان داده می‌شود، مؤلفه‌ی ساختاردار، واریانس فضایی^۱ نام دارد و با C_1 نشان داده می‌شود (که مشخص می‌نماید تا چه فاصله‌ای میان نقاط همبستگی وجود دارد) و فاصله‌ای که حداکثر مقدار واریوگرام (نیم‌تغییرنما) در آن اتفاق می‌افتد دامنه‌ی اثر^{۱۱} نام دارد و با a نمایش داده می‌شود [۲۴] و [۱۸]. به عنوان مثال در مدل نمایی داریم:

$$\gamma(h) = C_0 + C_1(1 - \exp(-h/a)) \quad (6)$$

۳-۶- تخمین مقدار کمیت در نقاط مجهول: همان‌طور که گفته شد؛ تخمین‌گر کریجینگ یک تخمین‌گر نااریب و کمینه‌ی واریانس است بنابراین اول بایستی عاری عاری از خطاهای سیستماتیک باشد و دوم واریانس تخمین آن باید حداقل باشد.

$$\begin{cases} L\left(\frac{m_A - x}{W_A}\right) & , -\infty < x \leq m_A \\ R\left(\frac{x - m_A}{W'_A}\right) & , m_A < x \leq \infty \end{cases} \quad (1)$$

که در آن m_A میانگین و W_A و W'_A میزان عرض‌های چپ و راست عدد فازی A را نشان می‌دهند. فرم کلی عدد فازی مانند A ، به شکل $A \equiv (m_A, W_A, W'_A)$ و یا $A \equiv (A_L, A_C, A_R)$ نمایش داده می‌شود که A_L میزان فازیت عدد در چپ و A_R و W'_A میزان فازیت عدد در راست و A_C و m_A عدد مرکزی که به ازای آن تابع عضویت ۱ است (در اصطلاح هسته نامیده می‌شود) را نشان می‌دهند [۵]. برای سادگی محاسبات، عملیات جبری روی این اعداد انجام می‌شود. برای مثال ثابت می‌شود که اگر دو عدد A و B را به صورت $A \equiv (A_L, A_C, A_R)$ و $B \equiv (B_L, B_C, B_R)$ داشته باشیم، جمع فازی به صورت رابطه‌ی (۲) تعریف می‌شود [۵] و [۱۷]:

$$A \oplus B = (m_A + m_B, W_A + W_B, W'_A + W'_B) \quad (2)$$

در برخی موارد نیاز داریم مجموعه‌ی فازی B را با نقطه‌ای مانند y^* که بهترین نماینده‌ی آن مجموعه باشد، نشان دهیم. به این عمل غیرفازی سازی گویند [۱۵]. این موضوع مشابه محاسبه‌ی مقدار میانگین یک متغیر تصادفی است. غیرفازی-سازهای مختلفی تعریف شده‌اند که در اینجا به غیرفازی-ساز مرکز ثقل اشاره می‌شود. این نوع غیرفازی‌ساز، نقطه‌ی y^* را به عنوان مرکز ناحیه‌ای که به وسیله‌ی تابع تعلق B پوشش داده شده تعریف می‌نماید. به این معنا که:

$$y^* = \frac{\int y \mu_B(y) dy}{\int \mu_B(y) dy} \quad (3)$$

که اگر $\mu_B(y)$ را تابع توزیع احتمال یک متغیر تصادفی در نظر بگیریم، آنگاه غیرفازی‌ساز، مقدار میانگین متغیر تصادفی را می‌دهد.

۳- مقدمه‌ای بر کریجینگ

کریجینگ یکی از روش‌های زمین - آماری موجود در تخمین میزان یک کمیت است. کریجینگ یک میانگین وزندار است که در آن میزان کمیت در نقاط مجهول از رابطه‌ی ۴ به دست می‌آید [۶] و [۲۷].

$$\hat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(s_i) \quad (4)$$

که در آن $\hat{Z}(s_0)$ مقدار برآورد شده در موقعیت s_0 $Z(s_i)$ مقادیر مشاهده شده در موقعیت i ام، λ_i مقادیر وزن‌ها (که مجهول بوده و به عنوان خروجی بایستی محاسبه شوند) و n

برای برقراری شرط اول باید میانگین خطای تخمین صفر باشد یعنی طبق رابطه (۷):

$$E(Z_V - \hat{Z}_V) = 0 \quad (7)$$

که در آن Z_V مقدار کمیت در یک نقطه‌ی معلوم و \hat{Z}_V مقدار تخمینی کمیت در همان نقطه است. برای برقراری شرط دوم باید واریانس تخمین را محاسبه نمود و تابع به دست آمده را به حداقل رساند. ترکیب دو معادله از شرایط فوق منجر به حل یک مسأله‌ی بهینه‌سازی می‌شود که می‌توان آن را با استفاده از ضرایب لاگرانژ حل نمود. در پایان نتیجه‌ی حل این مسأله معادله‌ی (۸) خواهد بود:

$$Z(p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot Z(x_i) \quad , i = 1, 2, \dots, n(h) \quad (8)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۸) مقدار کمیت در نقطه‌ی مجهول p به دست می‌آید [۲۱]. در رابطه‌ی (۸)، $Z(p)$ مقدار مجهول در نقطه‌ی p ، λ_i ها مقادیر وزن‌های برآورد شده، n تعداد جفت نمونه‌های به کار رفته در محاسبه به ازای هر فاصله مانند h و $Z(x_i)$ مقادیر کمیت موردنظر در نقاط معلوم است. بنابراین وزن‌ها در کریجینگ به مدل برازش داده شده^{۱۲} به داده‌های معلوم، فاصله از نقاط معلوم و روابط مکانی^{۱۳} میان نقاط معلوم در اطراف نقطه‌ی مجهول بستگی دارند.

۴- کریجینگ فازی

برای تخمین مکانی بهتر میزان یک کمیت، می‌توان از محاسبات فازی بر اساس دانش کاربر استفاده نمود [۶]. کریجینگ فازی توسعه‌ای از کریجینگ معمولی است که از مزایای محاسبات فازی در آن استفاده می‌شود. بر اساس انواع فرضیات مختلف در مورد داده‌ها و واریوگرام، سه نوع کریجینگ فازی مطرح می‌شود [۲۳]:

- کریجینگ فازی نوع اول: با استفاده از تلفیق داده‌های فازی و قطعی و واریوگرام معمولی
- کریجینگ فازی نوع دوم: با فرض قطعی بودن داده‌های ورودی و واریوگرام فازی
- کریجینگ فازی نوع سوم: با استفاده از داده‌های فازی و واریوگرام فازی

در این تحقیق از کریجینگ فازی نوع سوم استفاده شده است. همه‌ی مشاهدات ورودی به عنوان اعداد فازی در نظر گرفته شده و در پایان با واریوگرام فازی به دست آمده، میزان مقادیر مجهول تخمین زده شده اند.

در اینجا برای روشن‌تر شدن استفاده از محاسبات فازی در کریجینگ با حفظ ساختار قسمت ۳، دلیل استفاده و چگونگی

استفاده از فازی در کریجینگ آمده است:

۴-۱- محاسبه‌ی فواصل: محاسبه‌ی دو به دو فواصل همه‌ی نقاط معلوم از یکدیگر.

۴-۲- کلاسه‌بندی فواصل: فواصل محاسبه شده میان نقاط کلاسه‌بندی می‌شوند.

۴-۳- محاسبه‌ی مقدار واریوگرام به شکل فازی: برای بهبود تخمین واریوگرام، می‌توان اعداد به دست آمده به عنوان عوامل واریوگرام را به صورت اعداد فازی در نظر گرفت. در نتیجه، مراحل کریجینگ معمولی با استفاده از اصل گسترش به محاسبات فازی تغییر خواهد کرد. همان‌طور که دیده شد، مقدار واریوگرام در کریجینگ معمولی از رابطه‌ی ۵ محاسبه می‌شود. در کریجینگ فازی نوع سوم با توجه به فازی بودن اعداد $Z(x)$ ، $Z(x+h)$ و تعمیم اصل گسترش در آن، $\gamma(h)$ فازی که به صورت $\hat{\gamma}(h)$ نشان داده شده است، به صورت رابطه‌ی (۸) محاسبه خواهد شد:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{\oplus_1^{N(h)} [\hat{Z}(x+h) \ominus \hat{Z}(x)] \otimes (\hat{Z}(x+h) \ominus \hat{Z}(x))}{2n(h)} \quad (8)$$

که در آن \oplus ، \ominus و \otimes عملگرهای فازی و $\hat{Z}(x)$ و $\hat{Z}(x+h)$ اعداد فازی هستند.

۴-۴- رسم واریوگرام: از آنجاکه اعداد به دست آمده در مرحله‌ی قبل یعنی $\hat{\gamma}(h)$ ها اعداد فازی هستند، برای رسم واریوگرام با استفاده از غیر فازی‌سازها می‌توان یک عدد به هر کدام از $\hat{\gamma}(h)$ ها نسبت داد.

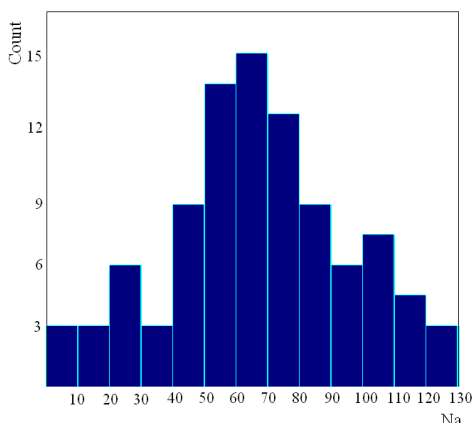
۴-۵- برازش یک مدل به واریوگرام: در مرحله‌ی بعد با استفاده از روش کمترین مربعات، یک مدل به واریوگرام به دست آمده برازش داده می‌شود. از آنجا که به دست آوردن دقیق المان‌های واریوگرام مانند C_0 و C_1 ممکن نیست، با در نظر گرفتن این اعداد به صورت اعداد فازی ابهام موجود تا حد زیادی مدل خواهد شد [۲۰]. به عنوان مثال با در نظر گرفتن واریوگرام نمایی فازی خواهیم داشت:

$$\hat{\gamma}(h) = \hat{C}_0 \oplus \hat{C}_1 \otimes (1 - \exp(-h/a)) \quad (9)$$

که در آن \hat{C}_0 و \hat{C}_1 ، اعداد فازی هستند. در این تحقیق این اعداد به صورت اعداد کانونی فازی مثلثی در نظر گرفته شده‌اند. در نتیجه مقادیر $\hat{\gamma}(h)$ اعداد فازی خواهند بود.

۴-۶- تخمین مقدار کمیت در نقاط مجهول: در اینجا نیز مانند بخش ۶-۳، برای تخمین مقادیر مجهول با فرض ناروی بودن و کمینه واریانس بودن تخمین‌گر کریجینگ، دو معادله تشکیل می‌شود که از بهینه نمودن

ابتدا لازم است، شرط نرمال بودن داده‌های ورودی بررسی شود زیرا فرض بر این است که داده‌ها تصادفی هستند [۲۵]. به این علت در مرحله‌ی اول باید نرمال بودن داده‌های ورودی بررسی شود. این کار با استفاده از ترسیم هیستوگرام مربوط به داده‌ها و نیز پلات‌های مربوطه، امکان‌پذیر است. شکل (۳) هیستوگرام داده‌ها را نشان می‌دهد که نشان‌دهنده‌ی نرمال بودن آنها است. گفتنی است که در صورت نرمال نبودن داده‌ها می‌توان با روش‌هایی مانند تبدیلات لگاریتمی، تبدیل کاکس و باکس (Cox & Box) و غیره آنها را به صورت نرمال درآورد [۴].



شکل (۳): هیستوگرام مربوط به میزان سدیم محلول در آب

۵-۳- اجرای مدل پیشنهادی

تعداد نقاط نمونه‌برداری از سدیم محلول در آب، در این محدوده ۸۱ نقطه بوده که ۵ نقطه به عنوان نقطه‌ی کنترل در نظر گرفته شده و بقیه به صورت اعداد فازی وارد محاسبات شده‌اند. در حقیقت برای فازی نمودن مشاهدات، از مقدار خطای موجود در آنها استفاده شده است. در مشاهدات مربوط به نمونه‌برداری کمیت‌های شیمیایی آب، در آبخوان‌هایی که ساختار زمین‌شناسی متعادلی دارند، مجموع آنیون‌ها و کاتیون‌ها باید برابر باشند ولی به دلیل وجود خطا در وسایل آزمایشگاهی و یا خطاهای مشاهداتی به طور معمول این دو مقدار با هم برابر نیستند. این اختلاف تا ۱۰ درصد میزان اندازه‌گیری قابل قبول است در غیر اینصورت مشاهده باید تکرار شود. در این تحقیق میزان این اختلاف به عنوان خطا در نظر گرفته شده است. بنابراین در اعداد فازی در نظر گرفته شده، هسته مساوی مقدار مشاهداتی و باندهای چپ و راست با توجه به میزان خطا در مشاهدات، تعریف شده است. اعداد فازی در دو اجرای متفاوت، یکبار به صورت اعداد فازی مثلثی و بار دیگر به صورت اعداد فازی زنگوله‌ای در نظر گرفته شده‌اند. شکل (۴) یک نمونه از اعداد فازی زنگوله‌ای در نظر

آنها به رابطه‌ی (۱۰) می‌رسیم که با آن مقادیر در نقاط مجهول به دست می‌آیند.

$$\bar{Z}(p) = \bigoplus_{i=1}^n \hat{\lambda}_i \otimes \bar{Z}(x_i) \quad (10)$$

که در آن $\bar{Z}(p)$ مقدار مجهول در نقطه‌ی p ، $\hat{\lambda}_i$ ها مقادیر وزن‌های برآورد شده که به صورت اعداد فازی هستند، n تعداد جفت نمونه‌های به کار رفته در محاسبه به ازای هر فاصله مانند $\bar{Z}(x_i)$ ، h مقادیر کمیت موردنظر در نقاط معلوم است که به صورت اعداد فازی وارد محاسبات شده‌اند و \oplus و \otimes عملگرهای جمع و ضرب فازی هستند.

۷-۴- نسبت دادن یک عدد قطعی به کمیت برآورد شده:

برای به دست آوردن مقدار نهایی برآورد شده از

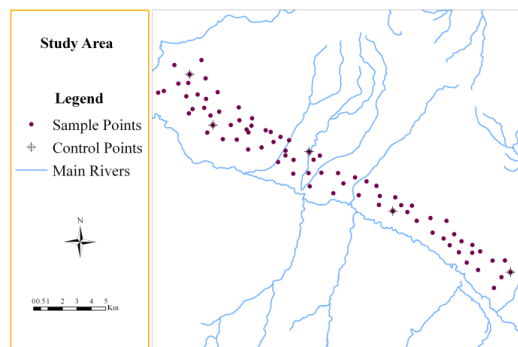
روش‌های غیر فازی سازی استفاده می‌شود [۸].

۵-۵- روش انجام کار

در این قسمت پس از معرفی محدوده‌ی مطالعاتی، چگونگی آماده‌سازی داده‌ها و ورود آنها به مدل پیشنهادی تشریح خواهد شد.

۵-۱- محدوده‌ی مطالعاتی

این تحقیق در محدوده‌ی مطالعاتی آبخوان زنجان به کار گرفته شده است. این آبخوان در شمال غرب کشور ایران واقع شده است و شهر زنجان روی این آبخوان قرار دارد. برای بررسی کیفیت شیمیایی آب در این سفره‌ی آب زیرزمینی، سالانه در مقاطع زمانی کم‌آبی و پرآبی نمونه‌هایی از چاه‌های موجود در منطقه برداشت می‌شود. داده‌های به کار رفته در این تحقیق مربوط به فصل کم‌آبی بوده و در سال ۸۸ جمع‌آوری شده‌اند. شکل (۲) نحوه‌ی پراکندگی نقاط نمونه‌برداری شده و نقاط کنترل و همچنین موقعیت محدوده‌ی مطالعاتی را نشان می‌دهد.



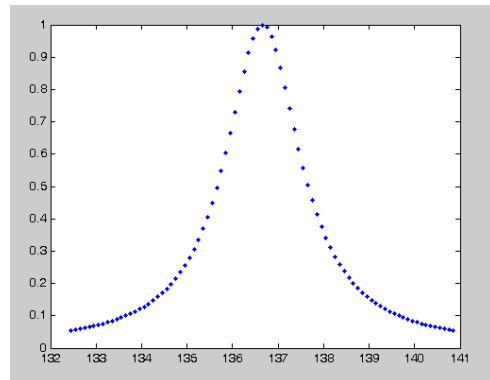
شکل (۲): محدوده‌ی مطالعاتی و نقاط نمونه‌برداری و کنترل

۵-۲- آماده‌سازی داده‌ها و انجام تحلیل‌های اولیه

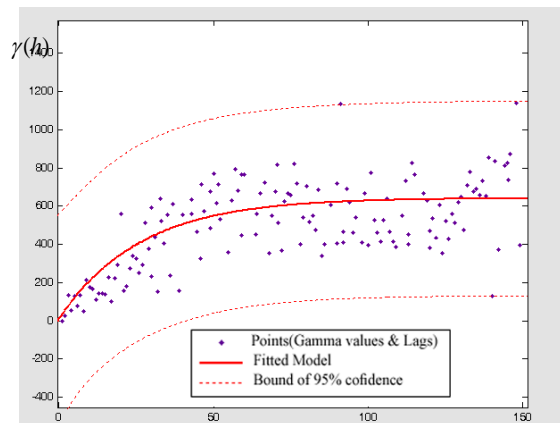
برای تخمین مقادیر، ابتدا لازم است بررسی بر روی داده‌ها انجام شود. در محاسبات و تخمین‌های مربوط به کریجینگ

گرفته شده را برای ورود به محاسبات نشان می‌دهد.

سپس با توجه به مراحل کاری شرح داده شده، از رابطه‌ی (۹) مقدار $\hat{\gamma}(h)$ به دست آمده است که یک عدد فازی است. در مرحله‌ی بعد پس از غیر فازی‌سازی اعداد به دست آمده، واریوگرام مربوطه با استفاده از نرم‌افزار طراحی شده، رسم شده است. شکل (۵) واریوگرام مربوطه و مدل برازش داده شده به آن را نشان می‌دهد. تعداد گام‌ها در این محدوده ۱۵۰ گام است که طول هرکدام ۱۲۵ در نظر گرفته شده است.



شکل (۴): نمونه‌ای از اعداد فازی وارد شده به محاسبات



شکل (۵): واریوگرام به دست آمده از داده‌ها

در برازش مدل به واریوگرام از روش کمترین مربعات استفاده شده است. به این منظور مدل‌های نمایی، کروی و گوسین به واریوگرام، برازش داده شده است. مدل نمایی دارای کمترین باقیمانده‌ی $RMSE^{14}$ و در نتیجه بهترین برازش به داده‌ها بوده است.

با استفاده از مدل برازش داده شده، مشخصات واریوگرام به صورت $\Theta = (a, C_0, C_1) = (120, 10, 9000)$ به دست آمده است. همان‌طور که گفته شد نسبت دادن این مقادیر به صورت اعداد قطعی به المان‌های واریوگرام دقت خوبی ندارد. و اگر بازه‌ای برای تغییر آنها در نظر گرفته شود، نتایج بهتری به دست خواهد آمد [۲۰]. در نتیجه C_1 و C_0 به صورت اعداد فازی مثلثی در نظر گرفته شده‌اند. به این ترتیب که عدد به دست

آمده از روش کمترین مربعات در مرکز عدد فازی قرار داده شده و با توجه به شکل واریوگرام برای آن بازه‌ی تغییر مناسبی در نظر گرفته شده است. به عنوان مثال \hat{C}_1 به صورت رابطه‌ی (۱۱) تعریف شده است.

$$\hat{C}_1 = (10000, 9000, 8000) = (\hat{C}_1^L, \hat{C}_1^C, \hat{C}_1^R) \quad (11)$$

که در آن $(\hat{C}_1^L, \hat{C}_1^C, \hat{C}_1^R)$ معرف یک عدد فازی مثلثی با بازه‌ی فازیت 10^{-5} در چپ و راست و نیز مرکزیت \hat{C}_1^C است. برای \hat{C}_0 نیز از بازه‌ی فازیت چپ ۲۰ و از راست ۱۰ در نظر گرفته شده است. دلیل اینکه بازه‌ی راست، کمتر در نظر شده آن است که از منفی شدن \hat{C}_0 جلوگیری شود. در این حالت شکل عدد فازی غیر متقارن خواهد شد.

در مرحله‌ی بعد، شبکه‌ای رستری^{۱۶} به منطقه‌ی مطالعاتی برازش داده شده و مختصات نقاط مرکزی سلول‌ها^{۱۷} به دست آمده است تا بتوان میزان آلودگی آب را با استفاده از آن پهنه-بندی نمود. این کار در محیط نرم‌افزارهای سیستم اطلاعات مکانی^{۱۸} انجام گرفته است.

سپس با توجه به روابط گفته شده در بخش ۶-۴، وزن‌های $\hat{\lambda}_i$ و در پایان $\hat{Z}(p)$ در هر یک از نقاط مرکزی شبکه به دست آمده و غیر فازی شده است. در اینجا از روش دو بخشی^{۱۹} برای غیر فازی‌سازی استفاده شده است.

گفتنی است در این تحقیق برای مقایسه‌ی نتایج، باقیمانده‌های تخمین در دو روش کریجینگ معمولی و کریجینگ فازی، اجرا شده است. شکل (۶)، مقادیر تخمین زده شده را با استفاده از کریجینگ فازی و شکل (۷)، مقادیر تخمین زده شده را با استفاده از روش کریجینگ معمولی نشان می‌دهد.

۶- بحث و بررسی نتایج

در این بخش سعی بر آن است تا اثر پارامترهای مختلف بر روی نتایج مورد بررسی قرار گیرد.

همان‌طور که گفته شد، اعداد در دو مدل فازی مثلثی و فازی زنگوله‌ای وارد محاسبات شده‌اند. در حالت کلی تغییرات معنی-داری در باقیمانده‌ها دیده نمی‌شود ولی نتایج اعداد فازی زنگوله‌ای بهتر است. جدول (۱) مقایسه‌ی $RMSE$ در نقاط کنترل، در این دو حالت را نشان می‌دهد.

۶-۱- اثر مدل برازش داده شده به واریوگرام بر روی

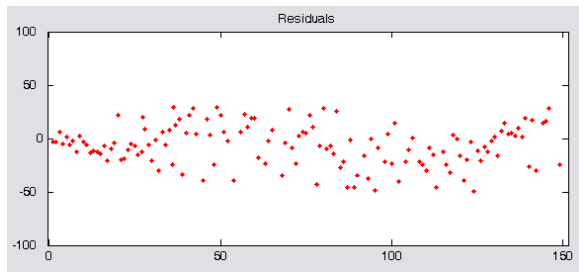
نتایج

همان‌طور که گفته شد، در این تحقیق سه مدل نمایی، کروی و گوسین برای برازش به واریوگرام به کار رفته‌اند که جدول (۲) نتایج آن را نشان می‌دهد. در نتیجه‌ی آن مدل نمایی دارای

کمترین باقیمانده در نقاط کنترل است.

۲-۶- بررسی باقیمانده‌های مدل

پس از انجام محاسبات مربوطه و رسم واریوگرام، شکل (۸) نمودار باقیمانده‌های مدل برازش داده شده به واریوگرام را نشان می‌دهد. منظور از باقیمانده، تفاوت نقاط روی مدل برازش داده شده (مدل‌های نمایی، کروی و گوسین) و نقاط به دست آمده در واریوگرام است. در این نمودار توزیع تصادفی باقیمانده‌ها حول صفر نشان‌دهنده‌ی این است که در باقیمانده‌ها مدل خاصی وجود ندارد و آنها حول صفر تصادفی هستند.



شکل (۸): باقیمانده‌های برازش مدل نمایی به واریوگرام

۳-۶- مقایسه‌ی نتایج مدل پیشنهادی با کریجینگ

نتایج نشان می‌دهند که باقیمانده‌ی به دست آمده از کریجینگ فازی بهتر از باقیمانده‌ی کریجینگ معمولی است. جدول (۳) نتایج به دست آمده را نشان می‌دهد.

جدول ۳: مقدار RMSE به دست آمده از دو روش کریجینگ معمولی و کریجینگ فازی برای نقاط کنترل

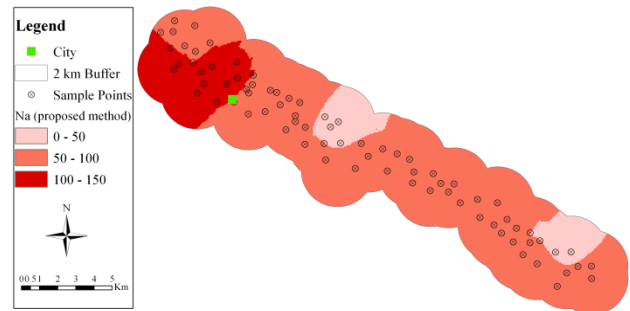
روش	مقدار RMSE ^۱	مقدار متوسط انحراف معیار تخمین
کریجینگ معمولی	۰/۷۵	۰/۱۵
کریجینگ فازی	۰/۴۴	۰/۰۴۹

انحلال سدیم در دو روش کریجینگ فازی و کریجینگ معمولی

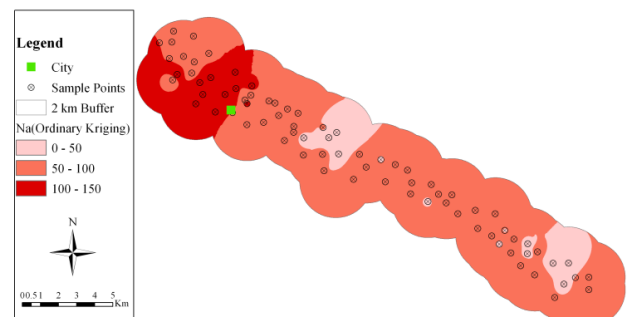
کریجینگ معمولی				کریجینگ فازی			
شماره نقطه کنترل	مقدار واقعی	مقدار برآورد	باقیمانده	شماره نقطه کنترل	مقدار واقعی	مقدار برآورد	باقیمانده
۱	۴۵.۵	۴۵.۱۳	۰.۳۶	۱	۴۵.۵	۴۵.۲۳	۰.۲۷
۲	۷۷.۹۵	۷۸.۱۴	-۰.۲۰	۲	۷۷.۹۵	۷۸.۰۳	-۰.۰۸
۳	۹۱.۹	۹۲.۲۴	-۰.۳۵	۳	۹۱.۹	۹۲.۱۱	-۰.۲۱
۴	۳۷	۳۶.۹۲	۰.۰۸	۴	۳۷	۳۶.۸۹	۰.۱۱
۵	۶۷.۱	۶۶.۵۴	۰.۵۶	۵	۶۷.۱	۶۶.۸۴	۰.۲۵

۴-۶- نقش شعاع جستجو در باقیمانده‌ها

شعاع جستجو نقش بسیار مهمی در تخمین مقدار کمیت‌ها در نقاط مجهول دارد. منظور از شعاع جستجو بیشترین فاصله‌ای است که در آن نقاط معلوم در حول نقطه‌ی مجهول برای تخمین به کار می‌روند. در صورتی که شعاع جستجو بیش از حد بزرگ انتخاب شود، باعث هموار شدن^{۲۰} سطح پیش‌بینی شده می‌شود و در صورتیکه این شعاع کوچک انتخاب شود، باعث ظاهر شدن تغییرات ناگهانی خواهد شد [۲۲]. در این تحقیق برای یافتن شعاع جستجوی بهینه، مقادیر مختلف برای



شکل (۶): مقادیر تخمین زده شده به روش کریجینگ فازی در محدوده‌ی ۲ کیلومتری نقاط نمونه‌برداری شده



شکل (۷): مقادیر تخمین زده شده به روش کریجینگ معمولی در محدوده‌ی ۲ کیلومتری نقاط نمونه‌برداری شده

جدول ۱: مقایسه‌ی اعداد فازی مثلثی و زنگوله‌ای در محاسبات

روش	مقدار RMSE	مقدار متوسط انحراف معیار تخمین
اعداد فازی مثلثی	۰/۴۹	۰/۰۵۸
اعداد فازی زنگوله‌ای	۰/۴۴	۰/۰۴۹

جدول ۲: نتایج به دست آمده از برازش مدل‌های مختلف به واریوگرام

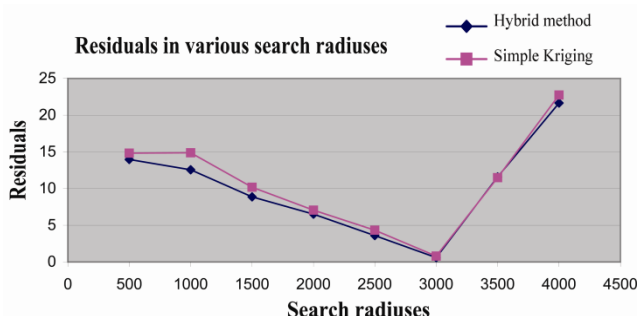
مدل گوسین	مدل کروی	مدل نمایی	نوع مدل
۰/۶۷	۰/۵۸	۰/۴۴	مقدار RMSE

شکل (۱۰): پهنه‌بندی سدیم در آبخوان به همراه لایه‌ی صنایع بزرگ و شهرک صنعتی منطقه

۷- نتیجه‌گیری

- در صورت استفاده از داده‌های نمونه‌برداری شده به صورت اعداد فازی و تغییر عملیات کریجینگ معمولی به کریجینگ فازی میزان باقیمانده‌ها کاهش می‌یابد.
- نتایج کریجینگ (معمولی و فازی) به پراکندگی نقاط، بستگی دارند.
- در تخمین کمیت‌ها در نقاط مجهول با استفاده از کریجینگ (معمولی و فازی)، میزان برآورد به شدت تحت اثر مدل برآورد شده به واریوگرام است و از آنجاکه برازش مدل تا حد زیادی تجربی است، نتایج تحت اثر نظر کاربر قرار دارند. در کریجینگ فازی این مشکل تا حد زیادی کاهش می‌یابد.
- همانطور که در مورد قبل گفته شد، برآورد در کریجینگ وابستگی زیادی به مدل برازش داده شده به واریوگرام دارد. بنابراین در صورتی‌که بتوان از روش‌هایی استفاده نمود که دقت برازش بالا برود، نتایج بهتری در تخمین به‌دست خواهد آمد.
- همانطور که در سطح برازش داده شده دیده می‌شود، غلظت سدیم در اطراف شهرهای بزرگ و مناطق صنعتی اطراف آنها در محدوده‌ی مطالعاتی، بیشتر از سایر مناطق است. دلیل آن می‌تواند وجود صنایع بزرگ در اطراف این شهرها باشد که باعث بالا رفتن میزان سدیم و در نتیجه آلودگی آب ناشی از این عنصر در این مناطق شده است.

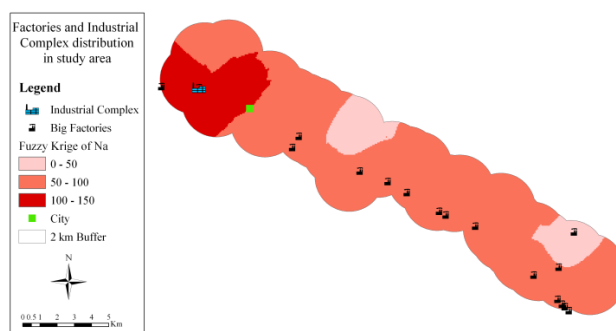
آن مورد امتحان قرار گرفته و بهینه مقدار آن به دست آمد. شکل (۹) میزان شعاع‌های جستجوی مختلف به همراه RMSE برآورد شده را در دو روش کریجینگ معمولی و کریجینگ فازی نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود، شعاع جستجوی ۳۰۰۰ متر به عنوان بهینه انتخاب شده است.



شکل (۹): مقدار RMSE به ازای شعاع‌های مختلف جستجو در دو روش فازی و معمولی

۵-۶- پراکندگی مکانی سدیم در آبخوان زنجان و رابطه‌ی آن با صنایع موجود در منطقه

در پایان با استفاده از بهترین نتایج تخمین، مقدار سدیم در آبخوان پهنه‌بندی شده است. در شکل (۱۰) لایه‌ی پهنه‌بندی شده با استفاده از مدل پیشنهادی، لایه‌ی صنایع بزرگ و نیز شهرک صنعتی منطقه نشان داده شده است. شهرک صنعتی و چند صنعت بزرگ در محدوده با آلودگی بالا قرار دارند که نشان از اثر این صنایع بر روی آلودگی آب آبخوان است. از طرفی بیشتر صنایع بزرگ در محدوده‌ی با ریسک متوسط قرار دارند. همچنین بزرگ‌ترین شهر منطقه در محدوده‌ی پرخطر آلودگی قرار دارد.



۸- مراجع

- [۱] تاج علی پور، زرین، مهدیان، محمدحسین؛ پذیرا، ابراهیم؛ حیدری زاده، مجید؛ بندرآبادی رحیمی، سیما؛ کاربرد فازی کریجینگ برای تهیه نقشه فرساینده‌ی باران در حوزه دریاچه نمک، چهارمین همایش ملی علوم مهندسی و مهندسی آبخیزداری ایران، مدیریت حوزه‌های آبخیز، ۱۳۸۶
- [۲] حسنی، پاک، علی اصغر؛ زمین آمار (ژئواستاتیک)، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ اول، ۱۳۷۷.
- [۳] رحیمی بندرآبادی، سیما؛ ثقفیان، بهروز؛ بررسی کاربرد تئوری مجموعه فازی در برآورد توزیع مکانی بارندگی سالانه و ماهانه، طرح تحقیقاتی، وزارت جهاد کشاورزی، پژوهشکده حفاظت خاک و آبخیزداری صفحه‌ی ۱۳۵، ۱۳۸۴.

- [۴] مدنی، حسن؛ مبانی زمین آمار، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر (واحد تفرش)، چاپ اول، ۱۳۷۳.
- [۵] منهای، محمدباقر؛ هوش محاسباتی (جلد سوم: محاسبات فازی)، انتشارات دانش نگار، تهران، چاپ اول، ۱۳۸۶.
- [۶] Alley, W.M.; Regional Ground-Water Quality, USA, International Thomson publishing, New York, 1993.
- [۷] Bardossy, A., Bogardi, I., Kelly, W. E.; "Kriging with Imprecise (Fuzzy) Variograms", Mathematical Geology, Vol. 22, No. 1, p.p.81-94, 1990.
- [۸] Bardossy, A., Bogardi, I., Kelly, W. E.; "Imprecise (Fuzzy) Information in Geostatistics", Mathematical Geology, Vol. 20, No. 4, p.p.287-311, 1988.
- [۹] Bojadzier, G.; Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Applications, World Scientific Publication, 2nd Edition, Singapore, 1998.
- [۱۰] Dubois, D., Prade, H.; Fundamentals of fuzzy sets, Kluwer Academic Publishers, 1st Edition, USA, Massachusetts, 2000.
- [۱۱] Fisher, P.F.; Development in spatial data handling, Springer, Germany, 2005.
- [۱۲] Goovaerts P.; Geostatistics for natural resources evaluation, Oxford University Press, 1st Edition, New York, 1997.
- [۱۳] Guo, D., Guo, R., Thiart, C.; "Predicting Air Pollutant, Using Fuzzy membership grade Kriging", Computers, Environment and Urban Systems, No 31, p.p.33-51, 2007.
- [۱۴] Illian, J., Stoyan, D.; Statistical analysis and modeling of spatial point patterns, Jhon Wiley and sons, Enhland, 2008.
- [۱۵] Jones, A., Kaufmann, A., Zimmermann, H.J.; Fuzzy Sets theory and applications, Reidal Publishing Company, Netherlands, 1985.
- [۱۶] Kanevski, M., Maignan, M.; Analysis and modeling of spatial environmental data, 1st Edition, EPFL publication, Italy, 2004.
- [۱۷] Klir, G. J., Yuan, B.; Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: theory and applications, 1st Edition, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.
- [۱۸] Krešić, N.; Quantitative solutions in hydrogeology and groundwater modeling, CRC press, USA, 1998.
- [۱۹] Lee, K.H.; First course on Fuzzy theory and applications, Springer, Germany, 2005.
- [۲۰] Lodwick, W.; Fuzzy Surfaces in GIS and Geographical Analysis, CRC press, Taylor & Francis, USA, 2008.
- [۲۱] Olea, R.A.; Geostatistics for engineers and earth Scientists, Kluwer Academic Publishers, 1st Edition, USA, Massachusetts, 1999.
- [۲۲] Pedrycz, W., Gomide, F.; An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis And Design, Massachusetts Institute of technology publication, USA, 1998.
- [۲۳] Piotrowski, J. A., Bartels, F., Salski, A., Schmidt, G.; "Geostatistical Regionalization of Glacial Aquitard, Thickness in Northwestern Germany, Based on, Fuzzy Kriging", Mathematical Geology, Vol. 28, No. 4, p.p.437- 452, 1996.
- [۲۴] Rouhani, Sh; Geostatistics for environmental and geotechnical applications, ASTM committee, USA, Arizona, 1996.
- [۲۵] Stein, M.L.; Interpolation of spatial Data: Theory for Kriging, 1st Edition, Springer, USA, Chicago, 1999.
- [۲۶] Wackernagel, H.; Multivariate geostatistics: An Introduction with applications, third Edition, Springer, New York, 2003.
- [۲۷] Waller, L.A, Gotway C.A.; Applied Spatial Statistics for public health data, John Wiley and sons, USA, New Jersey, 2004.
- [۲۸] Zereini, F., Wolfgang, J.; Water in the Middle East and in North Africa, 1st Edition, Springer, Germany: Berlin, 2004.
- [۲۹] Zimmermann, H.J.; Fuzzy sets theory and its applications, 4th Edition, Kluwer academic publishers, London, 2001.
- [۳۰] Zimmermann, H.J.; Fuzzy sets, decision making and expert systems, 1st Edition, Kluwer academic publishers, Boston, 1987.

۹- زیر نویس ها

- 1 Fuzzek
- 2 Crisp
- 3 Geospatial Information Systems
- 4 Extension Principle
- 5 Membership function
- 6 Left-Right
- 7 علاقمندان برای مطالعه‌ی بیشتر سایر عملگرها می‌توانند به رفرنس‌های ۵ و ۱۷ مراجعه نمایند.
- 8 Spatial arrangement
- 9 Nugget
- 10 Sill
- 11 Range
- 12 fitted model
- 13 spatial relationships
- 14 Root Mean Square Error
- 15 Fuzziness
- 16 Raster
- 17 Cell
- 18 Geospatial Information Systems
- 19 Bisector
- 20 Smoothness

